第39卷 第2期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 39 No. 2
2015年3月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Mar. 2015

文章编号:1000-5862(2015)02-0207-04

单位圆内$[p,q]-\varphi(r)$级解析函数与亚纯函数的级与型

涂 金[1],魏竞斯[1],徐洪焱[2]

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022;
2. 景德镇陶瓷学院信息工程学院,江西 景德镇 333403)

摘要:利用Nevanlinna值分布理论对单位圆内具有相同的$[p,q]-\varphi(r)$增长级和不同型的解析函数与亚纯函数$f_1(z)$与$f_2(z)$经过四则运算后的$[p,q]-\varphi(r)$级,$[p,q]-\varphi(r)$下级,$[p,q]-\varphi(r)$型进行了研究,得到了一些新的结果,丰富和完善了原有的一些结论.

关键词:单位圆;亚纯函数;解析函数 $[p,q]-\varphi(r)$级 $[p,q]-\varphi(r)$型

中图分类号:O 174.52 **文献标志码**:A **DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.02.17

0 引言

本文使用大家熟悉的Nevanlinna值分布理论的标准记号[1-2].用$T(r,f)$表示亚纯函数$f(z)$的特征函数,用$M(r,f)$表示解析函数$f(z)$在圆周$|z|=r$上的最大模.本文中p,q均为正整数,并且满足$p\geqslant q\geqslant 1$.规定对于充分大的r,记$\log_1 r=\log r$,$\log_{p+1}r=\log_p(\log r)$且$\exp_1 r=e^r$,$\exp_{p+1}r=\exp(\exp_p r)$,并记$\exp_0 r=r$,$\log_0 r=r$,$\log_{-1}r=\exp_1 r$,$\exp_{-1}r=\log_1 r$.

近几年来,很多学者对复平面上的$[p,q]-\varphi(r)$级亚纯函数以及单位圆上的$[p,q]$级解析函数进行了研究,得到了一些结果[3-7].本文将进一步研究单位圆内$[p,q]-\varphi(r)$级解析函数与亚纯函数的增长性,下面介绍一些基本定义.

定义1[3-4] 假设$\varphi(r)$:$[0,+\infty)\to(0,+\infty)$是一个非减的无界连续函数,且$f(z)$是复平面上的亚纯函数,则$f(z)$的$[p,q]-\varphi(r)$级定义为

$$\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\log_p T(r,f)/\log_q\varphi(r).$$

定义2[5-6] 假设$f(z)$是单位圆内的亚纯函数,则$f(z)$的$[p,q]$级定义为

$$\sigma_{[p,q]}(f)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log_p T(r,f)/\log_q(1/(1-r)),\quad(1)$$

类似定义$f(z)$在单位圆内的$[p,q]-\varphi(r)$级为

$$\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log_p T(r,f)/\log_q\varphi(r),\quad(2)$$

其中(1)式是(2)式的特殊情况,只需要令$\varphi(r)=1/(1-r)$,$r\in(0,1)$即可.

定义3 假设$f(z)$是单位圆内的解析函数,则$f(z)$的最大模$[p,q]$级定义为

$$\sigma_{M,[p,q]}(f)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log_{p+1}M(r,f)/\log_q(1/(1-r)),$$

类似地,$f(z)$在单位圆内的最大模$[p,q]-\varphi(r)$级定义为

$$\sigma_{M,[p,q]}(f,\varphi)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log_{p+1}M(r,f)/\log_q\varphi(r).$$

注1 当$p=q=1$时,令$\sigma_{[1,1]}(f,\varphi)=\sigma(f,\varphi)$,$\sigma_{M,[1,1]}(f,\varphi)=\sigma_M(f,\varphi)$分别表示$f(z)$的$\varphi(r)$级和最大模$\varphi(r)$级.

定义4 假设$f(z)$是单位圆内的亚纯函数,$f(z)$的$[p,q]$下级定义为

$$\mu_{[p,q]}(f)=\underline{\lim_{r\to1^-}}\log_p T(r,f)/\log_q(1/(1-r)).$$

类似地,$f(z)$在单位圆内的$[p,q]-\varphi(r)$下级定义为

$$\mu_{[p,q]}(f,\varphi)=\underline{\lim_{r\to1^-}}\log_p T(r,f)/\log_q\varphi(r).$$

定义5 假设$f(z)$是单位圆内的解析函数,$f(z)$的最大模$[p,q]$下级定义为

$$\mu_{M,[p,q]}(f)=\underline{\lim_{r\to1^-}}\log_{p+1}M(r,f)/\log_q(1/(1-r)).$$

类似地,$f(z)$在单位圆内最大模$[p,q]-\varphi(r)$下级定义为

$$\mu_{M,[p,q]}(f,\varphi)=\underline{\lim_{r\to1^-}}\log_{p+1}M(r,f)/\log_q\varphi(r).$$

定义6 假设$f(z)$是单位圆内的亚纯函数,满足$0<\sigma_{[p,q]}(f)=\sigma_1<\infty$,或者$0<\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=$

收稿日期:2014-11-20
基金项目:江西省自然科学基金(20132BAB211002,20122BAB211005)和江西省教育厅基金(GJJ14271,GJJ14272)资助项目.
作者简介:涂 金(1979-),男,江西鹰潭人,副教授,博士,主要从事复分析研究.

$\sigma_2 < \infty$,则$f(z)$ 的 $[p,q]$ 型和 $[p,q]$-$\varphi(r)$ 型分别定义为

$\tau_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to1^-}}\log_{p-1}T(r,f) / [\log_{q-1}(1/(1-r))]^{\sigma_1}$,

$\tau_{[p,q]}(f,\varphi) = \overline{\lim_{r\to1^-}}\log_{p-1}T(r,f) / [\log_{q-1}\varphi(r)]^{\sigma_2}$.

定义 7 假设$f(z)$ 是单位圆内的解析函数,满足$0 < \sigma_{M,[p,q]}(f) = \sigma_3 < \infty$,或者 $0 < \sigma_{M,[p,q]}(f,\varphi) = \sigma_4 < \infty$,则$f(z)$ 的最大模 $[p,q]$ 型和 $[p,q]$-$\varphi(r)$ 型分别定义为

$\tau_{M,[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to1^-}}\log_p M(r,f) / [\log_{q-1}(1/(1-r))]^{\sigma_3}$,

$\tau_{M,[p,q]}(f,\varphi) = \overline{\lim_{r\to1^-}}\log_p M(r,f) / [\log_{q-1}\varphi(r)]^{\sigma_4}$.

定义 8 假设$f(z)$ 是单位圆内的亚纯函数,且满足$0 < \mu_{[p,q]}(f) = \mu_1 < \infty$,或 $0 < \mu_{[p,q]}(f,\varphi) = \mu_2 < \infty$,则$f(z)$ 的 $[p,q]$ 下型和 $[p,q]$-$\varphi(r)$ 下型分别定义为

$\underline{\tau}_{[p,q]}(f) = \underline{\lim_{r\to1^-}}\log_{p-1}T(r,f) / [\log_{q-1}(1/(1-r))]^{\mu_1}$,

$\underline{\tau}_{[p,q]}(f,\varphi) = \underline{\lim_{r\to1^-}}\log_{p-1}T(r,f) / [\log_{q-1}\varphi(r)]^{\mu_2}$.

注 2 下面将给出单位圆内 $[p,q]$-$\varphi(r)$ 级解析函数的性质,其中$\varphi(r)$: $[0,1) \to (0,+\infty)$ 是非减的无界连续函数,并且在以后的证明过程中,对 $\varphi(r)$ 根据证明的需要会施加以下 2 条件:

(i) $\lim_{r\to1^-}\log_p(1/(1-r))/\log_q\varphi(r) = 0$;

(ii) $\lim_{r\to1^-}\log_q\varphi(s(r))/\log_q\varphi(r) = 1$,

其中$s(r) = 1 - d(1-r)$,$d \in (0,1)$ 是某个常数.

注 3 以下 2 个命题是等价的,读者可以自己证明.

(i) $\lim_{r\to1^-}\log_q\varphi(s(r))/\log_q\varphi(r) = 1$,其中 $s(r) = 1 - d(1-r)$,$d \in (0,1)$ 为某个常数;

(ii) $\lim_{r\to1^-}\log_q\varphi(s(r))/\log_q\varphi(r) = 1$,其中 $s(r) = 1 - d(1-r)$,$d \in (0,1)$ 为任意常数.

注 3 说明注 2 的性质(ii) 中 $d \in (0,1)$ 的存在性与任意性是等价的,因此在本文以后的证明过程中 d 每次出现不必相同,且这个性质在定理 4 和定理 5 的证明过程中将用到.

性质 1 若$f_1(z)$ 和$f_2(z)$ 是单位圆内的解析函数或亚纯函数,有以下几个结论.

(i) 假设$f_1(z)$ 和$f_2(z)$ 是单位圆内的亚纯函数,满足$\sigma_{[p,q]}(f_1,\varphi) = \sigma_8$ 与 $\sigma_{[p,q]}(f_2,\varphi) = \sigma_9$,则 $\sigma_{[p,q]}(f_1 \pm f_2,\varphi) \leqslant \max\{\sigma_8,\sigma_9\}$,$\sigma_{[p,q]}(f_1f_2,\varphi) \leqslant \max\{\sigma_8,\sigma_9\}$,$\sigma_{[p,q]}(f_1/f_2,\varphi) \leqslant \max\{\sigma_8,\sigma_9\}$;

(ii) 假设$f_1(z)$ 和$f_2(z)$ 是单位圆内的亚纯函数,若 $\sigma_8 = \sigma_{[p,q]}(f_1,\varphi) \neq \sigma_{[p,q]}(f_2,\varphi) = \sigma_9$,则 $\sigma_{[p,q]}(f_1 \pm f_2,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(f_1f_2,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(f_1/f_2,\varphi) = \max\{\sigma_8,\sigma_9\}$;

(iii) 假设$f_1(z)$ 和$f_2(z)$ 是单位圆内的亚纯函数,则有 $\mu_{[p,q]}(f_1 + f_2,\varphi) \leqslant \max\{\sigma_{[p,q]}(f_1,\varphi),\mu_{[p,q]}(f_2,\varphi)\}$ 或$\mu_{[p,q]}(f_1 + f_2,\varphi) \leqslant \max\{\sigma_{[p,q]}(f_2,\varphi),\mu_{[p,q]}(f_1,\varphi)\}$ 以及$\mu_{[p,q]}(f_1f_2,\varphi) \leqslant \max\{\sigma_{[p,q]}(f_1,\varphi),\mu_{[p,q]}(f_2,\varphi)\}$ 或$\mu_{[p,q]}(f_1f_2,\varphi) \leqslant \max\{\mu_{[p,q]}(f_1,\varphi),\mu_{[p,q]}(f_2,\varphi)\}$;

(iv) 假设$f_1(z)$ 和$f_2(z)$ 是单位圆内的亚纯函数,满足 $\sigma_{[p,q]}(f_1,\varphi) < \mu_{[p,q]}(f_2,\varphi) \leqslant \infty$,则 $\mu_{[p,q]}(f_1 + f_2,\varphi) = \mu_{[p,q]}(f_1f_2,\varphi) = \mu_{[p,q]}(f_1/f_2,\varphi) = \mu_{[p,q]}(f_2,\varphi)$;

(v) 假设$f_1(z)$ 和$f_2(z)$ 是单位圆内的解析函数,满足$\sigma_{M,[p,q]}(f_1,\varphi) = \sigma_{10}$,$\sigma_{M,[p,q]}(f_2,\varphi) = \sigma_{11}$,则有 $\sigma_{M,[p,q]}(f_1 \pm f_2,\varphi) \leqslant \max\{\sigma_{10},\sigma_{11}\}$ 和 $\sigma_{M,[p,q]}(f_1f_2,\varphi) \leqslant \max\{\sigma_{10},\sigma_{11}\}$. 若$\sigma_{10} \neq \sigma_{11}$,则有 $\sigma_{M,[p,q]}(f_1 \pm f_2,\varphi) = \max\{\sigma_{10},\sigma_{11}\}$;

(vi) 假设$f_1(z)$ 和$f_2(z)$ 是单位圆内的解析函数,则 $\max\{\mu_{M,[p,q]}(f_1 \pm f_2,\varphi),\mu_{M,[p,q]}(f_1f_2,\varphi)\} \leqslant \max\{\mu_{M,[p,q]}(f_1,\varphi),\sigma_{M,[p,q]}(f_2,\varphi)\}$ 或 $\max\{\mu_{M,[p,q]}(f_1 \pm f_2,\varphi),\mu_{M,[p,q]}(f_1f_2,\varphi)\} \leqslant \max\{\mu_{M,[p,q]}(f_2,\varphi),\sigma_{M,[p,q]}(f_1,\varphi)\}$.

1 主要结果

级与型是揭示整函数与亚纯函数增长速度的 2 个重要指标,关于整函数或亚纯函数的增长性,有许多丰富结果[1-4,8]. 在性质 1 的(ii),(iv),(v) 中,当 $\sigma_8 = \sigma_9$,$\sigma_{[p,q]}(f,\varphi) = \mu_{[p,q]}(f,\varphi)$,$\sigma_{10} = \sigma_{11}$,以上结果是否还成立呢?本文主要研究上述几个问题,并得出以下几个关于单位圆内 $[p,q]$-$\varphi(r)$ 级解析函数与亚纯函数级与型的结果.

定理 1 假设$f_1(z)$ 和$f_2(z)$ 是单位圆内的亚纯函数,满足$0 < \sigma_{[p,q]}(f_1,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(f_2,\varphi) = \sigma_{12} < \infty$. 若 $\tau_1 = \tau_{[p,q]}(f_1,\varphi) < \tau_{[p,q]}(f_2,\varphi) = \tau_2 \leqslant \infty$,则$\sigma_{[p,q]}(f_1 \pm f_2,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(f_1f_2,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(f_1/f_2,\varphi) = \sigma_{12}$,且

(i) 当 $p > 1$ 时,有 $\tau_{[p,q]}(f_1 + f_2,\varphi) = \tau_{[p,q]}(f_1f_2,\varphi) = \tau_{[p,q]}(f_1/f_2,\varphi) = \tau_{[p,q]}(f_2,\varphi)$;

(ii) 当$p = q = 1$ 时,有$\tau_2 - \tau_1 \leqslant \max\{\tau(f_1 + f_2,\varphi),\tau(f_1f_2,\varphi),\tau(f_1/f_2,\varphi)\} \leqslant \tau_2 + \tau_1$.

定理 2 假设$f_1(z)$ 和$f_2(z)$ 是单位圆内的亚纯函数,满足$0 < \sigma_{[p,q]}(f_1,\varphi) = \mu_{[p,q]}(f_2,\varphi) < \infty$. 若 $\tau_{[p,q]}(f_1,\varphi) < \underline{\tau}_{[p,q]}(f_2,\varphi) < \infty$,则有$\mu_{[p,q]}(f_1 + f_2,\varphi) = \mu_{[p,q]}(f_1f_2,\varphi) = \mu_{[p,q]}(f_1/f_2,\varphi) = \mu_{[p,q]}(f_2,\varphi)$,且当 $p > 1$ 时,有$\underline{\tau}_{[p,q]}(f_1 + f_2,\varphi) = \underline{\tau}_{[p,q]}(f_1f_2,$

$\varphi) = \underline{\tau}_{[p,q]}(f_1/f_2,\varphi) = \underline{\tau}_{[p,q]}(f_2,\varphi)$.

定理 3　假设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 是单位圆内的解析函数,满足 $0 < \sigma_{M,[p,q]}(f_1,\varphi) = \sigma_{M,[p,q]}(f_2,\varphi) = \sigma_{13} < \infty$. 若 $\tau_{M,[p,q]}(f_1,\varphi) < \tau_{M,[p,q]}(f_2,\varphi) \leqslant \infty$,则有 $\sigma_{M,[p,q]}(f_1+f_2,\varphi) = \sigma_{13}$ 且 $\tau_{M,[p,q]}(f_1+f_2,\varphi) = \tau_{M,[p,q]}(f_2,\varphi)$.

定理 4　假设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 是单位圆内的 $[p,q]$-$\varphi(r)$ 级解析函数,且 $\varphi(r)$ 满足注 2 中的条件(i)和(ii),则有 $\sigma_{M,[p,q]}(f,\varphi) = \sigma_{M,[p,q]}(f',\varphi)$. 若 $0 < \sigma_{M,[p,q]}(f,\varphi) < \infty$,则进一步有 $\tau_{M,[p,q]}(f,\varphi) = \tau_{M,[p,q]}(f',\varphi)$.

定理 5　假设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 是单位圆内的 $[p,q]$-$\varphi(r)$ 级亚纯函数,并且 $\varphi(r)$ 满足 $\lim\limits_{r\to1^-}\log_{p+1}(1/(1-r))/\log_q\varphi(r) = 0$ 以及注 2 中的条件(ii),则有 $\sigma_{[p,q]}(f,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(f',\varphi)$. 若 $0 < \sigma_{[p,q]}(f,\varphi) < \infty$,则进一步有

$$\tau_{[p,q]}(f,\varphi) = \tau_{[p,q]}(f',\varphi).$$

2　引理

引理 1　假设 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 为单位圆内的 m 个亚纯函数,则有

(i) $T(r,f_1f_2\cdots f_m) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} T(r,f_i)$;

(ii) $T(r,f_1+f_2+\cdots+f_m) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} T(r,f_i) + \log m$.

引理 2[9]　假设 $f(z)$ 是单位圆内的亚纯函数,则对任意正整数 k,有

$$m(r,f^{(k)}/f) = S(r,f),$$

其中 $S(r,f) = O\{\log^+ T(r,f) + \log(1/(1-r))\}$,至多除去一例外集 $E_1 \subset [0,1)$ 满足 $\int_{E_1}\frac{\mathrm{d}t}{1-t} < \infty$.

引理 3[10]　假设 $f(z)$ 是单位圆内的亚纯函数且满足 $f(0) = 0$,则

$$m(r,f) = \{1+\varphi(r/R)\}T(R,f') + N(R,f'),\quad(3)$$

其中 $0 < r < R < 1$, $\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\log\frac{1+t}{1-t}$.

引理 4[11]　假设 $g:(0,1)\to R$ 和 $h:(0,1)\to R$ 是满足 $g(r) \leqslant h(r)$ 的单调递增函数,且至多除去一个对数测度有限的集合 $E_2 \subset [0,1)$,则存在某个常数 $d\in(0,1)$ 使得 $g(r) \leqslant h(s(r))$, $\forall r\in[0,1)$ 都成立,其中 $s(r) = 1-d(1-r)$.

3　定理的证明

定理 1 的证明　由 $\tau_1 = \tau_{[p,q]}(f_1,\varphi) < \tau_{[p,q]}(f_2,\varphi) = \tau_2 \leqslant \infty$,根据定义 6 知, $\forall\varepsilon > 0$,当 $r\to1^-$ 时,有

$$T(r,f_1) \leqslant \exp_{p-1}\{(\tau_1+\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r)]^{\sigma_{12}}\},\quad(4)$$

$$T(r,f_2) \leqslant \exp_{p-1}\{(\tau_2+\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r)]^{\sigma_{12}}\}.\quad(5)$$

一方面由(4)~(5)式及引理 1,有

$$T(r,f_1+f_2) \leqslant T(r,f_1)+T(r,f_2)+\log 2 \leqslant \exp_{p-1}\{(\tau_1+\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r)]^{\sigma_{12}}\} + \exp_{p-1}\{(\tau_2+\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r)]^{\sigma_{12}}\} + \log 2,\quad(6)$$

且 $\tau_1 < \tau_2$,由(6)式可得 $\sigma_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi) \leqslant \sigma_{12}$,且当 $p = q = 1$ 时,有 $\tau_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi) \leqslant \tau_1+\tau_2$. 当 $p > 1$ 时, $\forall q\geqslant1$ 均有 $\tau_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi) \leqslant \tau_2$. 另一方面, $\forall\varepsilon\ (0 < 2\varepsilon < \tau_2-\tau_1)$,存在一列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}\to1^-$,有

$$T(r_n,f_1) \leqslant \exp_{p-1}\{(\tau_1+\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r_n)]^{\sigma_{12}}\},\quad(7)$$

$$T(r_n,f_2) \geqslant \exp_{p-1}\{(\tau_2-\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r_n)]^{\sigma_{12}}\}.\quad(8)$$

由(7)~(8)式以及引理 1,有

$$T(r_n,f_1+f_2) \geqslant T(r_n,f_2)-T(r_n,f_1)-\log 2 \geqslant \exp_{p-1}\{(\tau_2-\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r_n)]^{\sigma_{12}}\} - \exp_{p-1}\{(\tau_1+\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r_n)]^{\sigma_{12}}\} - \log 2,\quad(9)$$

且 $\tau_2 > \tau_1$,由(9)式得 $\sigma_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi) \geqslant \sigma_{12}$,且当 $p = q = 1$ 时, $\tau_2-\tau_1 \leqslant \tau_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi)$. 当 $p > 1$ 时, $\forall q\geqslant1$,均有 $\tau_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi) \geqslant \tau_2$.

综上可得 $\sigma_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi) = \sigma_{12}$ 且当 $p > 1$ 时,有 $\tau_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi) = \tau_{[p,q]}(f_2,\varphi)$. 当 $p = q = 1$ 时,有 $\tau_2-\tau_1 \leqslant \tau(f_1+f_2,\varphi) \leqslant \tau_2+\tau_1$.

再由引理 1 可知 $T(r,f_1f_2) \leqslant T(r,f_1)+T(r,f_2)$, $T(r,f_1f_2) \geqslant T(r,f_2)-T(r,f_1)-O(1)$ 以及 $T(r,1/f_2) = T(r,f_2)+O(1)$,结合上式可类似证明剩下的结果.

定理 2 的证明　令 $\tau_3 = \tau_{[p,q]}(f_1,\varphi) < \underline{\tau}_{[p,q]}(f_2,\varphi) = \tau_4 < \infty$,且 $\sigma_{[p,q]}(f_1,\varphi) < \mu_{[p,q]}(f_2,\varphi) = \mu_5$. 由定义 6 和定义 8 知, $\forall\varepsilon > 0$,存在一列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}\to1^-$,有

$$T(r_n,f_1) \leqslant \exp_{p-1}\{(\tau_3+\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r_n)]^{\mu_5}\},\quad(10)$$

$$T(r_n,f_2) \leqslant \exp_{p-1}\{(\tau_4+\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r_n)]^{\mu_5}\}.\quad(11)$$

由(10)~(11)式及引理 1,有

$$T(r_n,f_1+f_2) \leqslant T(r_n,f_1)+T(r_n,f_2)+\log 2 \leqslant \exp_{p-1}\{(\tau_3+\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r_n)]^{\mu_5}\} + \exp_{p-1}\{(\tau_4+\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r_n)]^{\mu_5}\} + \log 2,\quad(12)$$

且 $\tau_3 < \tau_4$,由(12)式可得 $\mu_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi) \leqslant \mu_5$ 且 $\underline{\tau}_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi) \leqslant \tau_4 (p > 1)$. 另一方面, $\forall\varepsilon(0 < 2\varepsilon < \tau_4-\tau_3)$,当 $r\to1^-$ 时,有

$$T(r,f_1) \leqslant \exp_{p-1}\{(\tau_3+\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r)]^{\mu_5}\},$$

$$T(r,f_2) \geqslant \exp_{p-1}\{(\tau_4-\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r)]^{\mu_5}\}.$$

由(10)~(11)式以及引理 1,有

$T(r,f_1+f_2)\geqslant T(r,f_2)-T(r,f_1)-\log 2\geqslant \exp_{p-1}\{(\tau_4-\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r)]^{\mu_5}\}-\exp_{p-1}\{(\tau_3+\varepsilon)[\log_{q-1}\varphi(r)]^{\mu_5}\}-\log 2$,

且 $\tau_3<\tau_4$,由上式可得 $\mu_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi)\geqslant\mu_5$ 且 $\underline{\tau}_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi)\geqslant\tau_4(p>1)$.

综上可得 $\mu_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi)=\mu_5$,当 $p>1$ 时,有 $\underline{\tau}_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi)=\underline{\tau}_{[p,q]}(f_2,\varphi)$.

再由引理 1 可知 $T(r,f_1f_2)\leqslant T(r,f_1)+T(r,f_2)$,$T(r,f_1f_2)\geqslant T(r,f_2)-T(r,f_1)-O(1)$ 以及 $T(r,1/f_2)=T(r,f_2)+O(1)$,结合上式可类似证明剩下的结果.

定理 3 的证明 本定理可由定义 3 及定理 1 的证明方法易证得.

定理 4 的证明 对单位圆中的解析函数 $f(z)$,有 $f(z)=f(0)+\int_0^z f'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$,其中 $|z|=r<1$,其积分路线是单位圆内从 0 到 z 的直线段,由该式可得

$$M(r,f)\leqslant|f(0)|+\left|\int_0^z f'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant|f(0)|+rM(r,f')\leqslant|f(0)|+M(r,f'),$$

即

$$M(r,f')\geqslant M(r,f)-|f(0)|. \tag{13}$$

由(13)式易得 $\sigma_{M,[p,q]}(f',\varphi)\geqslant\sigma_{M,[p,q]}(f,\varphi)$. 另一方面,在圆周 $|z|=r$ 上取一点 z_0 满足 $|f'(z_0)|=M(r,f')$,选取 $s(r)=1-d(1-r)$ 和单位圆内的圆周 $C=\{\zeta:|\zeta-z_0|=s(r)-r\}$,其中 $d\in(0,1)$. 由柯西不等式可得 $f'(z_0)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\mathrm{d}\zeta$ 以及 $\max\{|f(\zeta)|:\zeta\in C\}\leqslant M(s(r),f)$. 有

$$M(r,f')=|f'(z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}(s(r)-r)\right|\mathrm{d}\theta\leqslant\frac{M(s(r),f)}{s(r)-r},$$

即

$$M(r,f')\leqslant M(s(r),f)/[(1-d)(1-r)]. \tag{14}$$

由(14)式及 $\varphi(r)$ 满足注 2 中的 2 个条件,易得

$$\sigma_{M,[p,q]}(f,\varphi)=\sigma_{M,[p,q]}(f',\varphi).$$

若 $0<\sigma_{M,[p,q]}(f,\varphi)=\sigma_{M,[p,q]}(f',\varphi)=\sigma_{14}<\infty$,由(13)式易得

$$\tau_{M,[p,q]}(f',\varphi)\geqslant\tau_{M,[p,q]}(f,\varphi). \tag{15}$$

另一方面,当 $p\geqslant q=1$ 时,由(14)式可得

$$\frac{\log_p M(r,f')}{(\varphi(r))^{\sigma_{14}}}\leqslant\max\left\{\frac{\log_p[1/(1-d)(1-r)]}{(\varphi(r))^{\sigma_{14}}},\frac{\log_p M(s(r),f)}{(\varphi(r))^{\sigma_{14}}}\right\}\leqslant\max\left\{\frac{\log_p[1/(1-d)(1-r)]}{(\varphi(r))^{\sigma_{14}}},\frac{\log_p M(s(r),f)}{(1/(1-s(r)))^{\sigma_{14}}}\cdot\left(\frac{1}{d}\right)^{\sigma_{14}}\right\}. \tag{16}$$

令 $d\to1$,由(16)式及 $\varphi(r)$ 满足的条件易得 $\tau_{M,[p,q]}(f',\varphi)\leqslant\tau_{M,[p,q]}(f,\varphi)$,并结合(15)式可得 $\tau_{M,[p,q]}(f,\varphi)=\tau_{M,[p,q]}(f',\varphi)$. 当 $p\geqslant q\geqslant2$ 时,由(14)式可得

$$\frac{\log_p M(r,f')}{(\log_{q-1}\varphi(r))^{\sigma_{14}}}\leqslant\max\left\{\frac{\log_p[1/(1-d)(1-r)]}{(\log_{q-1}\varphi(r))^{\sigma_{14}}},\frac{\log_p M(s(r),f)}{(\log_{q-1}\varphi(r))^{\sigma_{14}}}\right\}. \tag{17}$$

由(17)式及 $\varphi(r)$ 满足的条件易得 $\tau_{M,[p,q]}(f,\varphi)\leqslant\tau_{M,[p,q]}(f',\varphi)$,并结合(15)式可得 $\tau_{M,[p,q]}(f,\varphi)=\tau_{M,[p,q]}(f',\varphi)$.

定理 5 的证明 一方面由引理 2 可得

$$T(r,f')=m(r,f')+N(r,f')\leqslant m(r,f)+m(r,f'/f)+2N(r,f)\leqslant3T(r,f)+O\{\log[1/(1-r)]\},r\notin E_1, \tag{18}$$

其中 $E_1\in[0,1)$ 满足 $\int_{E_1}\frac{\mathrm{d}t}{1-t}<+\infty$. 由(18)式和引理 4 以及 $\varphi(r)$ 满足定理 5 假设的条件易得 $\sigma_{[p,q]}(f',\varphi)\leqslant\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)$. 另一方面,由引理 3,令 $R=s(r)=1-d(1-r)$,$d\in(0,1)$,$0<r<1$,代入(3)式中可得

$$T(r,f)<\left\{3+\log\frac{2}{(1-d)(1-r)}\right\}T(s(r),f'). \tag{19}$$

由(19)式以及 $\varphi(r)$ 满足定理假设的条件易得 $\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)\leqslant\sigma_{[p,q]}(f',\varphi)$,所以有 $\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(f',\varphi)$. 另外,由(18)~(19)式且 $0<\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)<\infty$ 以及 $\varphi(r)$ 满足定理 5 假设的条件,容易得到 $\tau_{[p,q]}(f,\varphi)=\tau_{[p,q]}(f',\varphi)$.

4 参考文献

[1] 杨乐. 值分布理论及其新研究[M]. 北京:科学出版社,1982.

[2] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京:科学出版社,1995.

[3] 涂金,刘翠云,徐洪焱. 亚纯函数相对于 $\varphi(r)$ 的 $[p,q]$ 增长级[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(1):1-4.

[4] Shen Xia,Tu Jin,Xu Hongyan. Complex oscillation of a second-order linear differential equation with entire coefficients of $[p,q]$-order[J]. Advances in Difference Equations,2014:1-14. DOI:10.1186/1687-1847-2014-200.

[5] Bleaidi B. Growth of solutions to linear equations with analytic coefficients of $[p,q]$-order in the unit disc[J]. Electronic J Diff Equ,2011,156:1-11.

(下转第 214 页)

[13] Gundersen G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates [J]. J London Math Soc, 1988, 12: 88-104.

[14] Tu Jin, Xu Hongyan, Liu Huaming, et al. Complex oscillation of higher-order linear differential equations with coefficients being lacunary series of finite iterated order [J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: 1-8.

[15] Cao Tingbin, Xu Junfeng, Chen Zongxuan. On the meromorphic solutions of linear differential equations on the complex plane [J]. J Math Anal Appl, 2010, 364: 130-142.

The Complex Oscillation of Higher Order Linear Differential Equations with Coefficients of Finite Iterated Order

XIONG Hui, LIU Huifang*

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The growth and zeros of solutions of higher order linear differential equations with entire coefficients of finite iterated order are studied. Some estimations on the iterated order and the iterated convergence exponent of zero sequence are obtained, when there exists one dominant coefficients. The obtained results are extensions of some previous results.

Key words: differential equation; entire function; iterated order; iterated convergence exponent of zero sequence

(责任编辑:王金莲)

(上接第 210 页)

[6] Bleaidi B. Growth and oscillation theory of (p,q)-order analytic solutions of linear equations in the unit disc [J]. Journal of Mathematical Analysis, 2012(3): 1-11.

[7] Tu Jin, Xuan Zuxing. Complex linear differential equations with certain analytic coefficients of $[p,q]$-order in the unit disc [J]. Advances in Difference Equations, 2014: 1-12. DOI: 10.1186/1687-1847-2014-167.

[8] 涂金,黄海霞,徐洪焱,等.单位圆内亚纯函数与解析函数的级与型 [J].江西师范大学学报:自然科学版, 2013, 36(1): 1-4.

[9] Heittokangas J. On complex linear differential equations in the unit disc [J]. Ann Acad Sci Fenn Math Diss, 2002, 122: 1-54.

[10] Hayman W. On the characteristic of functions meromorphic in the unit disk and of their integrals [J]. Acta Math, 1964, 112: 181-214.

[11] Bank S. General theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations [J]. Composition Math, 1972, 25: 61-70.

The Order and Type of Meromorphic Functions and Analytic Functions of $[p,q]$-$\varphi(r)$ Order in the Unit Disc

TU Jin[1], WEI Jingsi[1], XU Hongyan[2]

(1. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;

2. Department of Informatics and Engineering, Jingdezhen Ceramic Institute, Jingdezhen Jiangxi 333403, China)

Abstract: In this paper, the $[p,q]$-$\varphi(r)$ order, lower order and $[p,q]$-$\varphi(r)$ type of $f_1+f_2, f_1f_2, f_1/f_2$ are investigated by using the Nevanlinna value distribution theory, where $f_1(z), f_2(z)$ are meromorphic functions or analytic functions with the same $[p,q]$-$\varphi(r)$ order and different $[p,q]$-$\varphi(r)$ type in the unit disc, and some results are obtained which enrich and improve some previous results.

Key words: unit disc; meromorphic functions; analytic functions; $[p,q]$-$\varphi(r)$ order; $[p,q]$-$\varphi(r)$ type

(责任编辑:王金莲)