第 39 卷 第 2 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 39 No. 2
2015 年 3 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　Mar. 2015

文章编号:1000-5862(2015)02-0211-04

系数为迭代级整函数的高阶线性微分方程的复振荡

熊　辉,刘慧芳*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌　330022)

摘要:研究具有迭代级整函数系数的高阶线性微分方程解的增长性和零点问题.当存在某一系数起主导作用时,得到方程解的迭代级和迭代零点收敛指数的估计,推广了已有的结论.

关键词:微分方程;整函数;迭代级;迭代零点收敛指数

中图分类号:O 174.52　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.02.18

0　引言及主要结果

本文使用值分布理论的标准记号和基本结果[1-2].为了更精确地描述亚纯函数的增长性,引入迭代级的概念,下面是一些相关的记号与定义[2-4].

对任给的$r\in(0,+\infty)$,记$\exp_1 r=e^r$,$\exp_{i+1}r=\exp(\exp_i r)$,$\log_1^+ r=\log^+ r$,$\log_{i+1}^+ r=\log^+(\log_i^+ r)$.设集合$E\subset(0,+\infty)$,记$\chi_E(t)$为$E$的特征函数,$m(E)$,$m_l(E)$分别表示$E$的线测度与对数测度,并且$E$的上对数密度与下对数密度分别定义为

$$\overline{\log d_{ens}}E=\overline{\lim_{r\to\infty}}m_l(E\cap[1,r])/\log r,$$

$$\underline{\log d_{ens}}E=\underline{\lim_{r\to\infty}}m_l(E\cap[1,r])/\log r.$$

定义 1　设p为正整数,亚纯函数$f(z)$的迭代级$\sigma_p(f)$定义为

$$\sigma_p(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_p^+ T(r,f)/\log r.$$

特别地,当$f(z)$为整函数时,$\sigma_p(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_p^+ T(r,f)/\log r=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_{p+1}^+ M(r,f)/\log r$.

注 1　当$p=1,2$时,$\sigma_p(f)$对应的就是大家熟悉的$f(z)$的级与超级.

定义 2　亚纯函数$f(z)$的迭代级的增长指标定义为

$$i(f)=\begin{cases}0,f(z)\text{ 为有理函数},\\ \min\{p\in\mathbf{N}:\sigma_p<\infty\},f(z)\text{ 为超越亚纯函数,且存在某个 }p\in\mathbf{N},\text{使得 }\sigma_p(f)<\infty,\\ \infty,\sigma_p=\infty,\forall p\in\mathbf{N}.\end{cases}$$

定义 3　设p为正整数,亚纯函数$f(z)$的零点序列的迭代收敛指数$\lambda_p(f)$和不同零点序列的迭代收敛指数$\overline{\lambda}_p(f)$分别定义为

$$\lambda_p(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_p^+ N(r,1/f)/\log r,$$

$$\overline{\lambda}_p(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_p^+ \overline{N}(r,1/f)/\log r.$$

考虑 2 阶线性微分方程

$$f''+A(z)f'+B(z)f=0,\tag{1}$$

其中$A(z)$,$B(z)\not\equiv0$为整函数,许多作者研究了这样一个问题[5-9],即当系数$A(z)$,$B(z)$满足什么条件时,方程的每个非零解都具有无穷级?其中在文献[5-6]中,作者证明了当$\sigma(A)<\sigma(B)$或$\sigma(B)<\sigma(A)\leqslant1/2$时,方程(1)的每个非零解都具有无穷级.而当$\sigma(B)<\sigma(A)$时,文献[7]证明了下面的结果.

定理 A　设$\sigma(B)<\sigma(A)<\infty$,$T(r,A)\sim\log M(r,A)$($r\to\infty$,$r\notin E$),其中$E$为对数测度有限的集合,则方程(1)的每个非零解都具有无穷级.

之后,文献[8]证明了定理 B,使得$A(z)$只需在一个更小的范围内满足定理 A 的限制条件.

定理 B　设$\sigma(B)<\sigma(A)<\infty$,$T(r,A)\sim\log M(r,A)$($r\to\infty$,$r\notin E$),其中$E$满足$\overline{\log d_{ens}}E<(\sigma(A)-\sigma(B))/\sigma(A)$,则方程(1)的每个非零解都具有无穷级.

文献[10]将定理 B 延伸到高阶线性微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_1(z)f'+A_0(z)f=F(z),\tag{2}$$

得到

定理 C　设$A_j(z)$($j=0,1,\cdots,k-1$)和$F(z)\not\equiv0$为有穷级整函数,且$\sigma_0:=\max\limits_{j\neq d}\{\sigma(F),\sigma(A_j)\}<$

收稿日期:2014-10-25

基金项目:国家自然科学基金(11201195)和江西省自然科学基金(20122BAB201012)资助项目.

通信作者:刘慧芳(1973-),女,江西丰城人,教授,博士,主要从事复分析的研究.

$\sigma(A_d)<\infty$，$T(r,A_d)\sim\log M(r,A_d)$ $(r\to\infty, r\notin E)$，其中 E 满足 $\overline{\log d_{ens}}E<(\sigma(A_d)-\sigma_0)/\sigma(A_d)$，则方程(2)的每个解都具有无穷级，且有 $\sigma_0\leqslant\sigma_2(f)\leqslant\sigma(A_d)$.

本文继续研究高阶线性微分方程(2)及其对应的齐次微分方程解的增长性，通过引入迭代级的概念，得到了比上述定理更广泛的一些结果.

定理 1 设 $A_j(j=0,1,\cdots,k-1)$ 和 $F(z)$ 为整函数，满足 $\sigma_0:=\max\limits_{j\neq d}\{\sigma_p(A_j),\sigma_p(F)\}<\sigma_p(A_d)<\infty$，$T(r,A_d)\sim\log M(r,A_d)$ $(r\to\infty, r\notin E)$，其中 E 满足 $\overline{\log d_{ens}}E<(\sigma_p(A_d)-\sigma_0)/\sigma_p(A_d)$，则方程(2)的每个非平凡解 f 满足 $\sigma_p(f)=\infty$ 和 $\sigma_0\leqslant\sigma_{p+1}(f)\leqslant\sigma_p(A_d)$. 进一步，若 $F(z)\neq 0$，则方程(2)的每个非平凡解 f 满足 $\sigma_0\leqslant\overline{\lambda}_{p+1}(f)=\lambda_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(f)\leqslant\sigma_p(A_d)$.

记号 $T(r,A_d)\sim\log M(r,A_d)$ $(r\to\infty, r\notin E)$ 是指 $\lim\limits_{r\to\infty, r\notin E}T(r,A_d)/\log M(r,A_d)=1$. 设整函数 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^{\lambda_n}$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}<\infty$，则称 $f(z)$ 为 Fejér 缺项级数[11-12]. 由文献[12]知: 如果 $f(z)$ 为 Fejér 缺项级数，则 $f(z)$ 满足 $T(r,f)\sim\log M(r,f)$ $(r\to\infty, r\notin E)$，其中 E 为对数测度有限的集合，因此由定理 1 可得下述结果.

定理 2 设 $A_j(j=0,1,\cdots,k-1)$ 和 $F(z)$ 为整函数，满足 $\sigma_0:=\max\limits_{j\neq d}\{\sigma_p(A_j),\sigma_p(F)\}<\sigma_p(A_d)<\infty$. 若 A_d 为 Fejér 缺项级数，则方程(2)的每个非平凡解 f 满足 $\sigma_p(f)=\infty$ 和 $\sigma_0\leqslant\sigma_{p+1}(f)\leqslant\sigma_p(A_d)$. 进一步，若 $F(z)\neq 0$，则方程(2)的每个非平凡解 f 满足

$$\sigma_0\leqslant\overline{\lambda}_{p+1}(f)=\lambda_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(f)\leqslant\sigma_p(A_d).$$

1 引理

引理 1[13] 设 $f(z)$ 为超越亚纯函数，$\Gamma=\{(k_1,j_1),\cdots,(k_m,j_m)\}$ 是不同整数对组成的有限集合，满足 $k_i>j_i\geqslant 0(i=1,\cdots,m)$，又设 $\alpha>1$ 是一给定实常数，则存在集合 $E\subset(1,+\infty)$ 有有限对数测度和依赖于 α 和 Γ 的常数 $B>0$，使得对所有满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E$ 的 z 和 $(j,i)\in\Gamma$，有

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right|\leqslant B\Big[\frac{T(\alpha r,f)}{r}\log^{\alpha}r\log T(\alpha r,f)\Big]^{j-i}.$$

引理 2 设 $f(z)$ 为超越整函数，$0<\delta<1/8$，z 是圆周 $|z|=r$ 上使得 $|f(z)|>M(r,f)v(r,f)^{-1/8+\delta}$ 的点，则除去对数测度为有穷的 r 值集合 E 外，有

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}=\Big(\frac{v(r,f)}{z}\Big)^k(1+o(1)),$$

其中 $v(r,f)$ 为 $f(z)$ 的中心指标.

引理 3[14-15] 设 $A_0(z),A_1(z),\cdots,A_{k-1}(z),F(z)\neq 0$ 为亚纯函数，$f(z)$ 为方程(2)的一个满足 $i(f)=p+1(0<p<\infty)$ 的亚纯解. 若 $f(z)$ 满足下列条件之一:

(i) $\max\{i(F),i(A_j):j=0,1,\cdots,k-1\}<p+1$;

(ii) $\max\{\sigma_{p+1}(F),\sigma_{p+1}(A_j):j=0,1,\cdots,k-1\}<\sigma_{p+1}(f)$，

则 $\overline{\lambda}_{p+1}(f)=\lambda_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(f)$.

引理 4 设 $A_0(z),A_1(z),\cdots,A_{k-1}(z),F(z)$ 为整函数满足 $i(A_j)\leqslant p, i(F)\leqslant p(0<p<\infty)(j=0,1,\cdots,k-1)$，则方程(2)的所有解 $f(z)$ 均满足 $\sigma_{p+1}(f)\leqslant\max\{\sigma_p(A_j),\sigma_p(F):j=0,1,\cdots,k-1\}$.

2 定理的证明

定理 1 的证明 由引理 4 可知方程(2)的每个解 $f(z)$ 都满足 $\sigma_{p+1}(f)\leqslant\sigma_p(A_d)$. 下面证明

$$\sigma_{p+1}(f)\geqslant\sigma_0.$$

由定理 1 的条件知方程(2)不可能存在多项式解. 设 $f(z)$ 为方程(2)的 1 个超越解，由方程(2)可得

$$|A_d|\leqslant|f^{(k)}/f^{(d)}|+\cdots+|A_{d+1}||f^{(d+1)}/f^{(d)}|+|f/f^{(d)}|(|A_{d-1}||f^{(d-1)}/f|+\cdots+|A_0|+|F/f|).\quad(3)$$

由引理 1，存在一对数测度有限的集合 E_0 和常数 $B>0$，使得对所有满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_0$ 的点 z，有

$$|f^{(j)}(z)/f^{(d)}(z)|\leqslant B[T(2r,f)]^{2k}, j=d+1,\cdots,k,\quad(4)$$

$$|f^{(j)}(z)/f(z)|\leqslant B[T(2r,f)]^{2k}, j=1,\cdots,d.\quad(5)$$

由于 f 为超越整函数，所以当 $r\to\infty$ 时，有 $v(r,f)\to\infty$. 从而当 $0<\delta<1/8$ 时，有 $\lim\limits_{r\to\infty}v(r,f)^{-1/8+\delta}=0$. 故 $\exists R_0>0$，使得当 $r>R_0$ 时，有

$$v(r,f)^{-1/8+\delta}<1/2.\quad(6)$$

设 $z_r=re^{i\theta_r}$ 为圆周 $|z|=r$ 上满足 $|f(z_r)|=M(r,f)$ 的点，则 $\exists\eta_r>0$，使得当 z 满足 $|z|=r$ 和 $\arg z\in[\theta_r-\eta_r,\theta_r+\eta_r]$ 时，有

$$|f(z)|>M(r,f)/2.\quad(7)$$

从而由(6)~(7)式和引理 2 可知，存在一对数测度有限的集合 E_1，使得对所有满足 $|z|=r\notin[0,R_0]\cup E_1$ 和 $\arg z\in[\theta_r-\eta_r,\theta_r+\eta_r]$ 的点 z，有

$$|f(z)/f^{(d)}(z)|\leqslant 2r^d.\quad(8)$$

取常数 c 满足 $0<c<1/2$，令

$$I_c(r)=\{\theta\in[0,2\pi):\log^+|A_d(re^{i\theta})|<(1-c)\log M(r,A_d)\}.$$

由于 $T(r,A_d) \sim \log M(r,A_d)$ $(r\to\infty, r\notin E)$，且 $\overline{\log d_{ens}}E < (\sigma_p(A_d)-\sigma_0)/\sigma_p(A_d)$，所以 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 和集合 E_2，满足 $\underline{\log d_{ens}}E_2 \geq 1-(\sigma_p(A_d)-\sigma_0)/\sigma_p(A_d)+\varepsilon_0$，使得当 $r\in E_2$ 且 $r\to\infty$ 时，有 $m(I_c(r))\to 0$. 事实上，由于

$T(r,A_d) = m(r,A_d) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{I_c(r)}\log^+|A_d(re^{i\theta})|\,d\theta + \int_{[0,2\pi)\setminus I_c(r)}\log^+|A_d(re^{i\theta})|\,d\theta\right] \leq \frac{1}{2\pi}(1-c)\cdot m(I_c(r))\cdot \log M(r,A_d) + \frac{1}{2\pi}(2\pi - m(I_c(r)))\cdot\log M(r,A_d) = \left[1-\frac{c}{2\pi}\cdot m(I_c(r))\right]\log M(r,A_d).$　　(9)

若 $\lim\limits_{r\to\infty, r\notin E_2} m(I_c(r)) \neq 0$，则由(9)式得 $\lim\limits_{r\to\infty, r\in E_2} T(r,A_d)/\log M(r,A_d) < 1$，这与已知条件矛盾. 所以当 $r\in E_2$ 且 $r\to\infty$ 时，有 $m(I_c(r))\to 0$，且当 z 满足 $|z| = r\in E_2$ 和 $\arg z\notin I_c(r)$ 时，有

$$\log^+|A_d(z)| \geq (1-c)\log M(r,A_d). \tag{10}$$

取实数 a,b 满足 $\sigma_0 < b < a < \sigma_p(A_d)$ 且

$$\frac{a-b}{a} \geq \frac{\sigma_p(A_d)-\sigma_0}{\sigma_p(A_d)} - \frac{\varepsilon_0}{3},$$

由整函数迭代级的定义可知，存在序列 $\{r_n\}$ 及 $R_1 > 0$，使得当 $r_n > R_1$ 时，有

$$\log_p M(r_n,A_d) \geq r_n^a. \tag{11}$$

因此，当 $r\in[r_n, r_n^{a/b}]$ 时，由(11)式有

$$\log_p M(r,A_d) \geq \log_p M(r_n,A_d) \geq (r_n^{a/b})^b \geq r^b.$$

令 $E_3 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[r_n, r_n^{a/b}]\setminus[0,R_1]$，则 $\overline{\log d_{ens}}E_3 \geq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} m_l(E_3\cap[1,r_n^{a/b}])/\log r_n^{a/b} \geq a-b/a$，且当 $r\in E_3$ 时，有

$$\log_p M(r,A_d) \geq r^b. \tag{12}$$

由于集合 E_2 和 E_3 的特征函数满足 $\chi_{E_2\cap E_3}(t) = \chi_{E_2}(t)+\chi_{E_3}(t)-\chi_{E_2\cup E_3}(t)$，因此

$\overline{\log d_{ens}}(E_2\cap E_3) \geq \underline{\log d_{ens}}E_2 + \overline{\log d_{ens}}E_3 - \overline{\log d_{ens}}(E_2\cup E_3) \geq 2\varepsilon_0/3.$

所以由(10)式和(12)式得，当 z 满足 $|z| = r\in E_2\cap E_3$ 和 $\arg z\notin I_c(r)$ 时，有

$$\log_p^+|A_d(z)| \geq r^b/2. \tag{13}$$

由 $\max\{\sigma_p(A_j),\sigma_p(F): j\neq d\} = \sigma_0 < b$ 和(7)式得 $\forall\varepsilon > 0$ $(0 < 2\varepsilon < b-\sigma_0)$，$\exists R_2 > 0$，使得当 z 满足 $|z| = r > R_2$ 和 $\arg z\in[\theta_r-\eta_r, \theta_r+\eta_r]$ 时，有

$$|A_j(z)| \leq \exp_p\{r^{\sigma_0+\varepsilon}\},$$

$$|F(z)/f(z)| \leq |F(z)| \leq \exp_p\{r^{\sigma_0+\varepsilon}\}. \tag{14}$$

令 $H = [0,1]\cup[0,R_0]\cup[0,R_2]\cup E_0\cup E_1$，则 $\overline{\log d_{ens}}H = 0$. 再结合(3)～(5)式，(8)式和(13)～(14)式得，当 z 满足 $|z| = r\in(E_2\cap E_3)\setminus H$ 和 $\arg z\in[\theta_r-\eta_r, \theta_r+\eta_r]\setminus I_c(r)$ 时，有

$$\exp_p\{r^b/2\} \leq |A_d(z)| \leq (k+1)B[T(2r,f)]^{2k}\cdot 2r^d\cdot\exp_p\{r^{\sigma_0+\varepsilon}\}. \tag{15}$$

故由(15)式得 $\sigma_{p+1}(f) \geq b$. 再由 b 的选取可知 $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_0$.

综上可知：方程(2)的每个非平凡解 f 满足 $\sigma_p(f) = \infty$ 和 $\sigma_0 \leq \sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_d)$. 进一步，若 $F(z)\neq 0$，则由引理 3 知 $\sigma_0 \leq \overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_d)$. 定理 1 得证.

3　参考文献

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京：科学出版社，1982.

[2] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations[M]. Berlin：W de Gruyter，1993.

[3] Kinnunen L. Linear differential equations with solutions of finite iterated order[J]. Southeast Asian Bull Math，1998，22(4)：385-405.

[4] 何静，郑秀敏. 几类高阶线性微分方程亚纯解的迭代级[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2012，36(6)：584-588.

[5] Gundersen G. Finite order solutions of second order linear differential equations[J]. Trans Amer Math Soc，1988，305：415-429.

[6] Hellerstein S，Mile J，Rossi J. On the growth of solutions of $f''+gf'+hf=0$[J]. Trans Amer Math Soc，1991，324：693-706.

[7] Laine I，Wu Pengcheng. Growth of solutions of second order linear differential equations[J]. Proc Amer Math Soc，2000，128：2693-2703.

[8] Kwon K，Kim J. Maximum modulus，characteristic，deficiency and growth of solutions of second order linear differential equations[J]. Kodai Math J，2001，24：344-351.

[9] 石磊，易才凤. 一类高阶线性微分方程解的增长性[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2012，36(3)：230-233.

[10] Rong Chang，Cai Huiping，Wang Jun. Growth of nonhomogenous higher order linear differential equations[J]. Journal of Fudan University，2011，50(1)：47-51.

[11] Hayman W，Rossi J. Characteristic，maximum modulus and value distribution[J]. Trans Amer Math Soc，1984，284：651-664.

[12] Murai T. The deficiency of entire functions with Fejér gaps[J]. Ann Inst Fourier，1983，33：39-58.

[13] Gundersen G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates [J]. J London Math Soc, 1988, 12: 88-104.
[14] Tu Jin, Xu Hongyan, Liu Huaming, et al. Complex oscillation of higher-order linear differential equations with coefficients being lacunary series of finite iterated order [J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: 1-8.
[15] Cao Tingbin, Xu Junfeng, Chen Zongxuan. On the meromorphic solutions of linear differential equations on the complex plane [J]. J Math Anal Appl, 2010, 364: 130-142.

The Complex Oscillation of Higher Order Linear Differential Equations with Coefficients of Finite Iterated Order

XIONG Hui, LIU Huifang*
(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The growth and zeros of solutions of higher order linear differential equations with entire coefficients of finite iterated order are studied. Some estimations on the iterated order and the iterated convergence exponent of zero sequence are obtained, when there exists one dominant coefficients. The obtained results are extensions of some previous results.

Key words: differential equation; entire function; iterated order; iterated convergence exponent of zero sequence
(责任编辑: 王金莲)

(上接第 210 页)

[6] Bleaidi B. Growth and oscillation theory of (p,q)-order analytic solutions of linear equations in the unit disc [J]. Journal of Mathematical Analysis, 2012(3): 1-11.
[7] Tu Jin, Xuan Zuxing. Complex linear differential equations with certain analytic coefficients of $[p,q]$-order in the unit disc [J]. Advances in Difference Equations, 2014: 1-12. DOI: 10.1186/1687-1847-2014-167.
[8] 涂金, 黄海霞, 徐洪焱, 等. 单位圆内亚纯函数与解析函数的级与型 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2013, 36(1): 1-4.
[9] Heittokangas J. On complex linear differential equations in the unit disc [J]. Ann Acad Sci Fenn Math Diss, 2002, 122: 1-54.
[10] Hayman W. On the characteristic of functions meromorphic in the unit disk and of their integrals [J]. Acta Math, 1964, 112: 181-214.
[11] Bank S. General theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations [J]. Compositio Math, 1972, 25: 61-70.

The Order and Type of Meromorphic Functions and Analytic Functions of $[p,q]$-$\varphi(r)$ Order in the Unit Disc

TU Jin[1], WEI Jingsi[1], XU Hongyan[2]
(1. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;
2. Department of Informatics and Engineering, Jingdezhen Ceramic Institute, Jingdezhen Jiangxi 333403, China)

Abstract: In this paper, the $[p,q]$-$\varphi(r)$ order, lower order and $[p,q]$-$\varphi(r)$ type of f_1+f_2, f_1f_2, f_1/f_2 are investigated by using the Nevanlinna value distribution theory, where $f_1(z)$, $f_2(z)$ are meromorphic functions or analytic functions with the same $[p,q]$-$\varphi(r)$ order and different $[p,q]$-$\varphi(r)$ type in the unit disc, and some results are obtained which enrich and improve some previous results.

Key words: unit disc; meromorphic functions; analytic functions; $[p,q]$-$\varphi(r)$ order; $[p,q]$-$\varphi(r)$ type
(责任编辑: 王金莲)