第 39 卷 第 2 期　江西师范大学学报(自然科学版)　Vol. 39 No. 2
2015 年 3 月　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　Mar. 2015

文章编号: 1000-5862(2015)02-0194-06

定时截尾串联系统屏蔽数据步进应力加速寿命试验的统计分析

徐晓岭[1]，**王蓉华**[2*]，**顾蓓青**[1]

(1. 上海对外经贸大学商务信息学院，上海　201620; 2. 上海师范大学数理学院，上海　200234)

摘要: 考虑由 2 个具有常数失效率单元串联而成的系统进行步进应力加速寿命试验中，在定时截尾屏蔽数据场合下给出了参数的近似区间估计和极大似然估计，并通过数值算例验证方法的可行性.

关键词: 屏蔽数据; 定时截尾; 串联系统; 极大似然估计; 步加试验

中图分类号: TB 114.3　**文献标志码:** A　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.02.15

0　引言

为了提供优质的产品或服务，对系统的可靠性进行研究是必要的. 随着研究的深入，研究者发现在系统可靠性试验中，经常会发生系统失效原因被屏蔽掉的现象. 如当系统具屏蔽寿命数据时，因为故障检测和诊断费用昂贵，尤其是实际问题中系统采用模块化设计，从而导致系统失效的确切单元往往是未知的; 关于集成电路或计算机的可靠性问题，导致系统失效的原因一般在于有几个单元组成的模块，所能得到的测试数据有系统失效的时间和造成系统失效的模块. 国内外许多学者对屏蔽数据的统计分析已经取得了一系列研究成果[1-4]，但其中对步进应力加速寿命试验下屏蔽数据的可靠性统计分析研究成果较少涉及. 鉴于当今许多产品具有高可靠、长寿命的特点，用通常的寿命试验很难得到失效数据，因而采用加速寿命试验以获得失效数据. 本文考虑由 2 个具有常数失效率单元串联而成的系统进行步进应力加速寿命试验，在定时截尾屏蔽数据场合下给出了参数的近似区间估计和极大似然估计，最后采用 Monte-Carlo 模拟说明方法的可行性.

1　基本假定和相关定义

为了建立简化的模型，给出如下基本假定:

假定 1　所涉及的系统是由 $J(\geqslant 2)$ 个独立单元串联而成的.

假定 2　将 n 个相同的系统进行定时截尾寿命试验，试验持续到时间 τ 为止，此时假设共有 r 个系统失效.

假定 3　系统数据屏蔽的发生与系统失效的原因以及系统失效的时间均无关，即屏蔽的发生是独立的.

假定4　在系统 i 中，T_{ij} 表示第 j 个单元的寿命，$h_{ij}(t)$，$F_{ij}(t)$，$f_{ij}(t)$ 和 $\overline{F}_{ij}(t)$ 分别表示寿命 T_{ij} 的失效率函数、分布函数、密度函数和可靠度函数，$i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,J$. 由于随机变量 T_{ij} 仅与第 j 个单元相关，而不依赖于系统 i，所以 T_{ij} 的失效率函数、分布函数、密度函数和可靠度函数分别简记为 $h_j(t)$，$F_j(t)$，$f_j(t)$ 和 $\overline{F}_j(t)$，$j=1,2,\cdots,J$.

考虑 n 个串联系统进行寿命试验，每个系统有 J 个单元. 随机变量 T_{ij} 表示第 i 个系统的第 j 个单元的寿命. 其观察值记为 t_{ij}，$i=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,J$. 于是可以得到第 i 个系统的寿命为 $T_i=\min(T_{i1},\cdots,T_{iJ})$，其观察值记为 t_i，$i=1,\cdots,n$. 记 S_i 为引起系统 i 失效的单元集合，s_i 为 S_i 的实现. 于是，观察的数据 D 包括 $(t_1,s_1),\cdots,(t_n,s_n)$. 若集合 s_i 由单个元素组成或者其仅有 1 个元素，则这意味着导致系统 i 失效的单元是已知的. 然而，若集合 s_i 中的元素数量超过 1 个，则这意味着导致系统 i 失效的单元的寿命数据已经被屏蔽.

收稿日期: 2014-12-10

基金项目: 2013 年度全国统计科学研究计划重点(2013LZ08)，上海市教育委员会科研创新重点课题(14ZZ155)和上海师范大学校级课题(SK201306)资助项目.

通信作者: 王蓉华(1972-)，女，上海人，副教授，博士，主要从事可靠性统计的研究.

由文献 [1] 可知，n 个串联系统的似然函数表示为 $L(D)=\prod_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j\in s_i}[f_j(t_i)\prod_{l\in J_j}\bar F_l(t_i)]\right\}$，由于 $f_j(t)=h_j(t)\bar F_j(t)$，于是

$$L(D)=\prod_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j\in s_i}[h_j(t_i)]\prod_{l=1}^{J}\bar F_l(t_i)\right\}.$$

如果系统由 2 个单元串联而成，即 $J=2$. 失效的原因可归结为 3 类，即 $s_1=\{1\}$，$s_2=\{2\}$，$s_{12}=\{1,2\}$. 现考虑将 n 个由 2 个单元串联而成的系统进行定时截尾寿命试验，试验持续到时间 τ 为止，此时共有 r 个系统失效，其中属 s_1 类的有 r_1 个，其失效时间不妨设为 $t_1,\cdots,t_{r_1}$；属 s_2 类的有 r_2 个，其失效时间不妨设为 $t_{r_1+1},\cdots,t_{r_1+r_2}$；属 s_{12} 类的有 r_3 个，其失效时间不妨设为 $t_{r_1+r_2+1},\cdots,t_r$，且 $r_1+r_2+r_3=r$. 于是该 n 个串联系统在定时截尾寿命试验下的似然函数为

$$L(D)=C^+\prod_{i=1}^{r}\left\{\left[\sum_{j\in s_i}h_j(t_i)\right]\prod_{l=1}^{2}\bar F_l(t_i)\right\}P(T_{r+1}>\tau,\cdots,T_n>\tau)=C^+\prod_{i=1}^{r}\left\{\left[\sum_{j\in s_i}h_j(t_i)\right]\prod_{l=1}^{2}\bar F_l(t_i)\right\}\cdot[P(T>\tau)]^{n-r},$$

其中 C^+ 为某一正常数，随机变量 T 为串联系统的寿命.

2　系统由 2 个相同常数失效率单元串联而成的步进应力加速寿命试验的统计分析

由于单元的失效率为常数，单元寿命的分布服从指数分布. 由于在指数分布下步进应力加速寿命试验累积损伤(CE) 模型、损伤失效率(TFR) 模型和损伤随机变量(TRV) 模型是一致的，故在此仅针对 CE 模型作研究.

对每个单元而言，在恒定应力 V_1 下，单元的寿命服从指数分布，其失效率为 α_1，平均寿命 $\theta_1=1/\alpha_1$，在恒定应力 $V_2(>V_1)$ 下，单元的寿命仍服从指数分布，其失效率为 α_2，平均寿命 $\theta_2=1/\alpha_2$. 由著名的 Nelson 假定 [4-5] 知 CE 模型的时间折算思想，即如果单元在应力 V_1 下工作时间 t_1，相当于单元在应力 V_2 下工作了时间 t_2，有 $F_1(t_1)=F_2(t_2)$，$1-e^{-\alpha_1t_1}=1-e^{-\alpha_2t_2}$，$t_2=\alpha_1t_1/\alpha_2$.

现考虑将由 2 个单元串联的 n 个系统进行简单步进应力加速寿命试验，即时刻 0 将 n 个系统在应力 V_1 下进行寿命试验，试验持续到时刻 τ_1，其中共有 k_1 个系统失效，在时刻 τ_1 将应力 V_1 提高至应力 $V_2(>V_1)$ 继续做试验，试验持续到时刻 τ_2，其中共有 k_2 个系统失效. 记 $r=k_1+k_2$.

在应力 V_1 下，不妨设 k_1 个失效系统的失效时间为 $t_1,\cdots,t_{k_1}$，而其中 $t_1,\cdots,t_{r_1}$ 属 s_1，$t_{r_1+1},\cdots,t_{r_1+r_2}$ 属 s_2，而 $t_{r_1+r_2+1},\cdots,t_{r_1+r_2+r_3}$ 属 s_{12}，且 $r_1+r_2+r_3=k_1$. 在应力 V_2 下，不妨设 k_2 个失效系统的失效时间为 $t_{k_1+1},\cdots,t_{k_1+k_2}$，而其中 $t_{k_1+1},\cdots,t_{k_1+r_4}$ 属 s_1，$t_{k_1+r_4+1},\cdots,t_{k_1+r_4+r_5}$ 属 s_2，而 $t_{k_1+r_4+r_5+1},\cdots,t_{k_1+r_4+r_5+r_6}$ 属 s_{12}，且 $r_4+r_5+r_6=k_2$.

针对简单步进应力加速寿命试验，在应力 V_1 下单元的失效率为 $h(t)=\alpha_1$，其分布函数为 $F(t)=1-e^{-\alpha_1t}$，在应力 V_2 下单元的失效率为 $h(t)=\alpha_2$，其分布函数为 $F(t)=1-e^{-\alpha_2(t-\tau_1+\alpha_1\tau_1/\alpha_2)}=1-e^{-\alpha_2t+\alpha_2\tau_1-\alpha_1\tau_1}$. 没有失效的系统有 $n-r$ 个.

设系统的寿命为 T，$T=\min(X,Y)$，对于 $0<t\leqslant\tau_1$，$P(T\leqslant t)=1-P(T>t)=1-P(X>t,Y>t)=1-P(X>t)P(Y>t)=1-e^{-2\alpha_1t}$，$P(T>t)=e^{-2\alpha_1t}$.

对于 $t>\tau_1$，$P(T\leqslant t)=1-P(X>t)P(Y>t)=1-e^{-2(\alpha_2t-\alpha_2\tau_1+\alpha_1\tau_1)}$，$P(T>t)=e^{-2(\alpha_2t-\alpha_2\tau_1+\alpha_1\tau_1)}$.

2.1　极大似然估计

似然函数为

$$L(D,\alpha_1,\alpha_2)=C^+\prod_{i=1}^{r_1}\left\{\left[\sum_{j\in s_1}h_j(t_i)\right]\prod_{l=1}^{2}\bar F_l(t_i)\right\}\cdot\prod_{i=r_1+1}^{r_1+r_2}\left\{\left[\sum_{j\in s_2}h_j(t_i)\right]\prod_{l=1}^{2}\bar F_l(t_i)\right\}\prod_{i=r_1+r_2+1}^{k_1}\left\{\left[\sum_{j\in s_{12}}h_j(t_i)\right]\cdot\prod_{l=1}^{2}\bar F_l(t_i)\right\}\prod_{i=k_1+1}^{k_1+r_4}\left\{\left[\sum_{j\in s_1}h_j(t_i)\right]\prod_{l=1}^{2}\bar F_l(t_i)\right\}\cdot\prod_{i=k_1+r_4+1}^{k_1+r_4+r_5}\left\{\left[\sum_{j\in s_2}h_j(t_i)\right]\prod_{l=1}^{2}\bar F_l(t_i)\right\}\cdot\prod_{i=k_1+r_4+r_5+1}^{k_1+k_2}\left\{\left[\sum_{j\in s_{12}}h_j(t_i)\right]\prod_{l=1}^{2}\bar F_l(t_i)\right\}[P(T>\tau_2)]^{n-r}=C^+2^{r_3+r_6}\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}e^{-2\alpha_1\sum_{i=1}^{k_1}t_i}e^{-2\alpha_2\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2}t_i}e^{-2k_2(-\alpha_2\tau_1+\alpha_1\tau_1)}\cdot e^{-2(n-r)[\alpha_2(\tau_2-\tau_1)+\alpha_1\tau_1]},$$

$$\ln L(D,\alpha_1,\alpha_2)=\ln C^++(r_3+r_6)\ln2+k_1\ln\alpha_1+k_2\ln\alpha_2-2\alpha_1\sum_{i=1}^{k_1}t_i-2\alpha_2\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2}t_i-2k_2(-\alpha_2\tau_1+\alpha_1\tau_1)-2(n-r)[\alpha_2(\tau_2-\tau_1)+\alpha_1\tau_1],$$

$$\frac{\partial\ln L(D,\alpha_1,\alpha_2)}{\partial\alpha_1}=\frac{k_1}{\alpha_1}-2\sum_{i=1}^{k_1}t_i-2k_2\tau_1-2(n-r)\tau_1,$$

$$\frac{\partial\ln L(D,\alpha_1,\alpha_2)}{\partial\alpha_2}=\frac{k_2}{\alpha_2}-2\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2}t_i+2k_2\tau_1-2(n-r)(\tau_2-\tau_1).$$

令 $\partial \ln L(D,\alpha_1,\alpha_2)/\partial\alpha_1 = 0$，$\partial \ln L(D,\alpha_1,\alpha_2)/\partial\alpha_2 = 0$ 得方程

$$k_1/\alpha_1 - 2\sum_{i=1}^{k_1} t_i - 2k_2\tau_1 - 2(n-r)\tau_1 = 0,$$

$$k_2/\alpha_2 - 2\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} t_i + 2k_2\tau_1 - 2(n-r)(\tau_2-\tau_1) = 0,$$

从而可解得参数 α_1，α_2 的极大似然估计 $\hat{\alpha}_1$，$\hat{\alpha}_2$ 为

$$\hat{\alpha}_1 = k_1/\left[2\left(\sum_{i=1}^{k_1} t_i + k_2\tau_1 + (n-r)\tau_1\right)\right],$$

$$\hat{\alpha}_2 = k_2/\left[2\left(\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} t_i - k_2\tau_1 + (n-r)(\tau_2-\tau_1)\right)\right].$$

2.2 近似区间估计

由文献[4-6]知可用似然比方法来构造区间估计，即在 H_0：$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ 下，有

$$\Lambda = -2\ln[L(\boldsymbol{\theta}_0)/L(\hat{\boldsymbol{\theta}})]$$

的渐近分布为 $\chi^2(k)$，其中 $\boldsymbol{\theta}$ 为 k 维参数.

若将 θ 分为 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\theta_2)'$，考虑 H_0：$\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_{10}$，则有 $\Lambda = -2\ln[L(\boldsymbol{\theta}_{10},\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(\boldsymbol{\theta}_{10}))/L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1,\hat{\boldsymbol{\theta}}_2)]$ 的渐近分布为 $\chi^2(p)$，其中 $\boldsymbol{\theta}_1$ 为 p 维向量，$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(\boldsymbol{\theta}_{10})$ 为 H_0 下 $\boldsymbol{\theta}_2$ 的极大似然估计.

进一步说明，用似然比方法来构造区间估计. 若参数 $\boldsymbol{\theta}$ 为 1 维的，在假设 H_0：$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ 下，似然比统计量 $\Lambda = -2\ln[L(\theta_0)/L(\hat{\boldsymbol{\theta}})]$ 近似服从 $\chi^2(1)$，其中，$L(\boldsymbol{\theta})$ 为似然函数. 显著性检验就把 Λ 当作 $\chi^2(1)$ 来进行处理，Λ 的较大值将导致拒绝 H_0. 参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的置信区间可以用倒转这个检验来获得，即 $\boldsymbol{\theta}$ 的置信区间是由这样的 $\boldsymbol{\theta}_0$ 组成的集合，它使 $\Lambda \leqslant x_\alpha^2(1)$. 在很多场合表明，用 χ^2 近似 Λ 是很好的，甚至在小样本场合也是这样，如此得到的置信区间很接近于要求的覆盖概率. 若给定置信水平，可采用上述方法求得参数的近似区间估计.

例 1　取样本容量 $n = 20$，$r = 18$，$k_1 = 6$，$r_1 = 2$，$r_2 = 3$，$k_2 = 12$，$r_4 = 3$，$r_5 = 4$，2 个应力下单元的失效率分别为 $\alpha_1 = 0.2$，$\alpha_2 = 0.8$. 通过 Monte-Carlo 模拟产生的失效数据如表 1 所示.

取 $\tau_1 = 0.660\,2$，$\tau_2 = 1.491\,4$，利用本文方法可解得 $\hat{\alpha}_1 = 0.273\,2$，$\hat{\alpha}_2 = 0.758\,4$.

给定置信水平 0.95 可以得到 α_1 的近似区间估计为 [0.108 5，0.553 4]，α_2 的近似区间估计为 [0.406 3，1.272 5].

表 1　失效数据

应力	引起系统失效单元集合	系统失效时间
V_1	$s_i = \{1\}$	0.110 4　0.324 2
	$s_i = \{2\}$	0.134 0　0.364 5　0.660 2
	$s_i = \{1,2\}$	0.144 1
V_2	$s_i = \{1\}$	1.042 0　1.109 6　1.163 6
	$s_i = \{2\}$	1.113 3　1.121 7　1.122 4　1.127 5
	$s_i = \{1,2\}$	1.376 6　1.167 1　1.491 4　1.109 2　1.227 9

3 系统由 2 个不等的常数失效率单元串联而成的步进应力加速寿命试验的统计分析

在恒定应力 V_1 下，单元 1 的寿命服从指数分布，其失效率为 α_1；单元 2 的寿命服从指数分布，失效率为 α_2，在恒定应力 V_2 下，单元 1 的寿命仍服从指数分布，其失效率为 β_1；单元 2 的寿命仍服从指数分布，失效率为 β_2.

将 n 个系统进行简单步进应力加速寿命试验. 在应力 V_1 下，对于 $t \leqslant \tau_1$，单元 1 的寿命分布函数为 $F_1(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t}$；单元 2 的寿命分布函数为 $F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$. 而在应力 V_2 下，对于 $t > \tau_1$，单元 1 的寿命失效率为 $h_1(t) = \beta_1$，分布函数为 $F_1(t) = 1 - e^{-\beta_1(t-\tau_1+\alpha_1\tau_1/\beta_1)}$；单元 2 的寿命失效率为 $h_2(t) = \beta_2$，分布函数为 $F_2(t) = 1 - e^{-\beta_2(t-\tau_1+\alpha_2\tau_1/\beta_2)}$.

设系统的寿命为 $T = \min(X,Y)$，对于 $0 < t \leqslant \tau_1$，$P(T \leqslant t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(X > t, Y > t) = 1 - P(X > t)P(Y > t) = 1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}$，$P(T > t) = e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}$.

对于 $t > \tau_1$，$P(T \leqslant t) = 1 - P(X > t)P(Y > t) = 1 - e^{-(\beta_1 t-\beta_1\tau_1+\alpha_1\tau_1)}e^{-(\beta_2 t-\beta_2\tau_1+\alpha_2\tau_1)}$，$P(T > t) = e^{-(\beta_1 t-\beta_1\tau_1+\alpha_1\tau_1)}e^{-(\beta_2 t-\beta_2\tau_1+\alpha_2\tau_1)}$.

3.1　极大似然估计

似然函数为

$$L(D,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2) = C^+ \prod_{i=1}^{r_1}\left\{\left[\sum_{j\in s_1} h_j(t_i)\right]\cdot \prod_{l=1}^{2}\bar{F}_l(t_i)\right\}\prod_{i=r_1+1}^{r_1+r_2}\left\{\left[\sum_{j\in s_2} h_j(t_i)\right]\prod_{l=1}^{2}\bar{F}_l(t_i)\right\}\cdot \prod_{i=r_1+r_2+1}^{k_1}\left\{\left[\sum_{j\in s_{12}} h_j(t_i)\right]\prod_{l=1}^{2}\bar{F}_l(t_i)\right\}\prod_{i=k_1+1}^{k_1+r_4}\left\{\left[\sum_{j\in s_1} h_j(t_i)\right]\cdot \prod_{l=1}^{2}\bar{F}_l(t_i)\right\}\prod_{i=k_1+r_4+1}^{k_1+r_4+r_5}\left\{\left[\sum_{j\in s_2} h_j(t_i)\right]\prod_{l=1}^{2}\bar{F}_l(t_i)\right\}\cdot \prod_{i=k_1+r_4+r_5+1}^{k_1+k_2}\left\{\left[\sum_{j\in s_{12}} h_j(t_i)\right]\prod_{l=1}^{2}\bar{F}_l(t_i)\right\}[P(T>\tau_2)]^{n-r} = C^+\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}(\alpha_1+\alpha_2)^{r_3}\beta_1^{r_4}\beta_2^{r_5}(\beta_1+\beta_2)^{r_6}\cdot e^{-\alpha_1[\sum_{i=1}^{k_1}t_i+k_2\tau_1+(n-r)\tau_1]}e^{-\alpha_2[\sum_{i=1}^{k_1}t_i+k_2\tau_1+(n-r)\tau_1]}\cdot e^{-\beta_1[\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2}(t_i-\tau_1)+(n-r)(\tau_2-\tau_1)]}e^{-\beta_2[\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2}(t_i-\tau_1)+(n-r)(\tau_2-\tau_1)]},$$

$$\ln L(D,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2) = \ln C^+ + r_1\ln\alpha_1 + r_2\ln\alpha_2 + r_3\ln(\alpha_1+\alpha_2) + r_4\ln\beta_1 + r_5\ln\beta_2 + r_6\ln(\beta_1+\beta_2) - \alpha_1\left[\sum_{i=1}^{k_1}t_i+(n-r+k_2)\tau_1\right] - \alpha_2\left[\sum_{i=1}^{k_1}t_i+(n-r+k_2)\tau_1\right] - \beta_1\left[\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2}(t_i-\tau_1)+(n-r)(\tau_2-\tau_1)\right] - \beta_2\left[\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2}(t_i-\tau_1)+(n-r)(\tau_2-\tau_1)\right],$$

$$\frac{\partial\ln L(D,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)}{\partial\alpha_1} = \frac{r_1}{\alpha_1}+\frac{r_3}{\alpha_1+\alpha_2}-\left[\sum_{i=1}^{k_1}t_i+(n-r+k_2)\tau_1\right],$$

$$\frac{\partial\ln L(D,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)}{\partial\alpha_2} = \frac{r_2}{\alpha_2}+\frac{r_3}{\alpha_1+\alpha_2}-\left[\sum_{i=1}^{k_1}t_i+(n-r+k_2)\tau_1\right].$$

令 $\partial\ln L(D,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)/\partial\alpha_1 = 0$，$\partial\ln L(D,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)/\partial\alpha_2 = 0$ 得方程组

$$\frac{r_1}{\alpha_1}+\frac{r_3}{\alpha_1+\alpha_2}-\left[\sum_{i=1}^{k_1}t_i+(n-r+k_2)\tau_1\right]=0,$$

$$\frac{r_2}{\alpha_2}+\frac{r_3}{\alpha_1+\alpha_2}-\left[\sum_{i=1}^{k_1}t_i+(n-r+k_2)\tau_1\right]=0.$$

化简得 $\alpha_2 = r_2\alpha_1/r_1$，$r_1k_1/[\alpha_1(r_1+r_2)] = \sum_{i=1}^{k_1}t_i + (n-r+k_2)\tau_1$，从而参数 α_1,α_2 极大似然估计为

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{r_1}{r_1+r_2}\cdot\frac{k_1}{\sum_{i=1}^{k_1}t_i+(n-r+k_2)\tau_1},$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{r_2}{r_1+r_2}\cdot\frac{k_1}{\sum_{i=1}^{k_1}t_i+(n-r+k_2)\tau_1},$$

$$\frac{\partial\ln L(D,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)}{\partial\beta_1} = \frac{r_4}{\beta_1}+\frac{r_6}{\beta_1+\beta_2}-\left[\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2}(t_i-\tau_1)+(n-r)(\tau_2-\tau_1)\right],$$

$$\frac{\partial\ln L(D,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)}{\partial\beta_2} = \frac{r_5}{\beta_2}+\frac{r_6}{\beta_1+\beta_2}-\left[\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2}(t_i-\tau_1)+(n-r)(\tau_2-\tau_1)\right].$$

令 $\partial\ln L(D,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)/\partial\beta_1 = 0$，$\partial\ln L(D,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)/\partial\beta_2 = 0$ 得方程组

$$\frac{r_4}{\beta_1}+\frac{r_6}{\beta_1+\beta_2}-\left[\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2}(t_i-\tau_1)+(n-r)(\tau_2-\tau_1)\right]=0,$$

$$\frac{r_5}{\beta_2}+\frac{r_6}{\beta_1+\beta_2}-\left[\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2}(t_i-\tau_1)+(n-r)(\tau_2-\tau_1)\right]=0.$$

从而可解得参数 β_1,β_2 的极大似然估计为

$$\hat{\beta}_1 = \frac{r_4}{r_4+r_5}\cdot\frac{k_2}{\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2}(t_i-\tau_1)+(n-r)(\tau_2-\tau_1)},$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{r_5}{r_4+r_5}\cdot\frac{k_2}{\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2}(t_i-\tau_1)+(n-r)(\tau_2-\tau_1)}.$$

3.2　近似区间估计

在给定置信水平下，完全类似于求近似区间估计的方法可得参数的近似区间估计.

例 2　取样本容量 $n=20$，$r=18$，$k_1=6$，$r_1=2$，$r_2=3$，$k_2=12$，$r_4=3$，$r_5=4$，在应力 V_1 下 2 个单元的失效率分别取为 $\alpha_1=0.2$，$\alpha_2=0.4$，在应力 V_2 下 2 个单元的失效率分别取为 $\beta_1=0.6$，$\beta_2=0.8$. 通过 Monte-Carlo 模拟产生的失效数据如下表 2 所示.

4　总结

本文研究简单步进应力加速寿命试验下屏蔽数据的可靠性统计分析，在单元寿命分布服从指数分布的情形下，给出了参数的极大似然估计和近似区间估计，并通过 2 个 Monte-Carlo 算例说明本文方法的可行性，该方法比较适合工程应用.

表2　失效数据

应力	引起系统失效单元集合	系统失效时间
V_1	$s_i=\{1\}$	0.000 3　0.463 6
	$s_i=\{2\}$	0.058 4　0.127 2　0.188 2
	$s_i=\{1,2\}$	0.327 4
V_2	$s_i=\{1\}$	1.126 2　0.929 7　1.725 1
	$s_i=\{2\}$	0.521 7　0.605 4　0.832 3　1.691 9
	$s_i=\{1,2\}$	1.090 5　0.591 3　0.705 8　0.747 2　0.759 3

5　参考文献

[1] Usher J S,Hodgson T J. Maximum likelihood analysis of component reliability using masked system life-test data [J]. IEEE Transactions on Reliability,1988,37(5):550-555.

[2] Doganaksoy N. Interval estimation from censored & masked system-failure data [J]. IEEE Transactions on Reliability,1991,40(3):280-286.

[3] Lin D K J,Usher J S,Guess F M. Exact maximum likelihood estimation using masked system data [J]. IEEE Transactions on Reliability,1993,42(4):631-635.

[4] Reiser B,Guttman I,Lin Dennis K J,et al. Bayesian inference for masked system lifetime data [J]. Appl Statist,1995,44(1):79-90

[5] Usher J S. Weibull Component reliability-prediction in the presence of masked data [J]. IEEE Transactions on Reliability,1996,45(2):229-232.

[6] Lin D K J,Usher H S,Guess F M. Bayes estimation of component-reliability from masked system-life data [J]. IEEE Transactions on Reliability,1996,45(2):233-237.

[7] Sarhan A M. Reliability estimations of components from masked system life data [J]. Reliability Engineering and System Safety,2001,74(1):107-113.

[8] Sarhan A M. The Bayes procedure in exponential reliability family models using conjugate convex tent prior family [J]. Reliability Engineering and System Safety,2001,71(1):97-102.

[9] Sarhan A M. Estimation of system components reliabilities using masked data [J]. Applied Mathematics and Computation,2003,136(1):79-92.

[10] Sarhan A M,El-Bassiouny A H. Estimation of components reliability in a parallel system using masked system life data [J]. Applied Mathematics and Computation,2003,138(1):61-75.

[11] Sarhan A M,El-Gohary A I. Estimations of parameters in Pareto reliability model in the presence of masked data [J]. Reliability Engineering and System Safety,2003,82(1):75-83.

[12] Sarhan A M. Parameter estimations in linear failure rate model using masked data [J]. Applied Mathematics and Computation,2004,151(1):233-249.

[13] Sarhan A M. Parameter estimations in a general hazard rate model using masked data [J]. Applied Mathematics and Computation,2004,153(2):513-536.

[14] Sarhan A M. Bayes estimations for reliability measures in geometric distribution model using masked system life test data [J]. Computational Statistics and Data Analysis,2008,52 (4):821-1836.

[15] El-Gohary A. Bayesian estimation of the parameters in two non-independent component series system with dependent time failure rate [J]. Applied Mathematics and Computation,2004,154(1):41-51.

[16] Mukhopadhyay C. Maximum likelihood analysis of masked series system lifetime data [J]. J Statist Plann Inference,2006,136(3):803-838.

[17] Hutto D E,Mazzuchi T,Sarkani S. Analysis of reliability using masked system life data [J]. International Journal of Quality & Reliability Management,2009,26(7):723-739.

[18] Fan Tsaihung,Wang Wanlun. Accelerated life tests for Weibull series systems with masked data [J]. IEEE Transactions on Reliability,2011,60(3):557-569.

[19] Fan Tsaihung,Hsu Tsungming. Accelerated life tests of a series system with masked interval data under exponential lifetime distributions [J]. IEEE Transactions on Reliability,2012,61(3):798-808.

[20] Lin D K J,Guess F M. System life data analysis with dependent knowledge on the exact cause of system failure [J]. Microelectronics Reliability,1994,34(3):535-544.

[21] Sarhan A M,Guess F M,Usher J S. Estimations for reliability measures in geometric distribution model using dependent masked system life test data [J]. IEEE Trans on Reliability,2007,56(2):312-320.

[22] Lin G I,Reiser D K,Usher B,et al. Dependent masking and system life data analysis,Bayesian inference for two-component systems [J]. Lifetime Data Anal,1995(1):87-100.

[23] Kuo L，Yang T E. Bayesian reliability modeling for masked system lifetime data [J]. Statist Probab Lett，2000，47(3): 229-241.
[24] 张士峰，邓爱民. 含有屏蔽寿命数据的贝叶斯可靠性分析 [J]. 战术导弹技术，2001，3: 34-39.
[25] 姜红燕，张帼奋. 失效率为指数函数的模型中使用屏蔽数据的参数估计 [J]. 浙江大学学报: 理学版，2006，33(2): 125-128.
[26] 顾昕，师义民. 屏蔽数据下双参指数部件的可靠性估计 [J]. 科学技术与工程，2009，9(18): 5316-5319.
[27] 张帆，师义民. 基于屏蔽数据的航空电源系统可靠性分析 [J]. 航天控制，2009，27(4): 96-100.
[28] 刘英，师义民. 屏蔽数据下航天器电源系统的可靠性的统计分析 [J]. 航天控制，2010，28(2): 70-74.
[29] 刘英，师义民，王婷婷. 基于屏蔽数据的部件可靠性指标的贝叶斯估计 [J]. 数理统计与管理，2010，29(5): 853-860.
[30] 刘英，师义民，王婷婷. 含有屏蔽数据的串联统计中 Burr XII 部件可靠性指标的 Bayes 估计 [J]. 系统工程理论与实践，2010，30(4): 689-694.
[31] 张萌，师义民，杨扬. 屏蔽数据下 BurrXⅡ三部件串联系统的可靠性估计 [J]. 系统工程与电子技术，2011，33(1): 222-227.
[32] Hou Hualei，Jiang Yaowei，Shi Yimin. Parameter estimations in BurrXII model using masked data [J]. Chin Quart J of Math，2011，26(2): 251-255.
[33] 张萌，师义民，杨扬. 屏蔽数据下并联系统广义指数部件的可靠性估计 [J]. 信息与控制，2011，40(4): 483-496.
[34] 张萌，师义民. 屏蔽数据下三部件串联系统部件可靠性的 Bayes 估计 [J]. 火力与指挥控制，2011，36(12): 24-30.
[35] 张萌，师义民，杨扬. 含有屏蔽数据的截尾样本下部件的可靠性分析 [J]. 工程数学学报，2012，29(4): 625-632.
[36] 张萌，陆山，杨杨. 截尾情形下基于屏蔽数据的部件可靠性分析 [J]. 系统工程学报，2012，27(1): 137-144.
[37] 顾昕，师义民，谭伟. 屏蔽数据在新型截尾样本下系统的可靠性分析 [J]. 火力与指挥控制，2012，37(15): 97-101.
[38] 张萌，陆山，杨杨. 基于屏蔽数据多重定数截尾下系统部件的可靠性估计 [J]. 系统工程与电子技术，2013，35(5): 1122-1127.
[39] Xu Ancha，Tang Yincai，Bayesian analysis of Pareto reliability with dependent masked data [J]. IEEE Transactions on Reliability，2009，58(4): 583-588.
[40] Wang Ronghua，Xu Xiaoling，Gu Beiqing. The statistical analysis of parallel system for type-I censored test using masked data [C] // Recent Advance in Statistics Application and Related Areas-2nd Conference of the International Institute of Applied Statistics Studies，Qingdao，2009: 789-795.
[41] 徐晓岭，顾蓓青，王蓉华，等. 二元几何分布串联系统在屏蔽数据场合的参数估计 [J]. 西南交通大学学报，2012，47: 91-94.
[42] Xu Ancha，Tang Yincai. An overview on statistical analysis for masked system lifetime data [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics，2012，28(4): 380-388.
[43] 杨剑锋，赵明. 屏蔽数据下软件可靠性的极大似然估计 [J]. 系统工程与电子技术，2013，35(12): 2665-2669.
[44] 师义民，顾昕，孙天宇，等. 相依屏蔽数据下双参数指数部件的可靠性分析 [J]. 西北工业大学学报，2013，31(1): 29-33.
[45] Nelson W. Accelerated life testing step-stress models and data analysis [J]. IEEE Trans On Reliability，1980，29(2): 103-108.
[46] Lawless J F. Statistical models and methods for lifetime data [M]. New York: John Wiley and Sons Inc，1982.

The Statistical Analysis of Mask Data for Type-I Censored Series System under Step-Stress Accelerated Life Test

XU Xiaoling[1]，WANG Ronghua[2*]，GU Beiqing[1]

(1. Business Information Management School，Shanghai University of International Business and Economics，Shanghai 201620，China;
2. Mathematics and Science College，Shanghai Normal University，Shanghai 200234，China)

Abstract: Considering series system of two units with constant failure rate under step-stress accelerated life test，the maximum likelihood estimates and approximate interval estimates of parameters are given in type-I censored masked data situation. Besides，Monte-Carlo simulation examples illustrate the feasibility of the method.

Key words: masked data; type-I censored; series system; maximum likelihood estimate; step-stress accelerated test

(责任编辑: 曾剑锋)