文章编号:1000-5862(2015)01-0046-04

Ding 投射模和强 Ding 投射模

焦天明,杨晓燕*
(西北师范大学数学与统计学院,甘肃 兰州　730070)

摘要: 给出了 Ding 投射模是强 Ding 投射模的条件,证明了 $\forall\ i = 1,2,\cdots,m$,若 D-gldim$(R_i) < \infty$,则 $S_{DP}(\prod_{i=1}^{m} R_i) = D_P(\prod_{i=1}^{m} R_i)$ 当且仅当 $\forall\ i, S_{DP}(R_i) = D_P(R_i)$,其中 $D_P(R)$ 和 $S_{DP}(R)$ 分别表示 Ding 投射 R-模类和强 Ding 投射 R-模类.

关键词: Ding 投射模; 强 Ding 投射模; n-强 Ding 投射模
中图分类号: O 153.3　**文献标志码:** A　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.01.08

0　引言及准备知识

本文中的环均指有单位元的交换环,模均指酉模,2008 年,Mao Lixin 等[1] 定义了 Gorenstein FP-内射模,给出了凝聚环上 Gorenstein FP-内射模的等价刻画. 2009 年,Mao Lixin 等[2] 定义了强 Gorenstein 平坦模,并对它的一些性质做了详细讨论. 由于 Ding Nanqing 等引入了强 Gorenstein 平坦模和 Gorenstein FP-内射模的概念,J. Gillespie[3] 将这 2 类模重新定义为 Ding 投射模和 Ding 内射模. 随后许多学者对 Ding 投射模和 Ding 内射模做了深入研究. 众所周知,有以下包含关系: 投射模是强 Ding 投射模,强 Ding 投射模是 Ding 投射模. 许多事实已经说明,反过来的包含关系不一定成立. 本文讨论了第 2 个反过来的包含关系成立的条件,即所有 Ding 投射模类是强 Ding 投射模类的情形.

在 Gorenstein 整体维数有限的前提下,文献[4] 研究了 Gorenstein 投射模类和强 Gorenstein 投射模类相一致的情况,证明了对 $i = 1,2,\cdots,m$,若 G-gldim$(R_i) < \infty$,则 $S_{DP}(\prod_{i=1}^{m} R_i) = D_P(\prod_{i=1}^{m} R_i)$ 当且仅当 $\forall\ i, S_{GP}(R_i) = G_P(R_i)$. 对 Ding 投射模类,本文也得到了类似的结论. 为了方便,用 $p_R(M)$、$i_R(M)$ 和 $f_R(M)$ 分别表示 R-模 M 的投射维数、内射维数和平坦维数,$D_{pR}(M)$ 表示 R-模 M 的 Ding 投射维数. $P(R)$ 和 $D_I(R)$ 分别表示投射 R-模类和 Ding 内射 R-模类,关于没有说明的概念和记号参见文献[1,5].

定义 1[2]　称 R-模 M 是 Ding 投射模,如果存在正合列 $\mathscr{P}: \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots$,使得以下 3 条成立:

(i) $M \cong \mathrm{Ker}(P_0 \to P^0)$;

(ii) 所有的 P_i 和 P^i 都是投射的;

(iii) 对任意平坦 R-模 F,$\mathrm{Hom}_R(\mathscr{P},F)$ 是正合的.

此时称 $\mathscr{P}$ 是 R-模 M 的完全投射分解.

定义 2[5]　称 R-模 M 是强 Ding 投射模,如果存在如下形式的完全投射分解

$$\mathscr{P}: \cdots \to P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \to \cdots$$

使得 $M \cong \mathrm{Ker} f$.

定义 3　称 R-模 M 是 n-强 Ding 投射模,如果存在 R-模的正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} P_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0,$$

其中每个 P_i 是投射模,并且对任意平坦 R-模 F,函子 $\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 仍保持上述序列的正合性.

显然,1-强 Ding 投射模就是上面定义的强 Ding 投射模. 记所有 n-强Ding 投射模构成的类为 n-$S_{DP}(R)$.

定义 4[6]　设 X 是 1 个模类,称 X 为投射可解的,如果 $P(R) \subseteq X$ 且对任意 R-模短正合列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$,其中 $M'' \in X$,都有 $M' \in X$ 当且仅当 $M \in X$.

记 $D_{pR}(M) = \inf\{n \mid$ 存在正合列 $0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0$,其中每个 $G_i \in D_P(R)\}$,称

收稿日期:2014-10-25
基金项目:国家自然科学基金(11361051,11461060)资助项目.
通信作者:杨晓燕(1980-),女,甘肃张掖人,副教授,博士,主要从事同调代数的研究.

之为 M 的 Ding 投射维数. M 的 Ding 内射维数可类似定义. 记 $\text{D-gldim}(R) = \sup\{D_{pR}(M) \mid M \in {}_R\mathscr{M}\}$,称之为环 R 的 Ding 整体维数.

引理 1[7]　对任意的环 R,

$$\text{D-gldim}(R) = \text{G-gldim}(R).$$

注 1　对偶地,有 Ding 内射模、强 Ding 内射模和 n-强 Ding 内射模的概念,在此只讨论关于投射情形.

1　主要结果

命题 1　设 n 是正整数,则每个强 Ding 投射模是 n-强 Ding 投射模.

证　设 M 是强 Ding 投射模,则存在短正合列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$,其中 P 是投射模,且对任意的平坦 R-模 F 和正整数 i,有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,F) = 0$. 因此,得到正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} P \xrightarrow{fg} \cdots \xrightarrow{fg} P \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0,$$

使得对任意的平坦 R-模 F,$\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 保持上述序列的正合性. 故 M 是 n-强 Ding 投射模.

命题 2　对任意 $D_{pR}(M) = n(n \geqslant 1)$ 的模 M,存在正合序列 $0 \to T \to N \to M \to 0$,其中 $p_R(T) = n-1$,且 $N \in D_P(R)$.

证　由条件存在正合列 $0 \to K' \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$,其中每个 $P_i \in P(R)$,$K' \in D_P(R)$. 因此,存在正合列 $0 \to K' \to Q^0 \to \cdots Q^{n-1} \to G \to 0$,且函子 $\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 仍保持上述序列的正合性,其中每个 $Q^i \in P(R)$,$G \in D_P(R)$. 故有行正合交换图(见图 1).

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & K' & \to & Q^0 & \xrightarrow{\tau_0} & Q^1 & \xrightarrow{\tau_1} & \cdots & \xrightarrow{\tau_{n-2}} & Q^{n-1} & \xrightarrow{\tau_{n-1}} & G & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow \lambda_0 & & \downarrow \lambda_1 & & & & \downarrow \lambda_{n-1} & & \downarrow \lambda & & \\
0 & \to & K' & \to & P_{n-1} & \xrightarrow{\sigma_{n-1}} & P_{n-2} & \xrightarrow{\sigma_{n-2}} & \cdots & \xrightarrow{\sigma_1} & P_0 & \xrightarrow{\sigma_0} & M & \to & 0
\end{array}$$

图 1　行正合交换图

进而有正合列

$$\mathscr{C}: 0 \to Q^0 \to Q^1 \oplus P_{n-1} \to Q^2 \oplus P_{n-2} \to \cdots \to Q^{n-1} \oplus P_1 \to P_0 \oplus G \to M \to 0.$$

设 $K = \mathrm{Ker}(P_0 \oplus G \to M)$,则 $0 \to K \to P_0 \oplus G \to M \to 0$ 正合,其中 $P_0 \oplus G \in D_P(R)$,$p_R(K) \leqslant n-1$. 又因为 $D_{pR}(M) = n$,所以 $p_R(K) = n-1$.

命题 3　设 M 的投射维数为 n,则

$$D_{pR}(M) = p_R(M) = n.$$

证　因为 $P(R) \subseteq D_P(R)$,所以 $D_{pR}(M) \leqslant p_R(M) < n$. 下证 $p_R(M) \leqslant D_{pR}(M)$. 首先当 $n = 0$ 时,即 $M \in D_P(R)$,存在正合序列 $0 \to M \to P \to M' \to 0$,其中 $M' \in D_P(R)$,$P \in P(R)$. 因为 $p_R(M)$ 是有限的,$\mathrm{Ext}_R^1(M',M) = 0$,所以 M 是 P 的直和项,从而 $M \in P(R)$. 当 $n > 0$ 时,根据命题 2,有正合列 $0 \to K \to G \to M \to 0$,其中 $p_R(K) = n-1$,$G \in D_P(R)$,对 G 而言,存在正合列 $0 \to G \to P \to G' \to 0$,其中 $P \in P(R)$,$G' \in D_P(R)$. 考虑交换图如图 2 所示.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & K & \to & G & \to & M & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & K & \to & P & \to & W & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & G' & = & G' & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

图 2　交换图

因为 $P \in P(R)$,$p_R(K) = n-1$,所以有 $p_R(W) < n$. 又因为 $G' \in D_P(R)$,$\mathrm{Ext}_R^1(G',M) = 0$,所以 $W \cong M \oplus G'$,即 $p_R(M) \leqslant p_R(W) \leqslant n$.

引理 2　设 M 是 n-强 Ding 投射模,P 和 Q 是投射模. 则存在同态 $\gamma: P \to Q \oplus Q$ 使得图 3 交换.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & M & \xrightarrow{\alpha} & P & \xrightarrow{\beta} & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow \mu & & \downarrow \gamma & & \downarrow \mu & & \\
0 & \to & Q & \xrightarrow{\xi} & Q \oplus Q & \xrightarrow{\pi} & Q & \to & 0
\end{array}$$

图 3　交换图

证　对正合列 $0 \to M \to P \to M \to 0$,运用函子 $\mathrm{Hom}_R(-,Q)$[8],其中 Q 是投射的,得正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,Q) \to \mathrm{Hom}_R(P,Q) \to \mathrm{Hom}_R(M,Q) \to \mathrm{Ext}_R^1(M,Q) = 0,$$

所以 $\forall \mu \in \mathrm{Hom}_R(M,Q)$,存在同态 $\upsilon \in \mathrm{Hom}_R(P,Q)$,使得 $\upsilon\alpha = \mu$,定义同态 $\gamma: P \to Q \oplus Q$,$\gamma(p) = (\upsilon(p), \mu\beta(p))$,其中 $p \in P$,则 γ 是所需的同态.

定理 1　设 R 是环,则以下条件等价:

(i) 每个 Ding 投射模是强 Ding 投射模;

(ii) 对任意 $D_{pR}(M) \leqslant 1$ 的 R-模 M,存在正合序列 $0 \to M \to X \to M \to 0$,其中 $p_R(X) \leqslant 1$.

证　(i)$\Rightarrow$(ii) 对 $D_{pR}(M) \leqslant 1$ 的 R-模 M,存在正合序列 $0 \to G \to Q \to M \to 0$,其中 Q 是投射的 R-模,G 是 Ding 投射模,由(i) 知 G 是强 Ding 投射模. 由引理 2 知,对于投射模 Q,存在同态 $\gamma: P \to Q \oplus Q$,使得图 4 可换.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & G & \xrightarrow{\alpha} & P & \xrightarrow{\beta} & G & \to & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \\
0 & \to & Q & \xrightarrow{\xi} & Q\oplus Q & \xrightarrow{\pi} & Q & \to & 0
\end{array}$$

图4 交换图

利用蛇引理可得

$0\to \mathrm{Ker}\,\mu\to \mathrm{Ker}\,\gamma\to \mathrm{Ker}\,\mu\to \mathrm{coKer}\,\mu\to$
$\mathrm{coKer}\,\gamma\to \mathrm{coKer}\,\mu\to 0.$

因为 $M\cong \mathrm{coKer}(G\to Q)$，所以有短正合列

$$0\to M\to Q\oplus Q/P\to M\to 0,$$

记 $(Q\oplus Q)/P$ 为 X. 因为 $Q\oplus Q$ 和 P 都是投射模，所以 $p_R(X)\leqslant 1$.

(ii)⇒(i) 设 M 是 Ding 投射模. 由条件(ii)，存在短正合列 $0\to M\to Q\to M\to 0$，其中 $p_R(Q)\leqslant 1$. 因为 $D_P(R)$ 是投射可解类，所以 Q 是 Ding 投射模，由命题3知，Q 是投射模. 因此 M 是强 Ding 投射模.

定理2 设 R 是交换环. 若 D-gldim$(R)\leqslant 1$，则每个 Ding 投射模是强 Ding 投射模当且仅当每个 Ding 内射模是强 Ding 内射模.

证 必要性 设 M 是 Ding 内射模. 下证 M 是强 Ding 内射模. 因为 $D_{pR}(M)\leqslant 1$，由定理1知，有短正合列 $0\to M\to Q\to M\to 0$，其中 $p_R(Q)\leqslant 1$. 由文献[9]知，$i_R(Q)\leqslant 1$. 另一方面，因为 $D_I(R)$ 是内射可解类，所以 $Q\in D_I(R)$，利用命题3关于内射的情形得 $M\in S_{DI}(R)$.

充分性的证明思路是类似的.

定理3 设$\{R_i\}$是环簇，若 D-gldim$(R_i)<\infty$，$i=1,2,\cdots,m$，则 $S_{DP}(\prod_{i=1}^{m}R_i)=D_P(\prod_{i=1}^{m}R_i)$ 当且仅当 $\forall i=1,2,\cdots,m$，$S_{DP}(R_i)=D_P(R_i)$.

证 必要性 对 m 用数学归纳法. 当 $m=2$ 时，设 M 是 Ding 投射的 R_1-模. 则存在1个强 Ding 投射 R_1-模 N，使得 M 是 N 的直和因子. 对 N 而言，存在 R_1-模上的短正合列 $0\to N\to P\to N\to 0$，其中 P 是投射 R_1-模. 由文献[10]知，有 $R_1\times R_2$-模上的短正合列 $0\to N\times 0\to P\times 0\to N\times 0\to 0$，其中 $P\times 0$ 是投射 $R_1\times R_2$-模. 由 D-gldim$(R_i)<\infty\ (i=1,2)$ 和引理1，D-gldim$(R_1\times R_2)$ = G-gldim$(R_1\times R_2)<\infty$. 由文献[11]知，D-gldim$(R_1\times R_2)<\infty$，所以对 $R_1\times R_2$ 上的任意投射模 Q，存在正整数 n，使得 $\mathrm{Ext}^{n+1}_{R_1\times R_2}(N\times 0,Q)=0$. 利用维数转移，对任意正整数 i，$\mathrm{Ext}^{i}_{R_1\times R_2}(N\times 0,Q)=0$，即 $N\times 0$ 是强 Ding 投射 $R_1\times R_2$-模. 而 $M\times 0$ 作为 $N\times 0$ 的直和项，因此 $M\times 0$ 是 Ding 投射的 $R_1\times R_2$-模，由前提条件，$M\times 0$ 是 $R_1\times R_2$ 上的强 Ding 投射模. 故有 $R_1\times R_2$ 上的短正合列 $0\to M\times 0\to P\to M\times 0\to 0$，其中 P 是投射 $R_1\times R_2$-模. 用函子 $-\otimes_{R_1\times R_2}R_1$ 作用上述正合列得(视 R_1 是投射 $R_1\times R_2$-模，故 ${}_{R_1\times R_2}R_1$ 是平坦模)正合列

$0\to(M\times 0)\otimes_{R_1\times R_2}R_1\to P\otimes_{R_1\times R_2}R_1\to$
$(M\times 0)\otimes_{R_1\times R_2}R_1\to 0.$

因为 $R_1\cong R_1\times R_2/0\times R_2$，所以有 R-模同构

$(M\times 0)\otimes_{R_1\times R_2}R_1\cong(M\times 0)\otimes_{R_1\times R_2}(R_1\times R_2)/$
$(0\times R_2)\cong M\times 0\cong M.$

这样有 R_1-模上的短正合列 $0\to M\to P\otimes_{R_1\times R_2}R_1\to M\to 0$，其中 $P\otimes_{R_1\times R_2}R_1$ 是投射 R_1-模. 这说明 M 是强 Ding 投射模. 同理可证

$$S_{DP}(R_2)=D_P(R_2). \qquad (1)$$

假设结论对于 $n=m-1$ 成立，当 $n=m$ 时，若

$S_{DP}(R_1\times R_2\times\cdots\times R_{m-1}\times R_m)=$
$D_P(R_1\times R_2\times\cdots\times R_{m-1}\times R_m)$

成立，即 $S_{DP}[(R_1\times R_2\times\cdots R_{m-1})\times R_m]=D_P[(R_1\times R_2\times\cdots R_{m-1})\times R_m]$，由归纳假设 $S_{DP}(R_i)=D_P(R_i)\ (i=1,2,\cdots,m-1)$ 成立，类似(1)式的证明得 $S_{DP}(R_m)=D_P(R_m)$. 所以结论对任意的正整数 m 都是成立的.

充分性 假设 $S_{DP}(R_1\times R_2)=D_P(R_1\times R_2)$，$i=1,2$. 设 M 是 Ding 投射 $R_1\times R_2$-模. 由文献[10]和利用张量积的性质知，有 $R_1\times R_2$-模上的同态 $M\cong M\otimes_{R_1\times R_2}R_1\times R_2\cong M\otimes_{R_1\times R_2}(R_1\times 0\oplus 0\times R_2)\cong M_1\times M_2$，其中 $M_i=M\otimes_{R_1\times R_2}R_i$，$i=1,2$. 由文献[11]知，${}_{R_1\times R_2}R_i$ 是 $R_1\times R_2$ 上的投射模$(i=1,2)$. 由文献[11]得 M_i 是 Ding 投射 $R_1\times R_2$-模. 由已知条件知 M_i 是强 Ding 投射的 R_i-模$(i=1,2)$. 另一方面，利用文献[9]，$R_i\ (i=1,2)$ 上的投射模存在有限的内射维数. 再利用文献[11-12]可知，$M=M_1\times M_2$ 是强 Ding 投射 $R_1\times R_2$-模. 这样就证明了

$$S_{DP}(R_1\times R_2)=D_P(R_1\times R_2). \qquad (2)$$

假设结论对于 $n=m-1$ 成立，当 $n=m$ 时，$\forall\ i=1,2,\cdots,m-1$，如果 $S_{DP}(R_i)=D_P(R_i)$，由归纳假设知，

$S_{DP}(R_1\times R_2\times\cdots\times R_{m-1})=D_P(R_1\times R_2\times\cdots\times R_{m-1})$

成立，类似上述(2)式的证明可得

$S_{DP}[(R_1\times R_2\times\cdots R_{m-1})\times R_m]=$
$D_P[(R_1\times R_2\times\cdots R_{m-1})\times R_m].$

故 $S_{DP}(\prod_{i=1}^{m}R_i)=D_P(\prod_{i=1}^{m}R_i)$ 对任意的正整数 m 都成立.

2 参考文献

[1] Mao Lixin,Ding Nanqing. Gorenstein FP injective and Gorenstein flat modules [J]. Journal of Algebra and Its Applications,2008,7(4):491-506.

[2] Ding Nanqing,Li Yuanlin,Mao Lixin. Strongly Gorenstein flat modules [J]. Journal of the Australian Mathematical Society,2009,86(3):323-338.

[3] Gillesple J. Module structures on modules over Ding-Chen rings [J]. Homology,Homotopy and Applications,2010,12(1):61-73.

[4] Mahdou N,Mohammed T. When every Gorenstein projective(resp. flat) modules is strongly Gorenstein projective (resp. flat) modules [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics,2010,1(1):15-25.

[5] Anderson F W,Fuller K R. Rings and Categories of Modules [M]. New York: Spring-Verlag,1992.

[6] Holm H. Gorenstein homological dimensions [J]. Journal of Pure and Applied Algebra,2004,189(1):167-194.

[7] Mahdou N,Mohammed T. Strongly Gorenstein flat modules and dimensions [J]. Chinese Annals of Mathematics-Series B,2011,32(4):533-548.

[8] 王聪,黄福生. 拟内射半模与伪内射半模 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2012,36(2):155-159.

[9] Bennis D,Mahdou N. Global Gorenstein dimensions [J]. Proceedings of the American Mathematical Society,2009,138 (2):461-465.

[10] Berrick A J,Keating M E. An introduction to rings and modules [M]. Cambridge: Cambridge University Press,2000.

[11] Bennis D,Mahdou N. Global Gorenstein dimensions of polynomial rings and direct products of rings [J]. Houston Journal of Mathematics,2009,35 (4):1019-1028.

[12] 刘妍平. 一类特殊的 Ding-模及其性质 [D]. 兰州: 西北师范大学,2013.

The Ding Projective Modules and Strongly Ding Projective Modules

JIAO Tianming,YANG Xiaoyan*

(College of Mathematics and Statistics,Northwest Normal University,Lanzhou Gansu 730070,China)

Abstract: The conditions that the class of every Ding projective modules is strongly Ding projective modules are given. It is proved that if D-gldim$(R_i) < \infty$, $i = 1, 2, \cdots, m$, then $S_{DP}(\prod_{i=1}^{m} R_i) = D_P(\prod_{i=1}^{m} R_i)$ if and only if $S_{DP}(R_i) = D_P(R_i)$ for each i, where $D_P(R)$ and $S_{DP}(R)$ denote the classes of Ding projective R-modules classes and strongly Ding projective R-modules classes respectively.

Key words: Ding projective module; strongly Ding projective module; n-strongly Ding projective module

(责任编辑: 曾剑锋)