

文章编号: 1000-5862(2015)02-0132-06

认知评估中的属性关系

杨淑群

(福建师范大学软件学院 福建 福州 350007)

摘要: 规则空间模型(RSM)及属性层级方法(AHM)是有较大影响力的认知诊断模型. 在RSM与AHM中不可缺少属性及属性层级关系. 属性层级关系为属性间的先决关系所诱导. 但是, 先决关系只考虑了属性之间的关系, 却忽略了属性集之间存在的联系. 该研究以先决关系为切入点, 实例证明先决关系及其诱导的属性层级关系具有局限性. 基于属性集, 提出更具一般性的蕴含关系, 使先决关系为其特殊形式, 为当前认知诊断理论研究提供了新的研究角度.

关键词: 认知评估; 属性; 先决关系; 属性层级关系; 蕴含关系

中图分类号: B 841.7; TP 301.6 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.02.04

0 Q 矩阵中的属性及其层级关系

认知诊断评估的任务是诊断被试的知识状态, 揭示其认知长处和不足, 并对不足进行补救. 认知诊断需要根据需求编制一些项目, 以探查被试不可直接观察的属性掌握情况. 正如医生诊断病人病情, 需要做一系列的病理检查, 根据检查结果判断出病人的病症. 认知诊断以属性(attribute)表示测验项目的特征. 属性是正确解决特定项目时所需要的认知加工和技能^[1], 其功能类似各类病理检查, 需要诊断被试掌握了哪些属性. 假设诊断评估范围内具有 K 个属性、 n 个项目, 若项目 j 中出现属性 i , 则称属性 i 和项目 j 有关系 r , 表达了属性和项目之间的关联关系. 其对应的关系矩阵记为 Q , 称为属性与项目的关联阵(incidence matrix). Q 矩阵为 0-1 矩阵 $Q = (q_{ij})$, 给定 $K \times n$ 关联矩阵, A_k 为第 k 个属性, A_{kj} 为第 k 行第 j 列元素. 若第 j 个项目含有属性 A_k , 则 $q_{kj} = 1$, 反之 $q_{kj} = 0$.

认知诊断模型用来估计被试的知识状态, 即诊断检测被试的属性掌握模式. 根据被试的知识状态进行分类. 2007 年有人统计, 认知诊断模型有 60 多种^[2]. K. K. Tatsuo^[3] 提出的规则空间模型(Rule Space Model, RSM)是最具影响力的模型之一, 是 GRE、SAT 及 PSAT 等考试报告与分析的参考模型. RSM 分为 2 大部分: Q 矩阵理论和判别分类. Q 矩阵理论将被试属性掌握模式转化为被试在既不猜测也不失误情况

下的理想项目反应模式, 建立不可观察的属性掌握模式与可观察的项目反应模式的对应, 从而对观察反应模式进行判别, 以达到认知诊断的目的. 认知诊断模型在认知诊断中的重要性是不言而喻的. Q 矩阵对于大多数认知诊断模型也是不可或缺. AHM^[1]、DINA、NIDA(noisy input deterministic “and” gate model)、FUSION 与 LLTM 等模型都要求必须有 Q 矩阵. A. A. Rupp 等^[4] 认为认知诊断模型就是项目反应模型加上 Q 矩阵, 由此可见 Q 矩阵在认知诊断中的重要性. 显然, 如何评论 Q 矩阵以及 Q 矩阵理论在认知诊断中作用都不过分.

0.1 Q 矩阵中属性之间的先决关系

属性之间可能存在先决(prerequisite)关系, 比如要掌握多位数整数乘法(A), 首先要掌握个位数的乘法(B). B 即为 A 的先决属性. 再如, 属性 A_1 为同分母分数减法($5/7 - 2/7$), A_2 为整数减分数($1 - 1/3$), A_3 为异分母相减($5/8 - 1/4$), A_4 为需整数借位的同分母相减($3(4/9) - 5/9$), A_5 为需整数借位的异分母相减($3(4/9) - 1/2$). 教师对分数减法常寻找有效的教学方法, 属性 A_1 心理加工顺序先于 A_3 , 因此 A_1 是 A_3 的先决属性. 显然讲授 A_3 与 A_4 前要求先掌握 A_1 , 所以 A_1 是 A_3 与 A_4 的先决属性. 同理, A_2 是 A_1 的先决属性.

K. K. Tatsuo^[3] 对先决关系给出过数学化定义, 即将 Q 矩阵行向量进行两两比较, 比如 A_k 与 A_l 为 $Q(K \times n)$ 矩阵中第 k 行与第 l 行的行向量, 采用集合

收稿日期: 2014-12-19

基金项目: 国家自然科学基金(30860084, 60263005), 教育部人文社会科学研究一般项目青年基金(10YJCXLX04) 和福建省自然科学基金(2013J01119)资助项目.

作者简介: 杨淑群(1970-), 女, 江西临川人, 教授, 博士, 主要从事人工智能及计算机辅助教学的研究.

的包含关系以产生属性之间的先决关系,得到邻接矩阵进而获取可达矩阵 $R(K \times K)$. 她给出 2 个例子(见表 1 和表 2)以说明 Q 矩阵中属性之间的先决关系,其中表 2 是在原有 Q 矩阵中去除了属性都为 0 的项目,因为不存在不考察任何属性的项目.

表 1 为属性间含有先决关系的 Q 矩阵. 遵循 K. K. Tatsuoaka 描述 Q 矩阵的行向量表示属性向量,可用项目集合来表示. 例如,若测验(表 1)共有 11 个项目,第 1 个行向量表示属性 A_1 ,记为 $\{A_1\}$. A_1

出现在项目 1 2 5 6 7 8 10 11 中,则属性向量 $\{A_1\}$ 可以用 11 位二进制数标明包含 A_1 项目的位置,即 $\{A_1\} = \{1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\}$,也可以通过十进制数表达其涉及的项目,即 $\{A_1\} = \{1\ 2\ 5\ 6\ 7\ 8\ 10\ 11\}$. 同理,属性 A_2 可表示成 $\{A_2\} = \{0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\}$,亦可表示成 $\{A_2\} = \{2\ 7\ 8\ 11\}$. 由集合的包含关系定义 $\{A_2\} \subseteq \{A_1\}$,即 A_1 是 A_2 的先决属性.

表 1 属性间含有先决关系的 Q 矩阵

属性	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A_1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
A_2	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
A_3	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
A_4	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1

表 2 为属性间不存在先决关系的 Q 矩阵. 表 2 也具有 4 个属性,所有可能的知识状态或属性掌握模式为 16 类,但是依照属性模式去除属性都为 0 的项目后,只能有 15 个项目类($2^4 - 1$). 同上例 4 个属性的行向量也表示成集合的形式 $\{A_1\} = \{1\ 5\ 6\ 7\ 11\ 12\ 13\ 15\}$, $\{A_2\} = \{2\ 5\ 8\ 9\ 11\ 12\ 14\ 15\}$, $\{A_3\} = \{3\ 6\ 8\ 10\ 11\ 13\ 14\ 15\}$, $\{A_4\} = \{4\ 7\ 9\ 10\ 12\ 13\ 14\ 15\}$,显然属性之间都不存在包含关系,即属性之间不存在先决关系.

表 2 属性间不存在先决关系的 Q 矩阵

属性	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A_1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
A_2	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
A_3	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
A_4	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1

0.2 属性先决关系诱导的属性层级关系

类似“小于等于”关系,先决关系也是一种序关系,称之为偏序关系(partial order relation),偏序关系可诱导出层级图(Hasse 图)^[5]. 例如,表 3 为具有 4 个属性、含有先决关系的 Q 矩阵. 由属性的包含关系可得 $\{A_2\} \subseteq \{A_1\}$, $\{A_3\} \subseteq \{A_1\}$, $\{A_4\} \subseteq \{A_3\}$, $\{A_4\} \subseteq \{A_1\}$. 由此可得 A_1 是 A_2 的先决属性, A_1 是 A_3 的先决属性, A_3 是 A_4 的先决属性, A_1 是 A_4 的先决属性. 每个属性用一个节点表示,4 个属性共有 4 个节点. 如果 A_1 是 A_2 的先决,则画出从 A_1 到 A_2 的一条有向边. 由 A_1 、 A_2 、 A_3 与 A_4 之间的先决关系可得到图 1 的左图,因为 A_1 到 A_4 的边可通过 A_3 到达,按照画 Hasse 图的规则,必须删去 A_1 到 A_4 的边,最后得到先决关系诱导的层级图(图 1 的右图),称为属性层级关系. 但需要注意的是,应用这种对 Q 矩阵的行进行逐对比较以获取属性层级关系的方法必须要满足一些条件,至少 Q 矩阵的行数不能超过列数,最好是 Q 矩阵以可达矩阵为子矩阵,否则可能挖掘出来的层级不一定是这些属性之间的真实的层级关系^[7].

表 3 具有 4 个属性、含有先决关系的 Q 矩阵

属性	1	2	3	4	5	6
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	0	1	0	1	0	1
A_3	0	0	1	1	1	1
A_4	0	0	0	0	1	1

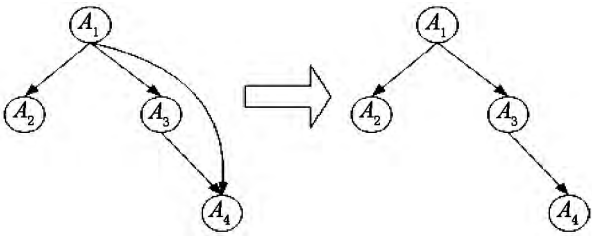


图 1 表 3 诱导的层级关系

S. Kim^[14]提出基本的属性层级关系可组成复杂的认知技能(属性)的结构,这是 J. P. Leighton 等对属性层级关系存在性的前提假设之一. 基本的属性层级关系有 4 种类型:线型、收敛型、发散型及无结构型. 图 2 为从属性 A_1 到属性 A_6 的收敛型属性层级关系, A_1 是 A_2 的先决属性, A_2 是 A_3 与 A_4 的先决属性, A_3 与 A_4 是 A_5 的先决属性, A_5 是 A_6 的先决属性.

本文收敛型属性层级关系描述了从属性 1 开始,到属性 6 结束的认知层级关系。

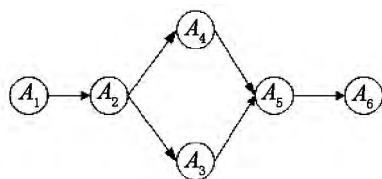


图 2 收敛型属性层级关系

在 Q 矩阵理论中,属性及属性层级关系是规则空间模型(RSM)与属性层级模型(Attribute Hierarchy Method, AHM)的重要理论概念。K. K. Tatsuoka 从理论上诠释了属性及其层级关系,她指出被试解答项目需要认知技能(属性),属性之间构成层级关系,采用集合的包含关系定义先决关系^[18],由先决关系诱导出属性层级关系。而 AHM 就是以属性层级关系为前提的认知诊断模型。基于 K. K. Tatsuoka,杨淑群与等^[23]给出有效/无效项目的定义,若项目满足属性层级关系则为有效项目。在属性及其层级关系确定之后,命题专家能够并且只能能够命制有效项目。杨淑群等^[23-24]给出自动生成有效项目的高效算法。丁树良等^[8-9]将属性层级关系应用于测验编制的研究。涂冬波等^[21]从属性层级关系入手,比较了几种常用非补偿型认知诊断模型的计量学特征(即诊断正确率)。基于属性层级关系的 Q 矩阵理论存在错误^[1,10],丁树良等^[10]对 Q 矩阵理论作了进一步补充和修正,修正后的 Q 矩阵理论更显合理、科学。然而 Q 矩阵理论依然存在较多的问题与矛盾,比如如何对属性之间的关系及层级关系概念化。K. K. Tatsuoka^[18]定义了属性与属性之间的关系,属性集与属性集之间是否也存在关系?如果有,该如何描述其关系?

本文目的即为深入揭示属性关系,指出先决关系的局限性,提出新的属性关系并泛化先决关系,为 Q 矩阵理论研究提供新的视角。

1 先决关系的局限性与突破

1.1 先决关系的局限性

先决关系只考虑两两属性之间的关系。事实上,

也存在属性集是属性的先决,如下例。

例 1 假如属性 A_1 与 A_2 为分数问题中的 2 个属性。属性 A_1 : “求异分母的最小公倍数”; 属性 A_2 : “同分母分数相加”; 属性 A_3 : “异分母分数相加”。假设需要求解如下问题 Q_1 : 异分母 $2/3$ 与 $3/4$ 相加。解答如下: $2/3 + 3/4 = 8/12 + 9/12 = 17/12$ 。(求异分母的最小公倍数 A_1)(求同分母分数相加得到 $17/12$ A_2)。

显然 A_1 与 A_2 之间没有任何先决关系,且属性集 $\{A_1, A_2\}$ 是属性 A_3 的先决。由此可得,属性间的先决关系不足表达属性集与属性之间的关系。

综上所述,只考虑两两属性之间关系的先决关系具有局限性。

1.2 基于属性的蕴含关系

I 为对象集, M 为属性集, Q 为对象与属性的关联矩阵。 A 与 B 为 M 的子集,若具有属性集 A 的对象都具有属性集 B ,那么称为 A 蕴含 B ,记为 $A \rightarrow B$ 。 A 与 B 的关系为蕴含关系^[11]。蕴含关系定义在属性集(M 的子集)之间。记 A' 为具有属性集 A 的对象集,如果 $A' \subseteq B'$ 那么 $A \rightarrow B$ ^[11]。

如果视项目为对象,那么也可在 Q 矩阵上定义蕴含关系。 I 为项目集, M 为属性集, Q 为 Q 矩阵。 A 与 B 为 M 的子集,若具有属性集 A 的项目都具有属性集 B ,那么 $A \rightarrow B$ 。同理,记 A' 为具有属性集 A 的项目集,如果 $A' \subseteq B'$ 那么 $A \rightarrow B$ 。例如,从表 1 可得 $\{A_1\}' = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$ 与 $\{A_2\}' = \{2, 7, 8, 11\}$ 。显然 $\{A_2\}' \subseteq \{A_1\}'$,由蕴含关系定义可得 $\{A_2\} \rightarrow \{A_1\}$ 。

蕴含关系 $\{a, b\} \rightarrow \{c, d\}$ 表示具有属性 a 与 b 的项目则一定具有属性 c 与 d 。显然 $\{a, b\} \rightarrow \{c, d\}$ 也可等价表示成具有属性 a 与 b 的项目一定具有属性 c ,同时一定具有属性 d ,即 $\{a, b\} \rightarrow \{c, d\}$ 等价于 $\{a, b\} \rightarrow \{c\}$ 与 $\{a, b\} \rightarrow \{d\}$ 。因此,本文只需讨论属性集蕴含 1 个属性的形式。

为描述方便,本文将 $\{a, b, c\} \rightarrow \{d\}$ 简写为 $\{a, b, c\} \rightarrow d$ 。

例 2^[11] 表 4 中,项目集为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$,属性集为 $\{r, i, s, as, an, t, nt, c, sc\}$,属性表示二元关系的性质。

表 4 关联矩阵

属性	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}
r	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
i	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
s	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
as	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0

表 4(续)

属性	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}
an	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
t	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
nt	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
c	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
sc	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0

R 表示某集合上的二元关系. 例如 a 与 b 是集合中的 2 个元素 R 如果表示师生关系, 那么 a 与 b 是师生关系可表示成 aRb . 二元关系性质见表 5.

表 5 二元关系的性质

属性	性质	定义
r	自反	xRx 对所有的 $x \in S$
i	反自反	$\neg xRx$ 对所有的 $x \in S$
s	对称	$xRy \Rightarrow yRx$ 对所有的 $x, y \in S$
as	不对称	$xRy \Rightarrow \neg yRx$ 对所有的 $x, y \in S$
an	反对称	xRy 且 $yRx \Rightarrow x = y$ 对所有的 $x, y \in S$
t	传递	xRy 且 $yRz \Rightarrow xRz$ 对所有的 $x, y, z \in S$
nt	负传递	$\neg xRy$ 且 $\neg yRz \Rightarrow \neg xRz$ 对所有的 $x, y, z \in S$
c	连通	xRy 或 yRx 对所有的 $x \neq y \in S$
sc	严格连通	xRy 或 yRx 对所有的 $x, y \in S$

因为 $\{an\}' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11\}$, $\{as\}' = \{1, 3, 6, 10, 11\}$, $\{i\}' = \{1, 3, 6, 7, 10, 11, 12\}$. 由此可得 $\{as\}' \subseteq \{i\}'$ 与 $\{as\}' \subseteq \{an\}'$, 进而得到 $\{as\} \rightarrow i$ 且 $\{as\} \rightarrow an$. 用自然语言可描述其现实意义, 如果项目满足不对称性质, 那么就满足反自反与反对称的性质. 再如 $\{t, c\}' = \{1, 2, 5, 6, 8\}$, 这里 $\{t, c\}$ 表示同时满足 t 和 c 的性质. $\{nt\}' = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 13\}$, 因为 $\{t, c\}' \subseteq \{nt\}'$, 得 $\{t, c\} \rightarrow nt$. 用自然语言可描述其现实意义, 如果项目既满足传递与连通, 那么一定满足负传递. 同理, 可得 $\{an, nt\} \rightarrow t$, $\{s, c\} \rightarrow nt$, $\{s, an\} \rightarrow t$, $\{i, t\} \rightarrow as$, $\{i, t\} \rightarrow an$, $\{i, an\} \rightarrow as$, $\{i, s, as, an, t\} \rightarrow nt$, $\{r, c\} \rightarrow sc$, $\{r, nt\} \rightarrow c$ 和 $\{r, nt\} \rightarrow sc$ 等蕴含关系.

2 蕴含关系与先决关系的联系

先决关系与蕴含关系都表达了属性的关系, 它们之间有何联系? 事实上, 先决关系是蕴含关系的特殊情况, 表达了一个属性蕴含另一个属性的形式, 即如果 $\{a\} \rightarrow b$, 则属性 b 是属性 a 的先决属性. 例如, 表 1 中具有属性 A_1 的项目集是 $\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$, 具有属性 A_2 的项目集是 $\{2, 7, 8, 11\}$, 因为 $\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 11\} \supseteq \{2, 7, 8, 11\}$, 所以 A_1 是 A_2 的先决, 并且 $\{A_2\} \rightarrow A_1$. 再如表 4 中, 因为 $\{as\}' \subseteq \{i\}'$, $\{as\}' \subseteq \{an\}'$, 可得 i 是 as 的先决属性, an 是

as 的先决属性. 由蕴含关系的定义可知 $\{as\} \rightarrow i$, $\{as\} \rightarrow an$.

另外, 蕴含关系更丰富地表达了属性之间的关系. 例如 Q 矩阵(表 4) 中属性 r, s, t, nt, c 之间不存在先决关系, 因为这 5 个属性之间都不存在包含关系, 但是它们之间却存在蕴含关系. 如 $\{s, c\} \rightarrow nt$, 表示若项目满足对称性与连通性则满足负传递; 再如 $\{r, nt\} \rightarrow c$, 表示若项目满足自反与负传递则满足连通性.

3 层级关系对蕴含关系具有局限性

AHM 基于属性与属性层级关系, 夸大了属性层级关系的重要性而忽视属性集合之间可能存在的蕴含关系. J. P. Leighton 等^[1] 对属性间存在属性层级关系的 2 个理由: (i) 认知研究表明认知属性之间不是孤立的而是具有一定的内在网络关系^[13-22]; (ii) 邻接矩阵与可达矩阵其实就是表征这种层级关系的数学符号. 但是, 第 2 个理由显然多余, 因为任何图(而不一定是有向图) 都可以得到其邻接矩阵与可达矩阵(有向图只能用可达矩阵, 无向图用连通矩阵). 例如, 图 3 为一非层级关系图, 但是它也有邻接矩阵与可达矩阵, 见表 6 与表 7.

表 6 根据图 3 得到的邻接矩阵

属性	A_1	A_2	A_3
A_1	0	1	0
A_2	0	0	1
A_3	1	0	0

表 7 根据图 3 得到的可达矩阵

属性	A_1	A_2	A_3
A_1	1	1	1
A_2	1	1	1
A_3	1	1	1

另外, 考虑表 4 中属性 i, as 与 an 之间的关系, 由前面论述可知 $\{as\} \rightarrow i$, $\{as\} \rightarrow an$, $\{i, an\} \rightarrow as$. 因此属性 as 是属性集 $\{i, an\}$ 的先决, 同时属性 i 与 an 是属性 as 的先决, 其关系图比较复杂, 难以标准化表示, 且以图 4 表示这 3 个属性之间的关系, 但其显然不构成层级关系. 事实上, 由表 4 知 i 和 an 对

应的行向量作布尔交,等于 as 对应的行,即 $\{i, an\}$ 与 as 等价。

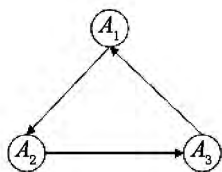


图3 简单网络图

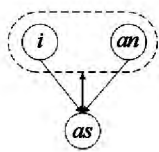


图4 3个属性之间的网络关系图

以上2个例子表明属性层级关系对蕴含关系的图形化表示也具有局限性。

4 结论与讨论

本文给出先决关系的简述,提出蕴含关系,突破先决关系的局限性且泛化先决关系,使先决关系成为蕴含关系的特殊形式,同时提出层级关系对于蕴含关系的局限性。这至少使得收敛型层级关系的描述更清晰,也可以准确表达如图4所示的属性集合与1个属性等价。属性层级关系在一些流行的认知诊断模型中具有非常重要的地位,如规则空间方法中属性层级关系为其对被试预测与分类的基础, AHM^[1]基于属性层级关系给出认知诊断模型,因此希望通过本文的研究,为认知诊断理论开辟一个新的研究空间,能起到抛砖引玉的作用。

进一步的工作将深入研究蕴含关系。首先,因为图形具有形象、直观与便捷等特性,研究如何图形化表示蕴含关系是直观理解蕴含关系的关键。目前这一问题存在的困扰有3个方面,即 $b \rightarrow a$ 或 $c \rightarrow a$ $b \rightarrow a$ 且 $c \rightarrow a$ $\{a, b\} \rightarrow c$, 该如何图形化才能区别这3者值得研究。蕴含关系在心理加工顺序之间的对应问题还值得进一步探讨。

其次,如何从 Q 矩阵中高效挖掘出蕴含关系。假设 A 是具有 n 个属性的属性集,则可能存在的蕴含关系有 $n(2^{n-1} - 1)$ 个,随着属性的增多,要验证的蕴含关系个数将是呈指数级增长。比如,某 Q 矩阵的属性集 $A = \{a, b, c\}$, 则可能的蕴含关系有 $3 \times (2^2 - 1)$ 即9个, $\{b, c\} \rightarrow a$, $\{b\} \rightarrow a$, $\{c\} \rightarrow a$, $\{c\} \rightarrow b$, $\{a\} \rightarrow b$, $\{a, c\} \rightarrow b$, $\{a, b\} \rightarrow c$, $\{a\} \rightarrow c$, $\{b\} \rightarrow c$ 。因此,如何高效挖掘蕴含关系是一个必须面对的问题。

再次,是否存在最小且能推出其它蕴含关系的蕴含关系集。就属性层级关系,杨淑群等^[23-24]给出从属性层级关系的可达矩阵扩张推出所有期望反应模式。是否存在类似可达矩阵的蕴含关系集,依此可

推出其它所有的蕴含关系,由此生成期望反应模式,此问题对扩充 Q 矩阵理论有很重要的意义。

最后,如何将蕴含关系应用于认知诊断的测验编制及 Q 矩阵缺失属性的填补。丁树良等^[9]探讨过认知诊断测验编制的原则,指出在给定属性及其层级条件下,测验蓝图中包含可达矩阵当且仅当知识状态与理想反应模式一一对应。蕴含关系也表达了一定的测验编制原则,至少要求项目集要满足蕴含关系。另外,如果 Q 矩阵中的项目有缺失属性,可否根据蕴含关系推导出其缺失属性,但这将面临2个问题:(i) 推导规则的产生,(ii) Q 矩阵属性信息量的计算,只有足够的属性信息才能推导出缺失属性。

5 参考文献

- [1] Leighton J P, Gierl M J, Hunka S M. The attribute hierarchy method for cognitive assessment: a variation on Tatsuo-ka's rule space approach [J]. Journal of Educational Measurement 2004, 41(3): 205-237.
- [2] Fu J, Li Y. Cognitively diagnostic psychometric models: An integrative review [R]. 2008. ETS Research Report.
- [3] Tatsuo-ka K K. Toward an integration of item-response theory and cognitive error diagnosis [C]//Fredrickson N, Glaser R L, Lesgold A M, et al. Diagnostic monitoring of skills and knowledge acquisition [A]. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1990: 453-488.
- [4] Rupp A A, Templin J. The effects of Q -matrix misspecification on parameter estimates and classification accuracy in the DINA model [J]. Educational and Psychological Measurement 2008, 68(1): 78-96.
- [5] 左孝凌, 李为鑑, 刘永才. 离散数学 [M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1983.
- [6] Ding Shuliang, Luo Fen, Cai Yan, et al. Complement to Tatsuo-ka's Q matrix theory [C]//Shigemasa K, Okada A, Imaizumi T, et al. New Trends in Psychometrics [A]. Tokyo: Universal Academy Press, 2008: 417-424.
- [7] 丁树良, 罗芬. 由偏序关系的可达阵导出 Hasse 图的有效算法 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2013, 37(5): 441-444.
- [8] 丁树良, 汪文义, 杨淑群. 认知诊断测验蓝图的设计 [J]. 心理科学, 2011, 34(2): 258-265.
- [9] 丁树良, 杨淑群, 汪文义. 可达矩阵在认知诊断测验编制中的重要作用 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 34(4): 490-495.
- [10] 丁树良, 祝玉芳, 林海菁, 等. Tatsuo-ka Q 矩阵理论的修正 [J]. 心理学报, 2009, 41(2): 101-112.
- [11] Ganter B, Wille R. Formal concept analysis: mathematical foundations [M]. Berlin: Springer, 1999.

- [12] Gierl M J, Wang Changjiang, Zhou Jiawen. Using the attribute hierarchy method to make diagnostic inferences about examinees' cognitive skills in algebra on the SAT [J]. *Journal of Technology, Learning, and Assessment*, 2008, 6(6): 1-49.
- [13] Kuhn D. Why development does (and does not occur): evidence from the domain of inductive reasoning [C]//McClelland J L, Siegler R. *Mechanisms of cognitive development: Behavioral and neural perspectives* [A]. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2001: 221-249.
- [14] Kim S. Towards a statistical foundation in combining structures of decomposable graphical models [M]. Yusong gu, Taejon: Korea Advanced Institute of Science and Technology, Division of Applied Mathematics, 2001.
- [15] Tatsnoka K K. Boolean algebra applied to determination of universal set of knowledge states [M]. Princeton, NJ: Educational Testing Service, 1991.
- [16] Tatsuoka K K. Item construction and psychometric models appropriate for constructed responses [C]//Bennett R E, Ward W C. *Construction versus choice in cognitive measurement* [A]. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1993.
- [17] Tatsuoka K K. Architecture of knowledge structures and cognitive diagnosis: A statistical pattern recognition and classification approach [C]//Nichols P D, Chipman S F, Brennan R L. *Cognitively Diagnostic Assessment* [A]. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1995: 327-361.
- [18] Tatsuoka K K. *Cognitive assessment: an introduction to the rule space method* [M]. New York: Routledge, 2009.
- [19] Tatsuoka K K, Tatsuoka M M. Spotting erroneous rules of operation by the individual consistency index [J]. *Journal of Educational Measurement*, 1983, 3: 221-230.
- [20] Tatsuoka K K, Tatsuoka M M. Computerized adaptive diagnostic testing [J]. *Journal of Educational Measurement*, 1997, 34: 3-20.
- [21] 涂冬波, 蔡艳, 戴海琦. 几种常用非补偿型认知诊断模型的比较与选用: 基于属性层级关系的考量 [J]. *心理学报*, 2013, 45(2): 243-252.
- [22] Vosniadou S, Brewer W F. Mental models of the earth: a study of conceptual change in childhood [J]. *Cognitive Psychology*, 1992, 24: 535-585.
- [23] 杨淑群, 丁树良. 有效对象的判定理论与方法 [J]. *江西师范大学学报: 自然科学版*, 2011, 35(1): 1-4.
- [24] 杨淑群, 蔡声镇, 丁树良, 等. 求解简化 Q 矩阵的扩张算法 [J]. *兰州大学学报: 自然科学版*, 2008, 44(3): 87-91, 96.
- [25] Yang Shuqun, Ding Shuliang, Ding Qiulin. Incremental augment algorithm based on reduced Q -matrix [J]. *Transactions of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2010, 27(2): 183-189.

The Relationship among Attributes for Cognitive Assessment

YANG Shuqun

(Faculty of Software, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian 350108, China)

Abstract: The hierarchy plays a foundational role in the Attribute Hierarchy Method (AHM). Both the attributes and the hierarchy serve as the most important input variables to most cognitively diagnostic methods like Rule Space Model (RSM) and AHM. Despite the relatively well-defined logical aspects, much work remains to be done because many issues and controversies are not resolved. For example, controversy exists over how to conceptualize and describe the relationship among attributes and attributes hierarchy. Tatsuoka defined the relationship between the attributes in pairs, but she did not explain how to maturate and analyze the relationship between a set of attributes and one single attribute. The main purpose of the paper is to highlight and assassinate the limitation in the prerequisite relationship among attributes. The existence of the limitation is illustrated by a different denominators problem. In order to overcome this limitation, it is proposed that a set of combinatory attributes can be prerequisite to a single attribute as well, posing as challenges for the previously defined prerequisite relation. The new implication relation could overcome the limitation of prerequisite relation and can be viewed as a more general relation that complements and encompasses the prerequisite relation. Meanwhile, the implication relation presents a new challenge to the traditional Q matrix theory and proposes the new subject to scholars in the cognitive assessment.

Key words: cognitive assessment; attribute; prerequisite relation; attribute hierarchy; implication relation

(责任编辑: 冉小晓)