文章编号:1000-5862(2014)06-0551-06

2阶微分方程的解与小函数的关系

闵小花,张红霞,易才凤*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要: 运用Nevanlinna值分布的基本理论和方法,研究了几类2阶线性微分方程的解及其导数取小函数的不同点的收敛指数,得到了方程解及其导数取小函数的不同点的收敛指数为无穷和2阶收敛指数等于解的超级的精确结果.

关键词: 微分方程;整函数;超级;2级收敛指数

中图分类号: O 174.52　　**文献标志码:** A

0 引言与结果

本文使用Nevanlinna值分布理论的标准记号[1-2],用$\sigma(f)$表示亚纯函数$f(z)$的增长级,$\lambda(f)$表示$f(z)$的零点收敛指数,$\overline{\lambda}(f)$表示$f(z)$的不同零点收敛指数,$\overline{\lambda}(f-\varphi)$表示$f(z)$取小函数$\varphi$的不同点的收敛指数,$\sigma_2(f)$表示亚纯函数$f(z)$的超级,$\overline{\lambda}_2(f-\varphi)$表示$f(z)$取小函数$\varphi$的不同点的2级收敛指数.

关于微分方程的解与小函数的关系已被众多学者研究,得到了一些有趣的结果[3-6].例如关于2阶线性微分方程

$$f''+A_1e^{az}f'+A_0e^{bz}f=0,\qquad(1)$$

陈宗煊在文献[7]中证明了下面的结果.

定理A 假设$A_j(z)\neq 0(j=0,1)$是整函数,$\sigma(A_j)<1$,a,b是复常数且满足$ab\neq 0$和$a\neq b$,则方程(1)的每个解$f(\neq 0)$都具有无穷级.

之后,陈宗煊等在文献[8]中又研究了方程(1)的解及其导数与小函数之间的关系,证明了下面2个定理.

定理B 假设$A_j(z)\neq 0(j=0,1)$是整函数,$\sigma(A_j)<1$,a,b是复常数且满足$ab\neq 0$和$a\neq b$,如果$\varphi(z)(\neq 0)$是有限级整函数,则方程(1)的每个解$f(\neq 0)$满足$\overline{\lambda}(f-\varphi)=\infty$.

定理C 假设$A_j(z)\neq 0(j=0,1)$是整函数,$\sigma(A_j)<1$,a,b是复常数且满足$ab\neq 0$和$\arg a\neq\arg b$或$a=cb(0<c<1)$,如果$\varphi(z)(\neq 0)$是有限级整函数,则方程(1)的每个解$f(\neq 0)$满足$\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty$.

另外,关于2阶线性微分方程

$$f''+Ae^{az}f'+(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})f=0,\qquad(2)$$

文献[8]证明了下面的结果.

定理D 假设$A(z)(\neq 0)$,$B_i(z)(\neq 0)(i=0,1)$是整函数,$\sigma(A)<1$,$\sigma(B_i)<1$,a,b,d是复常数,$abd\neq 0$,$|a|\neq\max\{|b|,|d|\}$且$(a-b)(a-d)\neq 0$,当$b=d$时,$B_0(z)+B_1(z)\neq 0$,如果$\varphi(z)(\neq 0)$是级小于1的整函数,则方程(2)的每个解$f(\neq 0)$满足

$$\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty.$$

以上定理研究了方程(1)和(2)的解及其导数取小函数的不同点的收敛指数与解的增长级之间的关系,证明了方程(1)和(2)的解$f(\neq 0)$满足$\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\sigma(f)=\infty$.本文是在前人研究的基础上,进一步研究了方程(1)和(2)以及相关的非齐次方程的解及其导数取小函数的不同点的2级收敛指数与解的超级之间的关系,得到了下面的结果.

定理1 假设$A_j(z)\neq 0(j=0,1)$是整函数,$\sigma(A_j)<1$,a,b是复常数且满足$ab\neq 0$和$a\neq b$,如果$\varphi(z)(\neq 0)$是有限级整函数,则方程(1)的每个解$f(\neq 0)$满足$\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)$.进一步,如果$\varphi(z)(\neq 0)$是级小于1的整函数,则方程(1)的每个解$f(\neq 0)$还满足$\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty$且$\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\overline{\lambda}_2(f''-\varphi)=\sigma_2(f)$.

定理2 假设$A_j(z)\neq 0(j=0,1)$是整函数,

收稿日期:2014-02-25

基金项目:国家自然科学基金(11171170)资助项目.

通信作者:易才凤(1955-),女,江西吉安人,教授,主要从事复分析方向的研究.

$\sigma(A_j)<1$,a,b 是复常数且满足 $ab\neq 0$ 和 $a\neq b$,如果 $\varphi(z)(\neq 0)$,$F(z)(\neq 0)$ 都是有限级整函数,则方程

$$f''+A_1e^{az}f'+A_0e^{bz}f=F \tag{3}$$

的每个解 $f(\neq 0)$ 都满足 $\bar{\lambda}(f-\varphi)=\infty$,并且 $\bar{\lambda}_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)$,至多除去 1 个例外的非零解. 进一步,如果 $\varphi(z)(\neq 0)$,$F(z)(\neq 0)$ 都是级小于 1 的整函数,则方程(3)的每个解 $f(\neq 0)$ 还满足 $\bar{\lambda}(f'-\varphi)=\bar{\lambda}(f''-\varphi)=\infty$ 并且 $\bar{\lambda}_2(f'-\varphi)=\bar{\lambda}_2(f''-\varphi)=\sigma_2(f)$,至多除去 1 个例外的非零解.

定理 3 假设 $A_j(z)\neq 0(j=0,1)$ 是整函数,$\sigma(A_j)<1$,a,b 是复常数且满足 $ab\neq 0$ 和 $\arg a\neq \arg b$ 或 $a=cb(0<c<1)$,如果 $\varphi(z)(\neq 0)$ 是有限级整函数,则方程(1)的每个解 $f(\neq 0)$ 满足 $\bar{\lambda}_2(f-\varphi)=\bar{\lambda}_2(f'-\varphi)=\bar{\lambda}_2(f''-\varphi)=\sigma_2(f)$.

定理 4 假设 $A(z)(\neq 0)$,$B_i(z)(\neq 0)(i=0,1)$ 是整函数,$\sigma(A)<1$,$\sigma(B_i)<1$,a,b,d 是复常数,$abd\neq 0$,$|a|\neq\max\{|b|,|d|\}$ 且 $(a-b)(a-d)\neq 0$,当 $b=d$ 时,$B_0(z)+B_1(z)\neq 0$,如果 $\varphi(z)(\neq 0)$ 是级小于 1 的整函数,则方程(2)的每个解 $f(\neq 0)$ 满足

$$\bar{\lambda}_2(f-\varphi)=\bar{\lambda}_2(f'-\varphi)=\bar{\lambda}_2(f''-\varphi)=\sigma_2(f).$$

定理 5 假设 $A(z)(\neq 0)$,$B_i(z)(\neq 0)(i=0,1)$ 是整函数,$\sigma(A)<1$,$\sigma(B_i)<1$,a,b,d 是复常数,$abd\neq 0$,$|a|\neq\max\{|b|,|d|\}$ 且 $(a-b)(a-d)\neq 0$,当 $b=d$ 时,$B_0(z)+B_1(z)\neq 0$,如果 $\varphi(z)(\neq 0)$ 和 $F(z)(\neq 0)$ 都是级小于 1 的整函数,则方程

$$f''+Ae^{az}f'+(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})f=F$$

的每个解 $f(\neq 0)$ 满足 $\bar{\lambda}(f-\varphi)=\bar{\lambda}(f'-\varphi)=\bar{\lambda}(f''-\varphi)=\infty$ 且 $\bar{\lambda}_2(f-\varphi)=\bar{\lambda}_2(f'-\varphi)=\bar{\lambda}_2(f''-\varphi)=\sigma_2(f)$,至多除去 1 个例外的非零解.

1 引理

引理 1[9] 假设 $a_j(j=0,1,\cdots,k-1)$,$F(\neq 0)$ 是整函数,f 满足微分方程

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=F \tag{4}$$

且 $\max\{\sigma(F),\sigma(a_j);j=0,1,\cdots,k-1\}<\sigma(f)=\sigma(0<\sigma\leqslant\infty)$,则 $\bar{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)$.

注 1 由引理 1 的证明过程易知,当 $a_j(j=0,1,\cdots,k-1)$ 和 F 是亚纯函数时,引理 1 的结论也成立.

引理 2 在引理 1 的条件下,若 $\sigma(f)=\infty$,则在引理 1 的结论下,进一步还有

$$\bar{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f).$$

证 将(4)式改写为

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{F}\left(\frac{f^{(k)}}{f}+a_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+\cdots+a_0\right). \tag{5}$$

由(5)式,若 z_0 为 f 的大于 k 的 α 阶零点,则 z_0 必为 F 的 $\alpha-k$ 阶零点,从而有

$$n(r,1/f)\leqslant k\bar{n}(r,1/f)+n(r,1/F),$$
$$N(r,1/f)\leqslant k\bar{N}(r,1/f)+N(r,1/F)+O(1).$$

再由对数导数引理,至多除去 1 个线测度为有限的 r 值集 E 外,有

$$m(r,f^{(j)}/f)=O\{\log(rT(r,f))\}(j=1,\cdots,k),$$
$$m(r,1/f)\leqslant m(r,1/F)+\sum_{j=0}^{k-1}m(r,a_j)+O\{\log(rT(r,f)\}(r\notin E).$$

所以

$$T(r,f)=T(r,1/f)+O(1)\leqslant k\bar{N}(r,1/f)+T(r,1/F)+O\{\log(rT(r,f))\}+\sum_{j=0}^{k-1}T(r,a_j)=k\bar{N}(r,1/f)+T(r,F)+O\{\log(rT(r,f))\}+\sum_{j=0}^{k-1}T(r,a_j)(r\notin E).$$

因为 $\max\{\sigma(F),\sigma(a_j);j=0,1,\cdots,k-1\}<\sigma(f)=\infty$,所以由上式可得 $\sigma_2(f)\leqslant\bar{\lambda}_2(f)$. 故有

$$\bar{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f).$$

引理 3[10] 假设 $f_1(z)$,$f_2(z)$,$\cdots$,$f_n(z)(n\geqslant 2)$ 为亚纯函数,$g_1(z)$,$g_2(z)$,$\cdots$,$g_n(z)$ 为整函数,满足条件

(i) $\sum_{j=1}^{n}f_j(z)e^{g_j(z)}\equiv 0$;

(ii) $g_j(z)-g_k(z)(1\leqslant j<k\leqslant n)$ 不为常数;

(iii) $T(r,f_j)=o[T(r,e^{g_h-g_k})](1\leqslant j\leqslant n,1\leqslant h<k\leqslant n)(r\to\infty,r\notin E)$,其中 E 是对数测度为有限的集合,

则有 $f_j(z)\equiv 0(j=1,2,\cdots,n)$.

由定理 A 容易得到下面的引理 4.

引理 4 假设 $A_j(z)\neq 0(j=0,1)$ 是整函数,$\sigma(A_j)<1$,a,b 是复常数且满足 $ab\neq 0$ 和 $a\neq b$,如果 $F(\neq 0)$ 是有限级整函数,则方程(3)的每个解 $f(\neq 0)$ 的级为无穷,至多除去 1 个例外的非零解.

引理 5[3] 假设 a,b 是复常数满足 $ab\neq 0$ 和 $\arg a\neq\arg b$ 或 $a=cb(0<c<1)$,定义指标集: $\Lambda_1=\{0,a\}$;$\Lambda_2=\{0,a,b,a+b,2a\}$.

(i) 如果 $H_j(j\in\Lambda_1)$ 和 H_b 都是级小于 1 的亚纯函数,$H_b(z)\neq 0$,令 $\psi_1(z)=\sum_{j\in\Lambda_1}H_j(z)e^{jz}$,则

$\psi_1(z)+H_b\mathrm{e}^{bz}\not\equiv 0$;

(ii) 如果 $H_j(j\in\Lambda_2)$ 和 H_{2b} 都是级小于 1 的亚纯函数,$H_{2b}(z)\not\equiv 0$,令 $\psi_2(z)=\sum\limits_{j\in\Lambda_2}H_j(z)\mathrm{e}^{jz}$,则 $\psi_2(z)+H_{2b}\mathrm{e}^{2bz}\not\equiv 0$;

(iii) 假设 $\psi_{20}(z),\psi_{21}(z),\psi_{22}(z)$ 具有(ii)中 $\psi_2(z)$ 的形式,$H_{2b}(z)\not\equiv 0$,$\varphi(z)$ 是有限级亚纯函数,则

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)}\psi_{22}(z)+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\psi_{21}(z)+\psi_{20}(z)+H_{2b}\mathrm{e}^{2bz}\not\equiv 0.$$

引理 6[11]　假设 $A(z),B_i(z)(i=0,1)$ 是整函数,$\sigma(A)<1$,$\sigma(B_i)<1$,且 $|a|\neq\max\{|b|,|d|\}$,则方程(2)的每个解 $f(\not\equiv 0)$ 的级为无穷.

注 2　从引理 6 的证明过程可以知道 $A(z)\not\equiv 0$,$B_i(z)\not\equiv 0(i=0,1)$ 且 $abd\neq 0$.

2　定理的证明

定理 1 的证明　假设 $f(\not\equiv 0)$ 是方程(1)的解,则 f 是整函数,由定理 A 可知 $\sigma(f)=\infty$. 令 $g_0(z)=f(z)-\varphi(z)$,则 $\sigma(g_0)=\sigma(f)=\infty$,再由定理 B 知 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(g_0)=\infty$,进一步有 $\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\overline{\lambda}_2(g_0)$. 将 $f=g_0+\varphi$ 代入(1)式,得到

$$g_0''+A_1\mathrm{e}^{az}g_0'+A_0\mathrm{e}^{bz}g_0=-\{\varphi''+A_1\mathrm{e}^{az}\varphi'+A_0\mathrm{e}^{bz}\varphi\}.\tag{6}$$

注意到(6)式可能存在有限级解,但这里可仅讨论满足 $g_0=f-\varphi$ 的无穷级解,所以只需对(6)式的无穷级整函数解 g_0 证明 $\overline{\lambda}_2(g_0)=\sigma_2(f)$ 成立.

由于方程(1)的所有非零解为无穷级而 $\varphi(z)$ 是有限级整函数,可知

$$X_0=\varphi''+A_1\mathrm{e}^{az}\varphi'+A_0\mathrm{e}^{bz}\varphi\not\equiv 0.$$

又因 $\sigma(X_0)<\sigma(g_0)=\infty$,$\sigma(A_0\mathrm{e}^{az})=\sigma(A_1\mathrm{e}^{bz})=1<\sigma(g_0)=\infty$,对方程(6)应用引理 2 有 $\overline{\lambda}_2(g_0)=\lambda_2(g_0)=\sigma_2(g_0)$,即 $\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)$.

进一步的情形,先证 $\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\sigma_2(f)$.

令 $g_1=f'-\varphi$,则 $\sigma(g_1)=\sigma(f')=\sigma(f)=\infty$,并且 $\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\overline{\lambda}_2(g_1)$.

对方程(1)两边进行微分,得到

$$f'''+A_1\mathrm{e}^{az}f''+[(A_1\mathrm{e}^{az})'+A_0\mathrm{e}^{bz}]f'+(A_0\mathrm{e}^{bz})'f=0.\tag{7}$$

由(1)式得到

$$f=-\frac{1}{A_0\mathrm{e}^{bz}}(f''+A_1\mathrm{e}^{az}f').\tag{8}$$

将(8)式代入(7)式得

$$f'''+\left(A_1\mathrm{e}^{az}-\frac{(A_0\mathrm{e}^{bz})'}{A_0\mathrm{e}^{bz}}\right)f''+\left[(A_1\mathrm{e}^{az})'+A_0\mathrm{e}^{bz}-\frac{(A_0\mathrm{e}^{bz})'}{A_0\mathrm{e}^{bz}}A_1\mathrm{e}^{az}\right]f'=0.\tag{9}$$

将 $f'=g_1+\varphi$,$f''=g_1'+\varphi'$,$f'''=g_1''+\varphi''$ 代入(9)式,得到

$$g_1''+h_1g_1'+h_0g_1=h,\tag{10}$$

其中 $h_1=A_1\mathrm{e}^{az}-(A_0\mathrm{e}^{bz})'/(A_0\mathrm{e}^{bz})$,$h_0=(A_1\mathrm{e}^{az})'+A_0\mathrm{e}^{bz}-(A_0\mathrm{e}^{bz})'A_1\mathrm{e}^{az}/(A_0\mathrm{e}^{bz})$,$-h=\varphi''+(A_1\mathrm{e}^{az}-(A_0\mathrm{e}^{bz})'/(A_0\mathrm{e}^{bz}))\varphi'+[(A_1\mathrm{e}^{az})'+A_0\mathrm{e}^{bz}-(A_0\mathrm{e}^{bz})'A_1\mathrm{e}^{az}/(A_0\mathrm{e}^{bz})]\varphi=\varphi''-(A_0'/A_0+b)\varphi'+[A_1\varphi'+A_1'\varphi+A_1a\varphi-(A_0'/A_0+b)A_1\varphi]\mathrm{e}^{az}+A_0\varphi\mathrm{e}^{bz}$.

现证明 $h\not\equiv 0$. 事实上,如果 $h\equiv 0$,则

$$\frac{\varphi''}{\varphi}-\left(\frac{A_0'}{A_0}+b\right)\frac{\varphi'}{\varphi}+\left[A_1\frac{\varphi'}{\varphi}+A_1'+A_1a-\left(\frac{A_0'}{A_0}+b\right)A_1\right]\mathrm{e}^{az}+A_0\mathrm{e}^{bz}=0,$$

由引理 3 可知 $A_0\equiv 0$,这与题设矛盾,所以 $h\not\equiv 0$.

因此,由引理 1 有 $\overline{\lambda}(g_1)=\lambda(g_1)=\sigma(g_1)=\infty$,即 $\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\infty$. 再由引理 2 有 $\overline{\lambda}_2(g_1)=\lambda_2(g_1)=\sigma_2(g_1)$,即 $\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\sigma_2(f)$.

下面再证 $\overline{\lambda}_2(f''-\varphi)=\sigma_2(f)$. 令 $g_2=f''-\varphi$,则 $\sigma(g_2)=\sigma(f'')=\sigma(f)=\infty$ 和 $\overline{\lambda}_2(f''-\varphi)=\overline{\lambda}_2(g_2)$. 微分(7)式的两边,得到

$$f^{(4)}+A_1\mathrm{e}^{az}f'''+[2(A_1\mathrm{e}^{az})'+A_0\mathrm{e}^{bz}]f''+[(A_1\mathrm{e}^{az})''+2(A_0\mathrm{e}^{bz})']f'+(A_0\mathrm{e}^{bz})''f=0.\tag{11}$$

将(8)式代入(11)式,并由(9)式得到

$$f^{(4)}+H_3f'''+H_2f''=0,\tag{12}$$

其中

$H_3=A_1\mathrm{e}^{az}-U_1/U_2$,$H_2=2(A_1\mathrm{e}^{az})'+A_0\mathrm{e}^{bz}-\dfrac{(A_0\mathrm{e}^{bz})''}{A_0\mathrm{e}^{bz}}-\dfrac{U_1}{U_2}\left[A_1\mathrm{e}^{az}-\dfrac{(A_0\mathrm{e}^{bz})'}{A_0\mathrm{e}^{bz}}\right]$,

$U_1=(A_1\mathrm{e}^{az})''+2(A_0\mathrm{e}^{bz})'-A_1\mathrm{e}^{az}(A_0\mathrm{e}^{bz})''/(A_0\mathrm{e}^{bz})$,

$U_2=(A_1\mathrm{e}^{az})'+A_0\mathrm{e}^{bz}-A_1\mathrm{e}^{az}(A_0\mathrm{e}^{bz})'/(A_0\mathrm{e}^{bz})$,

显然 H_3,H_2,U_1,U_2 都是亚纯函数,并且它们的级都小于或等于 1.

将 $f''=g_2+\varphi$,$f'''=g_2'+\varphi'$,$f^{(4)}=g_2''+\varphi''$ 代入(12)式,得到

$$g_2''+H_3g_2'+H_2g_2=-(\varphi''+H_3\varphi'+H_2\varphi).\tag{13}$$

记 $X=\varphi''+H_3\varphi'+H_2\varphi$,使用类似于上面的证明方法,可得 $X\not\equiv 0$.

因此,由引理 1 有 $\overline{\lambda}(g_2)=\sigma(g_2)=\infty$,即 $\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty$. 再由引理 2 有 $\overline{\lambda}_2(g_2)=\sigma_2(g_2)$,即 $\overline{\lambda}_2(f''-\varphi)=\sigma_2(f)$.

定理 2 的证明　假设 $f(\not\equiv 0)$ 是方程(3)的解,

则f是整函数,由引理4可知,至多除去1个例外的非零解,其他所有非零解满足$\sigma(f)=\infty$.令$g_3(z)=f(z)-\varphi(z)$,由$\sigma(\varphi)<\infty$知$\sigma(g_3)=\sigma(f)=\infty$,且有$\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(g_3)$和$\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\overline{\lambda}_2(g_3)$.将$f=g_3+\varphi$代入(3)式,得到

$$g_3''+A_1e^{az}g_3'+A_0e^{bz}g_3=F-\{\varphi''+A_1e^{az}\varphi'+A_0e^{bz}\varphi\}. \tag{14}$$

记$X_1=F-\{\varphi''+A_1e^{az}\varphi'+A_0e^{bz}\varphi\}=F-X_0$,显然$X_1\not\equiv 0$.若不然,则$\varphi$是方程(3)的解,故由引理4可知,至多除去1个例外的非零解$\varphi(z)$,其它所有的φ是无穷级,这与φ的假设矛盾.

对方程(14),由引理1可知$\overline{\lambda}(g_3)=\lambda(g_3)=\sigma(g_3)=\infty$,即$\overline{\lambda}(f-\varphi)=\infty$.

类似于定理1,由引理2有$\overline{\lambda}_2(g_3)=\sigma_2(g_3)$,即$\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)$.

下证进一步的结论.

先证$\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\infty$和$\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\sigma_2(f)$.令$g_4=f'-\varphi$,则$\sigma(g_4)=\sigma(f')=\sigma(f)=\infty$,$\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(g_4)$,$\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\overline{\lambda}_2(g_4)$.

对方程(3)两边进行微分,得到

$$f'''+A_1e^{az}f''+[(A_1e^{az})'+A_0e^{bz}]f'+(A_0e^{bz})'f=F'. \tag{15}$$

由方程(3)得到

$$f=-\frac{1}{A_0e^{bz}}(f''+A_1e^{az}f'-F), \tag{16}$$

将(16)式代入(15)式得

$$f'''+(A_1e^{az}-(A_0e^{bz})'/(A_0e^{bz}))f''+[(A_1e^{az})'+A_0e^{bz}-\frac{(A_0e^{bz})'}{A_0e^{bz}}A_1e^{az}]f'=F'-\frac{F}{A_0e^{bz}}. \tag{17}$$

将$f'=g_4+\varphi$,$f''=g_4'+\varphi'$,$f'''=g_4''+\varphi''$代入(17)式,得到$g_4''+h_1g_4'+h_0g_4=h_2$,其中

$h_1=A_1e^{az}-(A_0e^{bz})'/(A_0e^{bz})$,

$h_0=(A_1e^{az})'+A_0e^{bz}-(A_0e^{bz})'A_1e^{az}/(A_0e^{bz})$,

$-h_2=\varphi''-(A_0'/A_0+b)\varphi'+[A_1\varphi'+A_1'\varphi+A_1a\varphi-(A_0'/A_0+b)A_1\varphi]e^{az}+A_0\varphi e^{bz}-F'+F/A_0e^{bz}$.

现证明$h_2\not\equiv 0$.事实上,如果$h_2\equiv 0$,则

$$\frac{\varphi''}{\varphi}-(\frac{A_0'}{A_0}+b)\frac{\varphi'}{\varphi}+[A_1\frac{\varphi'}{\varphi}+A_1'+A_1a-(\frac{A_0'}{A_0}+b)A_1]e^{az}+A_0e^{bz}-\frac{F'}{\varphi}+\frac{F}{A_0e^{bz}\varphi}=0,$$

将上式两边乘以A_0e^{bz},得到

$$[A_0\frac{\varphi''}{\varphi}-(A_0'+A_0b)\frac{\varphi'}{\varphi}-\frac{F'}{\varphi}A_0]e^{bz}+[A_0A_1\frac{\varphi'}{\varphi}+A_0A_1'+A_0A_1a-(A_0'+A_0b)A_1]e^{(a+b)z}+A_0^2e^{2bz}-\frac{F'}{\varphi}A_0e^{bz}+\frac{F}{\varphi}=0.$$

因为$\sigma(A_j)<1(j=0,1)$,$\sigma(F)<1$,$\sigma(\varphi)<1$,由引理3有$A_0^2\equiv 0$,即$A_0\equiv 0$,与题设矛盾,故$h_2\not\equiv 0$.

因此,由引理1可得$\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(g_4)=\sigma(g_4)=\sigma(f)=\infty$.再由引理2有$\overline{\lambda}_2(g_4)=\sigma_2(g_4)$,即$\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\sigma_2(f)$.

下证$\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty$,$\overline{\lambda}_2(f''-\varphi)=\sigma_2(f)$.令$g_5=f''-\varphi$,则$\sigma(g_5)=\sigma(f'')=\sigma(f)=\infty$,$\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\overline{\lambda}(g_5)$以及$\overline{\lambda}_2(f''-\varphi)=\overline{\lambda}_2(g_5)$.

微分(15)式的两边,得到

$$f^{(4)}+A_1e^{az}f'''+[2(A_1e^{az})'+A_0e^{bz}]f''+[(A_1e^{az})''+2(A_0e^{bz})']f'+(A_0e^{bz})''f=F''. \tag{18}$$

将(16)式代入(18)式,并由(17)式得到

$$f^{(4)}+H_3f'''+H_2f''=H_1, \tag{19}$$

其中

$$H_3=A_1e^{az}-U_1/U_2,\ H_2=2(A_1e^{az})'+A_0e^{bz}-\frac{(A_0e^{bz})''}{A_0e^{bz}}-\frac{U_1}{U_2}[A_1e^{az}-\frac{(A_0e^{bz})'}{A_0e^{bz}}],$$

$$H_1=F''-\frac{U_1}{U_2}(F'-\frac{F}{A_0e^{bz}})-\frac{(A_0e^{bz})''}{A_0e^{bz}}F,$$

$$U_1=(A_1e^{az})''+2(A_0e^{bz})'-A_1e^{az}\frac{(A_0e^{bz})''}{A_0e^{bz}},$$

$$U_2=(A_1e^{az})'+A_0e^{bz}-A_1e^{az}\frac{(A_0e^{bz})'}{A_0e^{bz}},$$

显然H_3,H_2,H_1,U_1,U_2都是亚纯函数,且它们的级都小于或等于1.

将$f''=g_5+\varphi$,$f'''=g_5'+\varphi'$,$f^{(4)}=g_5''+\varphi''$代入(19)式,得到

$$g_5''+H_3g_5'+H_2g_5=H_1-(\varphi''+H_3\varphi'+H_2\varphi).$$

记$X_2=H_1-(\varphi''+H_3\varphi'+H_2\varphi)$,使用类似于上面的证明方法,可得$X_2\not\equiv 0$.

由引理1可知$\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\overline{\lambda}(g_5)=\sigma(g_5)=\sigma(f)=\infty$.再由引理2有$\overline{\lambda}_2(g_5)=\sigma_2(g_5)$,即$\overline{\lambda}_2(f''-\varphi)=\sigma_2(f)$.

所以方程(2)的每个非零解f满足$\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty$,并且$\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\overline{\lambda}_2(f''-\varphi)=\sigma_2(f)$,至多除去1个例外的非零解.

定理3的证明 假设$f(\not\equiv 0)$是方程(1)的解,则f是整函数,由定理A可知$\sigma(f)=\infty$.又由定理C

知 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty$，再由定理 3 的条件满足定理 1 的条件，所以有 $\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)$.

现证 $\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\sigma_2(f)$. 令 $g_1=f'-\varphi$，同定理 1，有(7)～(10)式成立.

现证明 $h\not\equiv 0$. 事实上，如果 $h\equiv 0$，则

$$\varphi''/\varphi-(A_0'/A_0+b)\varphi'/\varphi+[A_1\varphi'/\varphi+A_1'+A_1a-(A_0'/A_0+b)A_1]e^{az}+A_0e^{bz}=0.$$

由引理 5 中(iii)，可得

$$\varphi''/\varphi-(A_0'/A_0+b)\varphi'/\varphi+[A_1\varphi'/\varphi+A_1'+A_1a-(A_0'/A_0+b)A_1]e^{az}+A_0e^{bz}\not\equiv 0.$$

这个矛盾表明 $h\not\equiv 0$.

类似于定理 1，由引理 2 有 $\overline{\lambda}_2(g_1)=\lambda_2(g_1)=\sigma_2(g_1)$，即 $\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\sigma_2(f)$.

下面证明 $\overline{\lambda}_2(f''-\varphi)=\sigma_2(f)$. 令 $g_2=f''-\varphi$，同定理 1 有(11)～(13)式成立.

记 $X=\varphi''+H_3\varphi'+H_2\varphi$，使用类似于上面的证明方法，可得 $X\not\equiv 0$.

因此，由引理 2 有 $\overline{\lambda}_2(g_2)=\sigma_2(g_2)$，即

$$\overline{\lambda}_2(f''-\varphi)=\sigma_2(f).$$

定理 4 的证明　假设 $f(\not\equiv 0)$ 是方程(2)的解，则 f 是整函数，由引理 6 可知 $\sigma(f)=\infty$. 令 $g_0(z)=f(z)-\varphi(z)$，则 $\sigma(g_0)=\sigma(f)=\infty$，再由定理 D 可知 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty$，还有 $\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\overline{\lambda}_2(g_0)$.

将 $f=g_0+\varphi$ 代入(2)式，得到

$$g_0''+Ae^{az}g_0'+(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})g_0=-[\varphi''+Ae^{az}\varphi'+(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})\varphi]. \tag{20}$$

注意到(20)式可能存在有限级解，但这里仅需讨论满足 $g_0=f-\varphi$ 的无穷级解，所以只需对(20)式的无穷级整函数解 g_0 证明 $\overline{\lambda}_2(g_0)=\sigma_2(f)$ 即可.

由于方程(2)的所有非零解具有无穷级而 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是有限级整函数，可知

$$X_0=\varphi''+Ae^{az}\varphi'+(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})\varphi\not\equiv 0,$$

从而，由引理 2 可得 $\overline{\lambda}_2(g_0)=\sigma_2(g_0)$，即

$$\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\sigma_2(f).$$

现证 $\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\sigma_2(f)$，令 $g_1=f'-\varphi$，则 $\sigma(g_1)=\sigma(f')=\sigma(f)=\infty$ 和 $\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\overline{\lambda}_2(g_1)$.

对方程(2)两边进行微分，得到

$$f'''+Ae^{az}f''+[(Ae^{az})'+(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})]f'+(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})'f=0. \tag{21}$$

由方程(2)有

$$f=-\frac{1}{B_0e^{bz}+B_1e^{dz}}(f''+Ae^{az}f'). \tag{22}$$

将(22)式代入(21)式得

$$f'''+\left[Ae^{az}-\frac{(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})'}{B_0e^{bz}+B_1e^{dz}}\right]f''+\left[(Ae^{az})'+(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})-\frac{(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})'}{B_0e^{bz}+B_1e^{dz}}Ae^{az}\right]f'=0. \tag{23}$$

将 $f'=g_1+\varphi$，$f''=g_1'+\varphi'$，$f'''=g_1''+\varphi''$ 代入(23)式，得到 $g_1''+h_1g_1'+h_0g_1=h$，其中

$$h_1=Ae^{az}-(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})'/(B_0e^{bz}+B_1e^{dz}),$$

$$h_0=(Ae^{az})'+(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})-(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})'Ae^{az}/(B_0e^{bz}+B_1e^{dz}),$$

$$-h=\varphi''+[Ae^{az}-((B_0'+B_0b)e^{bz}+(B_1'+B_1d)e^{dz})/(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})]\varphi'+[(A'+Aa)e^{az}+(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})-((B_0'+B_0b)e^{bz}+(B_1'+B_1d)e^{dz})Ae^{az}/(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})]\varphi.$$

现证明 $h\not\equiv 0$. 事实上，如果 $h\equiv 0$，则

$$\left[B_0\frac{\varphi''}{\varphi}-(B_0'+B_0b)\frac{\varphi'}{\varphi}\right]e^{bz}+\left[B_1\frac{\varphi''}{\varphi}-(B_1'+B_1d)\frac{\varphi'}{\varphi}\right]e^{dz}+\left[AB_0\frac{\varphi'}{\varphi}-A(B_0'+B_0b)+B_0(A'+Aa)\right]e^{(a+b)z}+\left[AB_1\frac{\varphi'}{\varphi}-A(B_1'+B_1d)+B_1(A'+Aa)\right]e^{(a+d)z}+B_0^2e^{2bz}+B_1^2e^{2dz}+2B_0B_1e^{(b+d)z}=0. \tag{24}$$

下面分 2 种情形讨论:

情形 1　当 $b=d$ 时，由条件 $|a|\neq\max\{|b|,|d|\}$ 知 $a\neq b$，则(24)式可写成

$$\left[(B_0+B_1)\frac{\varphi''}{\varphi}-(B_0'+B_1'+(B_0+B_2)b)\frac{\varphi'}{\varphi}\right]e^{bz}+\left\{A(B_0+B_1)\frac{\varphi'}{\varphi}-A[B_0'+B_1'+(B_0+B_1)b]+(B_0+B_1)(A'+Aa)\right\}e^{(a+b)z}+(B_0+B_1)^2e^{2bz}=0.$$

由于 A,B_0,B_1,φ 的增长级都小于 1，由引理 3 可知 $(B_0+B_1)^2\equiv 0$，这与题设矛盾.

情形 2　当 $b\neq d$ 时，由条件 $(a-b)(a-d)\neq 0$ 知 $a\neq b$ 且 $a\neq d$，再对(24)式应用引理 3 得 $2B_0B_1\equiv 0$，这也与题设矛盾.

综合 2 种情形可知 $h\not\equiv 0$. 因此，由引理 2 可得 $\overline{\lambda}_2(g_1)=\sigma_2(g_1)$，即 $\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\sigma_2(f)$.

下面证明 $\overline{\lambda}_2(f''-\varphi)=\sigma_2(f)$.

令 $g_2=f''-\varphi$，则 $\sigma(g_2)=\sigma(f'')=\sigma(f)=\infty$ 和 $\overline{\lambda}_2(f''-\varphi)=\overline{\lambda}_2(g_2)$.

微分(21)式，可得

$$f^{(4)}+A_1e^{az}f'''+[2(A_1e^{az})'+(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})]f''+[(A_1e^{az})''+2(B_0e^{bz}+$$

$B_1 e^{dz})] f' + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})'' f = 0.$ (25)

将(22)式代入(25)式,并由(23)式得到

$$f^{(4)} + H_3 f''' + H_2 f'' = 0, \tag{26}$$

其中

$H_3 = Ae^{az} - U_1/U_2$,$H_2 = 2(Ae^{az})' + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}) - \dfrac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})''}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}} - \dfrac{U_1}{U_2} h_1$,$U_1 = (Ae^{az})'' + 2(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})' - Ae^{az} \dfrac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})''}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}}$,

$U_2 = (Ae^{az})' + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}) - Ae^{az} \dfrac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})'}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}}$.

显然 H_3, H_2, U_1, U_2 都是亚纯函数,且它们的增长级都小于或等于 1.

将 $f'' = g_2 + \varphi$,$f''' = g_2' + \varphi'$,$f^{(4)} = g_2'' + \varphi''$ 代入(26)式,得到

$$g_2'' + H_3 g_2' + H_2 g_2 = -(\varphi'' + H_3 \varphi' + H_2 \varphi).$$

使用类似于上面的证明方法,可得 $X_1 = \varphi'' + H_3 \varphi' + H_2 \varphi \not\equiv 0$. 因此,由引理 2 可得 $\overline{\lambda}_2(g_2) = \sigma_2(g_2)$,即 $\overline{\lambda}_2(f'' - \varphi) = \sigma_2(f)$.

定理 5 的证明 由引理 6,用类似于定理 2,定理 3 及定理 4 的证明方法可证得定理 5 也成立.

3 参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press,1964.

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社,1982.

[3] 陈宗煊,孙光镐. 一类二阶微分方程的解和小函数的关系 [J]. 数学年刊: A 辑,2006,27(4): 431-442.

[4] 陈裕先,陈宗煊. 微分方程的解与小函数的关系 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2002,26(1):15-20.

[5] 程涛,陈宗煊. 非齐次线性微分方程解取小函数的点的收敛指数 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2002,26(1):21-27.

[6] 刘慧芳. 齐次线性微分方程解取小函数的点的收敛指数 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2003,27(2):118-121.

[7] 陈宗煊. 微分方程 $f'' + e^{-z} f' + Q(z) f = 0$ 解的增长性 [J]. 中国科学: A 辑,2001,31(9):775-785.

[8] 安蕾,肖丽鹏. 一类 2 阶微分方程的解和小函数的关系 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2013,37(3):233-235.

[9] Chen Zongxuan. Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations [J]. Analysis,1994,14(4):425-438.

[10] Yang Congjun,Yi Hongxun. Uniqueness theory of meromorphic functions [M]. New York: Kluwer Academic Publishers,2003.

[11] Cheng Tao,Kang Yueming. The growth of the solutions of a certain linear differential equation [J]. Journal of Fudan University,2006,45(5):611-618.

The Relations between Solutions of Second Order Linear Differential Equations with Functions of Small Growth

MIN Xiao-hua,ZHANG Hong-xia,YI Cai-feng*

(College of Mathematic and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: It was investigated that the relations between solutions of second order linear differential equations and their 1th and 2 th derivatives with the small growth functions by using the theory and the method of Nevanlinna value distribution. The precision result was obtained that convergence exponents of various points of equation solutions and their derivatives fetch the small growth function is infinite and the 2th convergence exponents with the hyper order of solution is equal.

Key words: differential equation; entire function; hyper-order; 2th exponents of convergence

(责任编辑: 王金莲)