第 39 卷 第 2 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 39 No. 2
2015 年 3 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　Mar. 2015

文章编号:1000-5862(2015)02-0215-03

解混合线性互补问题的罚方法研究

范琼琪,孙　哲*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌　330022)

摘要:在将混合线性互补问题转化为求解非光滑方程组的基础上,建立了求解混合线性互补问题的罚方法,并且在一定条件下证明了算法的收敛性,最后通过数值算例验证了算法的可行性.

关键词:混合线性互补问题;罚方法;收敛性

中图分类号:O 221.1;O 211.6　**文献标志码**:A　**DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.02.19

0　引言

考虑如下形式的混合线性互补问题:求 $x^* \in \mathbf{R}^n$ 使得

$$\begin{cases}(Ax^* - b)_i \geqslant 0, x_i^* = \Phi_i,\\ (Ax^* - b)_i \leqslant 0, x_i^* = \Psi_i,\\ (Ax^* - b)_i = 0, \Phi_i < x_i^* < \Psi_i,\end{cases} \quad (1)$$

其中 $i = 1,2,\cdots,n$,$b \in \mathbf{R}^n$,矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为 M 矩阵[1-2].若 $\Psi_i = +\infty$ $(i = 1,2,\cdots,n)$,则混合线性互补问题(1)退化为线性互补问题[3]:

$$x \geqslant \Phi, Ax \geqslant b, (x - \Phi)^{\mathrm{T}}(Ax - b) = 0. \quad (2)$$

互补问题是数学规划中的一类基本问题,在对策论、经济学和力学等领域有重要应用背景[4],该问题的数值解法研究是数学规划领域的一个重要研究分支.

近年来,构造罚方法解线性互补问题(2)受到了国内外学者的广泛关注[5-8],该方法已被大量应用于求解期权定价问题[9-14].尽管在数值求解互补问题以及期权定价问题方面罚方法取得了大量的研究成果,但是对于混合线性互补问题(1),相关的研究工作却较少[15].本文将构造罚方法来解混合线性互补问题(1),并且在一定条件下研究算法的收敛性,然后将通过算例来验证算法的可行性.

1　算法及其收敛性

将构造罚方法来解混合线性互补问题(1)并分析算法的收敛性.由文献[1]知,混合线性互补问题(1)等价于非光滑方程组

$$mid\{x - \Phi, Ax - b, x - \Psi\} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

其中算子 $mid\{x,y,z\}$ 表示按照向量 x,y,z 的对应分量分别取中间值.利用 mid 算子,构造如下形式的非线性方程组:求 $x_\rho \in \mathbf{R}^n$ 使得

$$Ax_\rho - b - \rho mid\{\Phi - x_\rho, \mathbf{0}, \Psi - x_\rho\} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

称非线性方程组(4)为混合线性互补问题(1)的罚方程,其中 $\rho > 0$ 为罚参数.特别地,若 $\Psi_i = +\infty$ $(i = 1,2,\cdots,n)$,罚方程(4)退化为

$$Ax_\rho - b - \rho\max\{\Phi - x_\rho, \mathbf{0}\} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

由文献[5,8]知方程组(5)是线性互补问题(3)的罚方程.

接下来将研究罚方法的收敛性.为此,首先给出罚方程(4)解的存在唯一性结论.由于文章篇幅的限制,在这里只证明解的唯一性.

定理 1　罚方程(4)的解唯一.

证(反证法)　假定罚方程有 2 个解分别为 $x_{\rho,1}$ 和 $x_{\rho,2}$,且 $x_{\rho,1} \neq x_{\rho,2}$.那么一定存在 2 个不相交的非空指标集:

$$E_1 = \{i \mid (x_{\rho,1})_i > (x_{\rho,2})_i\}, E_2 = \{i \mid (x_{\rho,1})_i \leqslant (x_{\rho,2})_i\}.$$

从而有

$$(\Phi - x_{\rho,1})_{E_1} < (\Phi - x_{\rho,2})_{E_1}, (\Psi - x_{\rho,1})_{E_1} < (\Psi - x_{\rho,2})_{E_1},$$
$$(\Phi - x_{\rho,1})_{E_2} \geqslant (\Phi - x_{\rho,2})_{E_2}, (\Psi - x_{\rho,1})_{E_2} \geqslant (\Psi - x_{\rho,2})_{E_2}.$$

由(4)式知

$$Ax_{\rho,1} - b - \rho mid\{\Phi - x_{\rho,1}, \mathbf{0}, \Psi - x_{\rho,1}\} = \mathbf{0}, Ax_{\rho,2} - b - \rho mid\{\Phi - x_{\rho,2}, \mathbf{0}, \Psi - x_{\rho,2}\} = \mathbf{0}.$$

从而,

$$(A(x_{\rho,1} - x_{\rho,2}))_{E_1} = \rho mid\{(\Phi - x_{\rho,1})_{E_1}, \mathbf{0}, (\Psi - x_{\rho,1})_{E_1}\} - \rho mid\{(\Phi - x_{\rho,2})_{E_1}, \mathbf{0}, (\Psi - x_{\rho,2})_{E_1}\} \leqslant \mathbf{0},$$

即 $(A(x_{\rho,1} - x_{\rho,2}))_{E_1} = A_{E_1E_1}(x_{\rho,1} - x_{\rho,2})_{E_1} +$

收稿日期:2014-11-20

基金项目:国家自然科学基金(11201197,11126147),江西省自然科学基金(20132BAB211011)和江西省教育厅基金(GJJ13204)资助项目.

通信作者:孙　哲(1983-),男,湖南邵阳人,副教授,博士,主要从事非线性方程数值解法的研究.

$A_{E_1E_2}(x_{\rho,1}-x_{\rho,2})_{E_2}\leqslant \mathbf{0}$. 由于 A 为 M 矩阵，所以 $(A_{E_1E_1})$ 为 M 矩阵且 $A_{E_1E_2}\leqslant 0$. 于是 $A_{E_1E_1}(x_{\rho,1}-x_{\rho,2})_{E_1}\leqslant -A_{E_1E_2}(x_{\rho,1}-x_{\rho,2})_{E_2}\leqslant 0$. 上式意味着 $(x_{\rho,1}-x_{\rho,2})_{E_1}\leqslant 0$. 这与 $(x_{\rho,1})_{E_1}>(x_{\rho,1})_{E_1}$ 矛盾. 因此假定不成立，即罚方程的解唯一，定理 1 得证.

对罚方程(4)的解 x_ρ，定义如下 3 个不相交的指标集:

$$I_1=\{i\mid \Phi_i-(x_\rho)_i<\Psi_i-(x_\rho)_i\leqslant 0\},$$
$$I_2=\{i\mid \Phi_i-(x_\rho)_i<0<\Psi_i-(x_\rho)_i\},$$
$$I_3=\{i\mid 0\leqslant \Phi_i-(x_\rho)_i<\Psi_i-(x_\rho)_i\}.$$

定理2 若 x_ρ 是罚方程(4)的解，则存在 1 个与 ρ 无关的常数 $C_1>0$ 使得

$$\|x_\rho\|_\infty\leqslant C_1.$$

证 对于指标集 I_2，

$$(\boldsymbol{\Phi})_{I_2}<(x_\rho)_{I_2}<(\boldsymbol{\Psi})_{I_2},\tag{6}$$

而对于指标集 I_3，

$$(x_\rho)_{I_3}<(\boldsymbol{\Phi})_{I_3}.\tag{7}$$

由罚方程(4)可得 $(Ax_\rho-b)_{I_3}=\rho(\boldsymbol{\Phi}-x_\rho)_{I_3}\geqslant 0$，即

$$A_{I_3I_1}(x_\rho)_{I_1}+A_{I_3I_2}(x_\rho)_{I_2}+A_{I_3I_3}(x_\rho)_{I_3}-b_{I_3}\geqslant 0.$$

由于 A 为 M 矩阵，所以 $(A_{I_3I_3})$ 为 M 矩阵且 $A_{I_3I_1}\leqslant 0$，$A_{I_3I_2}\leqslant 0$. 从而

$$A_{I_3I_3}(x_\rho)_{I_3}\geqslant -A_{I_3I_1}(x_\rho)_{I_1}-A_{I_3I_2}(x_\rho)_{I_2}+b_{I_3}\geqslant -A_{I_3I_1}(\boldsymbol{\Psi})_{I_1}-A_{I_3I_2}(\boldsymbol{\Phi})_{I_2}+b_{I_3}.$$

结合(7)式可知

$$A_{I_3I_3}^{-1}(-A_{I_3I_1}(\boldsymbol{\Psi})_{I_1}-A_{I_3I_2}(\boldsymbol{\Phi})_{I_2}+b_{I_3})\leqslant (x_\rho)_{I_3}\leqslant(\boldsymbol{\Phi})_{I_3}.\tag{8}$$

对于指标集 I_1，$(x_\rho)_{I_1}\geqslant(\boldsymbol{\Psi})_{I_1}$. 由罚方程(4)知 $(Ax_\rho-b)_{I_1}=\rho(\boldsymbol{\Psi}-x_\rho)_{I_1}\leqslant 0$，即

$A_{I_1I_1}(x_\rho)_{I_1}+A_{I_1I_2}(x_\rho)_{I_2}+A_{I_1I_3}(x_\rho)_{I_3}-b_{I_1}\leqslant 0$，从而 $A_{I_1I_1}(x_\rho)_{I_1}\leqslant -A_{I_1I_2}(x_\rho)_{I_2}-A_{I_1I_3}(x_\rho)_{I_3}+b_{I_1}\leqslant -A_{I_1I_2}(\boldsymbol{\Psi})_{I_2}-A_{I_1I_3}(\boldsymbol{\Phi})_{I_3}+b_{I_1}$. 由于 $(A_{I_1I_1})$ 为 M 矩阵且 $A_{I_1I_2}\leqslant 0$，$A_{I_1I_3}\leqslant 0$，有

$$(\boldsymbol{\Psi})_{I_1}\leqslant(x_\rho)_{I_1}\leqslant A_{I_1I_1}^{-1}(-A_{I_1I_2}(\boldsymbol{\Psi})_{I_2}-A_{I_1I_3}(\boldsymbol{\Phi})_{I_3}+b_{I_1}).\tag{9}$$

结合(6)式、(8)式和(9)式可知存在与 ρ 无关的常数 $C_1>0$，使得 $\|x_\rho\|_\infty\leqslant C_1$. 定理 2 得证.

定理3 若 x_ρ 是罚方程(4)的解，则存在 1 个与 ρ 无关常数 $C_2>0$，使得

$$\|mid\{x_\rho-\boldsymbol{\Phi},Ax_\rho-b,x_\rho-\boldsymbol{\Psi}\}\|_\infty\leqslant C_2/\rho.$$

证 $\forall i\in I_1$，由罚方程(4)知

$$(Ax_\rho-b)_i\leqslant(x_\rho)_i-\Psi_i<(x_\rho)_i-\Phi_i,$$
$$(Ax_\rho-b)_i=\rho mid\{(\boldsymbol{\Phi}-x_\rho)_i,0,(\boldsymbol{\Psi}-x_\rho)_i\}=\rho(\boldsymbol{\Psi}-x_\rho)_i\leqslant 0,$$

从而

$$mid\{(x_\rho-\boldsymbol{\Phi})_i,(Ax_\rho-b)_i,(x_\rho-\boldsymbol{\Psi})_i\}=(x_\rho-\boldsymbol{\Psi})_i=-(Ax_\rho-b)_i/\rho,\forall i\in I_1.\tag{10}$$

$\forall i\in I_2$，由罚方程(4)不难得到

$$(x_\rho)_i-\Psi_i<(Ax_\rho-b)_i<(x_\rho)_i-\Phi_i,$$
$$(Ax_\rho-b)_i=\rho mid\{(\boldsymbol{\Phi}-x_\rho)_i,0,(\boldsymbol{\Psi}-x_\rho)_i\}=0,$$

从而

$$mid\{(x_\rho-\boldsymbol{\Phi})_i,(Ax_\rho-b)_i,(x_\rho-\boldsymbol{\Psi})_i\}=0,\quad\forall i\in I_2.\tag{11}$$

$\forall i\in I_3$，由罚方程(4)得

$$(x_\rho)_i-\Psi_i<(x_\rho)_i-\Phi_i\leqslant(Ax_\rho-b)_i,$$
$$(Ax_\rho-b)_i=\rho mid\{(\boldsymbol{\Phi}-x_\rho)_i,0,(\boldsymbol{\Psi}-x_\rho)_i\}=\rho(\boldsymbol{\Phi}-x_\rho)_i,$$

从而

$$mid\{(x_\rho-\boldsymbol{\Phi})_i,(Ax_\rho-b)_i,(x_\rho-\boldsymbol{\Psi})_i\}=(x_\rho-\boldsymbol{\Phi})_i=-(Ax_\rho-b)_i/\rho,\forall i\in I_3.\tag{12}$$

结合(10)式～(12)式得

$$\|mid\{x_\rho-\boldsymbol{\Phi},Ax_\rho-b,x_\rho-\boldsymbol{\Psi}\}\|_\infty\leqslant\|Ax_\rho-b\|_\infty/\rho\leqslant(\|A\|_\infty\|x_\rho\|_\infty+\|b\|_\infty)/\rho.$$

由定理 2 知 $\|x_\rho\|_\infty\leqslant C_1$，从而

$$\|mid\{x_\rho-\boldsymbol{\Phi},Ax_\rho-b,x_\rho-\boldsymbol{\Psi}\}\|_\infty\leqslant(\|A\|_\infty C_1+\|b\|_\infty)/\rho=C_2/\rho,$$

其中 $C_2=\|A\|_\infty C_1+\|b\|_\infty$ 与 ρ 无关. 定理 3 得证.

定理4 假定 x_ρ 是罚方程(4)的解，x^* 是混合线性互补问题(1)的解，则当 $\rho\to\infty$ 时，x_ρ 收敛到 x^*.

证(反证法) 假设 x_ρ 不收敛到 x^*. 由定理 2 知 $\|x_\rho\|_\infty\leqslant C_1$. 那么一定存在 1 个子列 $\{x_{\rho'}\}$ 及向量 x^{**}，使得 $x_{\rho'}\to x^{**}$ 且 $mid\{x^{**}-\boldsymbol{\Phi},Ax^{**}-b,x^{**}-\boldsymbol{\Psi}\}\neq\mathbf{0}$. 从而

$$\|mid\{x^{**}-\boldsymbol{\Phi},Ax^{**}-b,x^{**}-\boldsymbol{\Psi}\}\|_\infty>0.\tag{13}$$

由定理 3 知

$$\|mid\{x_{\rho'}-\boldsymbol{\Phi},Ax_{\rho'}-b,x_{\rho'}-\boldsymbol{\Psi}\}\|_\infty<C/\rho'.$$

在上式中令 $\rho'\to\infty$，那么 $\|mid\{x^{**}-\boldsymbol{\Phi},Ax^{**}-b,x^{**}-\boldsymbol{\Psi}\}\|_\infty=0$. 这与(13)式矛盾，从而假设不成立，故 $x_\rho\to x^*$. 定理 4 得证.

2 数值算例

通过 1 个简单数值算例来验证罚方法的可行性. 考虑混合线性互补问题(1)，其中

$$A=\begin{pmatrix}4&-2&-1\\0&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\Psi}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

直接计算可得混合线性互补问题(1)的解 $x^*=[0.750\,0\quad 1.500\,0\quad 1.000\,0]^{\mathrm{T}}$.

下面将通过罚方法来求解混合线性互补问题，在罚方程(4)中，选取罚参数 ρ 如下: $\rho=5^0$，$\rho=5^1$，$\rho=5^2$，$\rho=5^3$，$\rho=5^4$，$\rho=5^5$，$\rho=5^6$，$\rho=5^7$. 对每一个罚参数 ρ，表(1)列出了罚方程的解 x_ρ.

表 1 不同罚参数下的解

罚参数 ρ	罚方程的解 x_ρ
$\rho = 5^0$	$[1.000\ 0\ 1.750\ 0\ 1.500\ 0]^T$
$\rho = 5^1$	$[0.833\ 3\ 1.583\ 3\ 1.166\ 7]^T$
$\rho = 5^2$	$[0.769\ 2\ 1.519\ 2\ 1.038\ 5]^T$
$\rho = 5^3$	$[0.754\ 0\ 1.504\ 0\ 1.007\ 9]^T$
$\rho = 5^4$	$[0.750\ 8\ 1.500\ 8\ 1.001\ 6]^T$
$\rho = 5^5$	$[0.750\ 2\ 1.500\ 2\ 1.000\ 3]^T$
$\rho = 5^6$	$[0.750\ 0\ 1.500\ 0\ 1.000\ 1]^T$
$\rho = 5^7$	$[0.750\ 0\ 1.500\ 0\ 1.000\ 0]^T$

从表 1 不难发现,随着罚参数的增大,罚方程的解收敛于混合线性互补问题的解,而且罚方程的解单调递减地收敛于精确解.

3 结论

本文基于线性互补问题的数值解法,提出了罚方法来求解混合线性互补问题. 首先将混合线性互补问题转化为求解非光滑方程组,然后建立求解混合线性互补问题的罚方程,接着在一定条件下证明了算法的收敛性,最后在一定条件下证明了罚方程的解收敛于混合线性互补问题的解. 数值算例表明,随着罚参数 ρ 增大,罚方程的解收敛于混合线性互补问题的解,而且罚方程的解单调递减地收敛于精确解,数值算例验证了收敛性结果.

4 参考文献

[1] Sun Zhe,Zeng Jinping. A damped semismooth Newton method for mixed linear complementarity problems [J]. Optim Methods Softw,2011,26(2):187-205.

[2] Ortega J M,Rheinboldt W C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables [M]. San Diego-New York-London: Academic Press,1970.

[3] Facchinei F,Pang J S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems [M]. New York: Springer,2003.

[4] Ferris M C,Pang J S. Engineering and economic applications of complementarity problems [J]. SIAM Review, 1997,39(4):669-713.

[5] Wang Song,Yang Xiaoqi. A power penalty method for a linear complementarity problems [J]. Oper Res Lett, 2008,36:211-214.

[6] Huang Chongchao,Wang Song. A power penalty approach to a nonlinear complementarity problem [J]. Oper Res Lett,2010,38(1):72-76.

[7] Huang Chongchao,Wang Song. A penalty method for a mixed nonlinear complementarity problem [J]. Nonlinear Anal,2012,5(2):588-597.

[8] Forsyth P A,Vetzal K R. Quadratic convergence for valuing American options using a penalty method [J]. SIAM J Sci Comput,2002,23(6):2095-2122.

[9] Wang Song,Yang Xiaoqi,Teo K L. Power penalty method for a linear complementarity problem arising from American option valuation [J]. J Optim Theory Appl,2006,129(2):227-254.

[10] Zhang Kai,Yang Xiaoqi,Teo K L. Convergence analysis of a monotonic penalty method for American option pricing [J]. J Math Anal Appl,2008,348(2):915-926.

[11] Zhang Kai. Applying a power penalty method to numerically pricing American bond options [J]. J Optim Theory Appl,2012,154(1):278-291.

[12] Zhang Kai,Teo K L. Convergence analysis of power penalty method for American bond option pricing [J]. J Global Optim,2013,56(4):1313-1323.

[13] 刘哲,孙哲,黄晓梅. 求解美式期权定价问题的 2 类新的迭代算法 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(4):68-72.

[14] Jiang Min,Rui Shen,Xu Xinsheng,et al. Second-order smoothing objective penalty function for constrained optimization problems [J]. Numer Funct Anal Optim,2014,35(3):294-309.

[15] Wang Song. A penalty method for a finite-dimensional obstacle problem with derivative constraints [J]. Optim Lett,2014,8(6):1799-1811.

The Penalty Method for Solving Mixed Linear Complementarity Problems

FAN Qiongqi,SUN Zhe*

(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: Mixed linear complementarity problem can be reformulated as a nonsmooth equation. A penalty function method is proposed for solving the mixed linear complementarity problem. The convergence of the algorithm is established. Preliminary experiments show the effectiveness of the algorithm.

Key words: mixed linear complementarity problem; penalty method; the convergence

(责任编辑:曾剑锋)