第 39 卷 第 3 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 39 No. 3
2015 年 5 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　May 2015

文章编号:1000-5862(2015)03-0276-05

可数逼近偏序集的若干性质

胡珺珺,张红霞*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌　330022)

摘要: 可数逼近偏序集是连续偏序集的一种推广,讨论了可数逼近偏序集的一些拓扑性质以及与连续映射相关的性质,结果表明:可数逼近偏序集具有许多类似于连续偏序集的良好性质.

关键词: 可数逼近偏序集; 可数 Scott 拓扑; 代数可数逼近偏序集

中图分类号: O 153.3; O 152.7　**文献标志码**: A　**DOI**: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.03.10

0　引言

Domain 理论属于理论计算机科学最重要的内容,其目的是为程序语言的语义学奠定数学基础,是计算机科学与数学研究工作者共同感兴趣的一个活跃领域.从纯数学的角度看,Domain 理论主要是以满足一定条件的偏序集以及它们之间的映射为研究对象.Domain 理论研究的一个重要内容是尽可能地将连续格(Domain)理论推广到更为一般的序结构上.基于连续偏序集定义中的 way below 关系,文献[1-2]引入可数 way-below 关系的概念,在此基础上将连续偏序集推广至可数逼近偏序集(countably approximating poset)并将连续格(连续偏序集)的许多性质巧妙地"移植"到可数逼近格(可数逼近偏序集)中.作为一个应用,文献[1]得到了一个重要结论:正则空间为局部 Lindelöf 空间当且仅当其开集格为可数逼近格.文献[3]将"点"与"点"之间的可数 way below 关系推广至"集"与"集"的情形,在此基础上把可数逼近偏序集推广至广义可数逼近偏序集,有关可数逼近偏序集的许多性质仍有待进一步研究.本文将从拓扑性质和映射性质 2 个方面讨论可数逼近偏序集的一些性质.

1　预备知识

文中涉及的记号与术语可参见文献[1-2,4].设 L 为偏序集,记 L 的可数子集全体为 C_L,称 $D\subseteq L$ 为可数定向的,若 D 中任意可数子集在 D 中有上界,即 $\forall S\in C_L$,$\exists d\in D$ 使得 $S\subseteq\downarrow d$.称可数定向下集为 σ-理想.L 中 σ-理想之全体记为 σ_{IdL}.称 L 为可数定向完备偏序集,若对 L 中任意可数定向子集 D,$\vee D$ 存在.

定义1　设 L 为可数定向完备偏序集,$x,y\in L$,称 x 可数逼近 y,记作 $x\ll_c y$,若对任意可数定向集 $D\subseteq L$,$y\leqslant\vee D$ 蕴含着 $\exists d\in D$ 使 $x\leqslant d$.

容易证明 $x\ll_c y$ 当且仅当 $\forall I\in\sigma_{IdL}$,$y\leqslant\vee I$ 蕴含着 $x\in I$,记 $\Downarrow_c x=\{u\in L\mid u\ll_c x\}$.

定义2　(i) 设 L 为可数定向完备偏序集,称 L 为可数逼近偏序集,若 $\forall x\in L$,$\Downarrow_c x\in\sigma_{IdL}$ 且 $x=\vee\Downarrow_c x$.称 L 为可数逼近格,若 L 为完备格且可数逼近偏序集.

(ii) 称完备格 L 为代数可数逼近偏序集,若 $\forall x\in L$,$x=\vee\downarrow x\cap K_c(L)$,其中 $K_c(L)=\{x\in L,x\ll_c x\}$.

定义3　设 L 为偏序集,定义 L 的子集族 $\sigma_c(L)$ 如下:$U\in\sigma_c(L)$ 当且仅当 $U=\uparrow U$ 且对任意可数定向集 $D\subseteq L$,$\vee D\in U$ 蕴含着 $D\cap U\neq\varnothing$.容易验证 $\sigma_c(L)$ 为 L 上的拓扑,称 $\sigma_c(L)$ 为 L 上的可数 Scott 拓扑.

定义4　设 L 为可数定向完备偏序集,称 L 上包含 $\sigma_c(L)\cup\omega(L)$ 的最小拓扑为 L 上可数 Lawson 拓扑,记为 $\lambda_c(L)$,即 $\lambda_c(L)=\sigma_c(L)\cup\omega(L)$.

定义5(插入性质)　设 L 为可数逼近偏序集,$x,y\in L$,若 $x\ll_c y$,则 $\exists z\in L$ 使 $x\ll_c z\ll_c y$.

收稿日期:2014-12-28

基金项目:国家自然科学基金(11361028)和江西省自然科学基金(20132BAB201007),江西省教育厅基金(GJJ12178)资助项目.

通信作者:张红霞(1976-),女,安徽黄山人,实验师,主要从事基础数学的研究.

推论1 设L为可数逼近偏序集,$x,y\in L$,$D\in\sigma_{IdL}$,若$x\ll_c y$且$y\leqslant\bigvee D$,则$\exists d\in D$使$x\ll_c d$.

命题1 设L为完备格,则下述条件等价:

(i) L为可数逼近格;

(ii) $\ll_c$满足插入性质,若$x\neq y$,则$\Downarrow_c x\neq\Downarrow_c y$.

证 (i)⇒(ii) 显然.

只需证(ii)⇒(i). 设$x\in L$,$y=\bigvee\Downarrow_c x$. 下证$y=x$,$\forall y\in\Downarrow_c y$,有$a\ll_c y=\bigvee\Downarrow_c x$,故$a\in\Downarrow_c x$,从而$\Downarrow_c y\subseteq\Downarrow_c x$. 若$a\in\Downarrow_c x$,由$\ll_c$的插入性质知,$\exists b$,使得$a\ll_c b\ll_c x$,因为$b\in\Downarrow_c x$,$y=\bigvee\Downarrow_c x$,所以$b\leqslant y$,$a\ll_c b\ll_c y$,从而$a\ll_c y$,$a\in\Downarrow_c y$. 因此$\Downarrow_c x=\Downarrow_c y$,$y=x=\bigvee\Downarrow_c x$. 故$L$为可数逼近格.

2 可数逼近格的拓扑性质

下面讨论可数逼近偏序集的有关拓扑性质.

定义6[5-6] 称拓扑空间(X,τ)为Choquet完备空间,若存在函数$a:\{(U,x):x\in U\in\tau\}\to\tau$满足下列条件:

(i) $\forall (U,x)\in\mathrm{dom}(a)$,$x\in a(U,x)\subseteq U$;

(ii) 对$\mathrm{dom}(a)$中满足$V_{n+1}\subseteq a(V_n,x_n)$的任何序列$(V_n,x_n)$,$\bigcap_{n\geqslant1}V_n\neq\varnothing$.

定理1[5-6] Choquet完备空间为Baire空间.

定理2 设L为可数逼近格,若L中的最大元满足$1\ll_c 1$,则$(L,\sigma_c(L))$是Choquet完备空间.

证 定义映射$t:\{(U,x):x\in U\in\sigma_c(L)\}\to\sigma_c(L)$如下:给定$U\in\sigma_c(L)$及$x\in U$,$\exists b\in U$使得$x\in\Uparrow_c b\subseteq U$. 令$t(U,x)=\Uparrow_c b$,设$(U_n,x_n)\in\mathrm{dom}(t)$满足$\forall n\geqslant1$有$U_{n+1}\subseteq t(U_n,x_n)\subseteq U_n$. 记$t(U_i,x_i)=\Uparrow_c b_i$,$i=1,2,\cdots,n,\cdots$,故得到一个递减序列$\Uparrow_c b_1\supseteq\Uparrow_c b_2\supseteq\cdots\supseteq\Uparrow_c b_n\supseteq\cdots$,且$\bigcap_{n\geqslant1}U_n=\bigcap_{n\geqslant1}\Uparrow_c b_n$. 因为$\forall n\geqslant1$,$1\in\Uparrow_c b_n$,故$\bigcap_{n\geqslant1}U_n\neq\varnothing$.

命题2 (i) 设L为可数逼近偏序集,则$\forall x\in L$,$\Uparrow_c x\in\sigma_c(L)$;

(ii) 设L为可数定向完备偏序集,$x,y\in L$,若$y\in\mathrm{int}_{\sigma_c(L)}\uparrow x$,则$x\ll_c y$,即$y\in\Uparrow_c x$. 若$\ll_c$满足插入性质且$y\in\Uparrow_c x$,则$y\in\mathrm{int}_{\sigma_c(L)}\uparrow x$. 从而当$L$为可数逼近偏序集时,$\mathrm{int}_{\sigma_c(L)}\uparrow x=\Uparrow_c x$.

证 (i) 显然$\Uparrow_c x$为上集,取任意可数定向集$D\subseteq L$,若$\bigvee D\in\Uparrow_c x$,即$x\ll_c\bigvee D$,由插入性质知,$\exists y\in L$使$x\ll_c y\ll_c\bigvee D$,故$\exists d\in D$使$y\leqslant d$,所以$d\in\Uparrow_c x\cap D\neq\varnothing$. 因此$\Uparrow_c x\in\sigma_c(L)$.

(ii) 设$y\in\mathrm{int}_{\sigma_c(L)}\uparrow x$,可数定向集$D\subseteq L$满足$y\leqslant\bigvee D$,因为$\mathrm{int}_{\sigma_c(L)}\uparrow x$为上集,从而$\bigvee D\in\mathrm{int}_{\sigma_c(L)}\uparrow x$,因为$\mathrm{int}_{\sigma_c(L)}\uparrow x\in\sigma_c(L)$,所以$D\cap\mathrm{int}_{\sigma_c(L)}\uparrow x\neq\varnothing$,即$\exists d\in D$使$d\in\mathrm{int}_{\sigma_c(L)}\uparrow x$,所以$x\leqslant d$,$x\ll_c y$. 若$\ll_c$满足插入性质且$y\in\Uparrow_c x$,由(i)知,$\Uparrow_c x\in\sigma_c(L)$. 又因为$y\in\Uparrow_c x\subseteq\uparrow x$,从而$y\in\mathrm{int}_{\sigma_c(L)}\uparrow x$.

若L为可数逼近偏序集,由$\forall y\in\mathrm{int}_{\sigma_c(L)}\uparrow x$得$x\ll_c y$,$y\in\Uparrow_c x$,从而$\mathrm{int}_{\sigma_c(L)}\uparrow x\subseteq\Uparrow_c x$,若$y\in\Uparrow_c x$,由插入性质知$y\in\mathrm{int}_{\sigma_c(L)}\uparrow x$,故$\Uparrow_c x\subseteq\mathrm{int}_{\sigma_c(L)}\uparrow x$,所以$\mathrm{int}_{\sigma_c(L)}\uparrow x=\Uparrow_c x$.

命题3 设L为可数定向完备偏序集,则

(i) $A=\downarrow A$,A为可数Lawson闭集当且仅当A对可数定向并封闭;

(ii) 若$A\subseteq L$为可数Scott闭集,则$\omega(A)=\omega(L)|_A=\{U\cap A:U\in\omega(L)\}$,$\lambda_c(A)=\lambda_c(L)|_A=\{U\cap A:U\in\omega(L)\}$.

推论2 若L为可数逼近格,$M\subseteq L$满足$M=\uparrow M=\Uparrow_c M=\bigcup\{\Uparrow_c u:u\in M\}$,则$M$为可数逼近格.

设τ为L上的1个拓扑,则集族$\{C\cap O:X\backslash C,O\in\tau\}$可作为$L$上1个拓扑的基,称该拓扑为$L$上拓扑$\tau$的$b$-拓扑[6]. 设$L$为可数逼近格,称$L$上以$\{\Uparrow_c x\cap\downarrow y:x,y\in L\}$为基生成的拓扑为$\mu$-拓扑(或Martin拓扑),记为$\mu(L)$. 容易证明可数逼近格上的$\mu$-拓扑是$L$的可数Scott拓扑的$b$-拓扑.

接下来讨论可数逼近格上的μ-拓扑的一些基本性质.

命题4 设L为可数逼近格,有

(i) $\forall U\in\lambda_c(L)$,$U\in\mu(L)$;

(ii) 若$U=\uparrow U$且$U\in\mu(L)$,则$U\in\sigma_c(L)$;

(iii) $\uparrow x\in\mu(L)$蕴含着$x\ll_c x$;

(iv) 对任意的μ-闭集V,若$I\in\sigma_{IdL}$且$I\subseteq V$,则$\bigvee I\in V$;

(v) 若$U=\uparrow U$,则$U\in\sigma_c(L)$当且仅当$U\in\lambda_c(L)$.

证 (i) 任取$y\in\Uparrow_c x\backslash\uparrow F$,$F\in L^{(<\omega)}$,所以$x\ll_c y$,由插入性质知,$\exists z\in L$使得$x\ll_c z\ll_c y$. 从而$\Uparrow_c z\subseteq\Uparrow_c x$,由$y\notin\uparrow F$,因此$\downarrow y\cap\uparrow F=\varnothing$,从而$y\in\Uparrow_c z\cap\downarrow y\subseteq\Uparrow_c x\backslash\uparrow F$,所以可数Lawson拓扑的开子基为$\mu$-开集.

(ii) 任取$D\in\sigma_{IdL}$,满足$\bigvee D\in U$,令$t=\bigvee D$,因为$U\in\mu(L)$,故$\exists a\ll_c t$使$t\in\Uparrow_c a\cap\downarrow t\subseteq U$,由推论1知,$a\ll_c t$蕴含着$\exists b\in L$使得$a\ll_c b\ll_c t=$

$\vee D = \vee \downarrow D$,故 $\exists d \in D$ 使得 $b \leqslant d$,因为 D 为下集,所以 $b \in D$,由 $b \ll_c t$ 知 $b \leqslant t$,从而 $b \in \Uparrow_c a \cap \downarrow t \subseteq U$,因此 $b \in D \cap U \neq \varnothing$,从而 $U \in \sigma_c(L)$.

(iii) 任取 $I \in \sigma_{IdL}$,满足 $\vee I \in V$,令 $t = \vee I$,则 $t \in \uparrow x$,因为 $\uparrow x$ 为 μ-开集,故 $\exists a \ll_c t$ 使 $t \in \Uparrow_c a \cap \downarrow t \subseteq \uparrow x$,由推论 1 知,$\exists b \in L$ 使 $b \in La \ll_c b \ll_c t = \vee I = \vee \downarrow I$,所以 $b \in I$,$b \in \Uparrow_c a \cap \downarrow t \neq \varnothing$,故 $I \cap \downarrow x \neq \varnothing$,因为 I 为下集,所以 $x \in I$.

(iv) 设 V 为 μ-闭集,$I \in \sigma_{IdL}$ 且 $I \subseteq V$,令 $x = \vee I$. 下证 $x \in V$. 反设 $x \notin V$,则 $x \in L \backslash V \in \mu(L)$,故 $\exists a \in L$ 使 $a \ll_c x$,所以 $x \in \Uparrow_c a \cap \downarrow x \subseteq L \backslash V$,由推论 1 知,$\exists b \in L$ 使 $a \ll_c b \ll_c x = \vee I$,所以 $b \in I$,$b \in \Uparrow_c a \cap \downarrow x \cap I \neq \varnothing$,这与 $I \subseteq V$ 矛盾,从而 $x \in V$.

(v) 显然可数 Scott 开集为可数 Lawson 开集. 另一方面,若 $U = \uparrow U$ 且 $U \in \lambda_c(L)$,则 $U \in \mu(L)$,从而 $U \in \sigma_c(L)$.

定理 3 可数逼近格 L 上的 μ-拓扑是零维 Tychonoff 空间.

证 (i) 首先说明 $(L, \mu(L))$ 是 T_1 空间.

设 $x \in L$,$y \in L \backslash \{x\}$,$x \neq y$,故 $y \not\leqslant x$. 因为 L 为可数逼近格,所以 $y = \vee \Downarrow_c y$,故 $\vee \Downarrow_c y \not\leqslant x$,故 $\exists a \in \Downarrow_c y$ 使 $a \not\leqslant x$,则 $x \notin \Uparrow_c a \cap \downarrow y$,从而 $y \in \Uparrow_c a \cap \downarrow y \subseteq L \backslash \{x\}$. 所以单点集 $\{x\}$ 是 μ-闭集. 这就证明了 $(L, \mu(L))$ 是 T_1 空间.

(ii) 下证 $\Uparrow_c a \cap \downarrow y$ 是 μ-闭集. 只需证明 $L \backslash (\Uparrow_c a \cap \downarrow y)$ 为 μ-开集.

设 $z \in L \backslash (\Uparrow_c a \cap \downarrow y)$,$\forall t \in L$,$t \ll_c z$ 有 $\Uparrow_c t \cap \downarrow z \not\subset L \backslash (\Uparrow_c a \cap \downarrow y)$,则 $\Uparrow_c t \cap \downarrow z \cap \Uparrow_c a \cap \downarrow y \neq \varnothing$,从而 $t \ll_c y$ 且 $a \ll_c z \leqslant \vee \Uparrow_c y$,因为 L 为可数逼近格,$y = \vee \Downarrow_c y$,故 $z \leqslant y$,从而 $z \in \Uparrow_c a \cap \downarrow y$,矛盾. 所以 $z \in \Uparrow_c t \cap \downarrow z \subseteq L \backslash (\Uparrow_c a \cap \downarrow y)$. 因此 $\Uparrow_c a \cap \downarrow y$ 是 μ-闭集. 故 $(L, \mu(L))$ 是零维 Tychonoff 空间.

定理 4 设 L 为代数可数逼近偏序集,则 $(L, \lambda_c(L))$ 是零维 Tychonoff 空间.

证 (i) 先证明 $(L, \lambda_c(L))$ 是 T_1 空间.

$\forall x \in L$,$\{x\} = \downarrow x \cap \uparrow x$,$\downarrow x$ 为 Scott 闭集,$\uparrow x$ 为下拓扑闭集,从而 $\{x\}$ 为 Lawson 闭集,所以 $(L, \lambda_c(L))$ 是 T_1 空间.

(ii) 任取 $U \backslash \uparrow F \in \lambda_c(L)$,其中 $U \in \sigma_c(L)$,$\forall x \in U \backslash \uparrow F$,因为 $x = \vee^{\uparrow}(\downarrow x \cap K_c(L))$,$\exists k \in K_c(L)$ 使 $x \in \uparrow k \subseteq U$. 记 $F = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,则 $\forall i \leqslant n$,$x_i \not\leqslant x$,由 L 为代数可数逼近偏序集,$\exists k_i \in K_c(L)$ 使 $k_i \leqslant x_i$,$k_i \not\leqslant x$,所以 $x \in L \backslash \uparrow \{k_1, k_2, \cdots, k_n\} \subseteq L \backslash \uparrow F$,故 $x \in \uparrow k \backslash \uparrow \{k_1, k_2, \cdots, k_n\} \subseteq L \backslash \uparrow F$.

下证 $\uparrow k \backslash \uparrow \{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$ 为 $(L, \lambda_c(L))$ 的开闭集.

因为 $\uparrow k \in \sigma_c(L)$,故 $\uparrow k \in \lambda_c(L)$,$\uparrow k$ 闭于 $(L, \omega(L))$,从而 $\uparrow k$ 闭于 $(L, \lambda_c(L))$,所以 $\uparrow k$ 为 $(L, \lambda_c(L))$ 的开闭集. $L \backslash \uparrow \{k_1, k_2, \cdots, k_n\} \in \omega(L)$,因此 $L \backslash \uparrow \{k_1, k_2, \cdots, k_n\} \in \lambda_c(L)$,$\uparrow \{k_1, k_2, \cdots, k_n\} \in \sigma_c(L)$,所以 $L \backslash \uparrow \{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$ 闭于 $(L, \sigma_c(L))$,从而闭于 $(L, \lambda_c(L))$,故 $L \backslash \uparrow \{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$ 为 $(L, \lambda_c(L))$ 的开闭集. 因为 $\uparrow k \backslash \uparrow \{k_1, k_2, \cdots, k_n\} = \uparrow k \cap (L \backslash \uparrow \{k_1, k_2, \cdots, k_n\})$. 所以 $\uparrow k \backslash \uparrow \{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$ 为 $(L, \lambda_c(L))$ 的开闭集.

推论 3 设 L 为可数定向完备偏序集,则下述条件等价:

(i) L 为代数可数逼近偏序集;

(ii) $\{\uparrow k : k \in K_c(L)\}$ 为 $\sigma_c(L)$ 的 1 个基.

3 可数逼近格的映射性质

定义 7 设 L 和 M 是有可数定向并的偏序集,称保序映射 $f: L \to M$ 为可数 Scott 连续映射,若 f 保任意可数定向集的上确界.

容易验证,f 保可数定向并等价于 f 关于可数 Scott 拓扑是连续映射[7-14].

命题 5 设 $f: L \to M$ 是可数逼近格之间的保序映射,则下述条件等价:

(i) f 保可数定向集的上确界;

(ii) f 保 σ-理想的上确界.

证 (i) $\Rightarrow$ (ii) 显然.

(ii) $\Rightarrow$ (i) 任取可数定向集 $D \subseteq L$,下证

$$f(\vee D) = \vee f(D).$$

事实上,$f(\vee D) = f(\vee \downarrow D) = \vee f(\downarrow D) = \vee f \downarrow (\downarrow D) = \vee \downarrow f(D) = \vee f(D)$.

命题 6 设 L 和 M 是有可数定向并的偏序集,映射 $f: L \to M$,则下述条件等价:

(i) 对任意的可数定向集 $D \subseteq L$,

$$f(\vee D) = \vee f(D);$$

(ii) $f: (L, \sigma_c(L)) \to (M, \sigma_c(M))$ 是连续映射.

若 L 和 M 是可数逼近格,则 (i),(ii) 与下列条件等价:

(iii) $y \ll_c f(x) \Leftrightarrow \forall x \in L$,$y \in M$,$\exists a \ll_c x$,使 $y \ll_c f(a)$;

(iv) $\forall x \in L, f(x) = \vee\{f(a): a \ll_c x\}$.

证 (i)$\Leftrightarrow$(ii) 显然.

(i)$\Rightarrow$(iv) 设 L 是可数逼近格, $\forall x \in L, x = \vee \Downarrow_c x$, 因为 $\Downarrow_c x$ 可数定向, f 保可数定向并, 所以 $f(x) = f(\vee \Downarrow_c x) = \vee f(\Downarrow_c x)$.

(iv)$\Rightarrow$(iii) 由(iv)知, f 保序, 若 $x \leqslant y$, 则 $\Downarrow_c x \subseteq \Downarrow_c y$. $f(x) = \vee f(\Downarrow_c x) \leqslant \vee f(\Downarrow_c y) = f(y)$, 故 $f(x) \leqslant f(y)$. 设 $y \ll_c f(x)$, $f(x) = f(\vee \Downarrow_c x) = \vee f(\Downarrow_c x)$, $f(\Downarrow_c x)$ 可数定向, 则 $\exists a \in \Downarrow_c x$ 使 $y \ll_c f(a)$.

反之, 若 $\exists a \in \Downarrow_c x$ 使 $y \ll_c f(a)$, $y \ll_c f(\Downarrow_c x) \leqslant \vee f(\Downarrow_c x) = f(\vee \Downarrow_c x) = f(x)$. 所以 $y \ll_c f(x)$.

(iii)$\Rightarrow$(ii) 设 $U \in \sigma_c(M)$, $x \in f^{-1}(U)$, 因为 M 是可数逼近格, 故 $\exists y \in U$ 使得 $f(x) \in \Uparrow_c y$, 即 $y \ll_c f(x)$, 由(iii)知, $\exists a \ll_c x$ 使 $y \ll_c f(a)$, $x \in \Uparrow_c a$.

下证 $f(\Uparrow_c a) \subseteq U$. 设 $z \in \Uparrow_c a$, 即 $a \ll_c z$, $\forall y \ll_c f(a)$ 有 $y \ll_c f(z)$. 因为 $f(a) = \vee \Uparrow_c f(a) \leqslant f(z)$, $y \ll_c f(a)$, 从而 $y \leqslant f(a)$, 所以 $U = \uparrow U$, $y \in U$, $y \leqslant f(z)$, 因此 $f(z) \in U$, 故 $f(\Uparrow_c a) \subseteq U$.

定义8 设 L 和 M 是完备格, 称映射 $f: L \to M$ 为 μ-连续的, 若它关于 μ-拓扑是连续映射. 称映射 $f: L \to M$ 为 μ-σ_c-连续的, 若它关于拓扑空间 $(L, \mu(L))$ 和 $(M, \sigma_c(M))$ 是连续的. 类似地可以定义可数 Lawson 连续映射和 μ-λ_c-连续映射.

显然可数 Lawson 连续映射是可数 Scott 连续映射, 下面讨论这些映射之间的关系.

命题7 设 $f: L \to M$ 是可数逼近格之间的保序映射, 考虑下述条件:

(i) f 是可数 Scott 连续映射;

(ii) f 是 μ-连续映射;

(iii) f 是 μ-λ_c-连续映射;

(iv) f 是 μ-σ_c-连续映射,

则(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(i)$\Rightarrow$(iv). 若 f 保 $\ll_c$ 关系, 则(i)$\Rightarrow$(ii).

若 $\forall y \in M$, $I \in \sigma_{IdL}$, 有 $M \backslash \downarrow y \in \sigma_c(M)$ 且 $\downarrow f(I) \in \sigma_{IdM}$, 则(iv)$\Rightarrow$(i).

证 (ii)$\Rightarrow$(iii) 设 $U \in \lambda_c(M)$, 所以 $U \in \mu(M)$, 由 f 是 μ-连续映射, 从而 $f^{-1}(U) \in \mu(L)$.

根据定义7和定义8可得(iii)$\Rightarrow$(i)$\Rightarrow$(iv).

(i)$\Rightarrow$(ii) 设 $U \in \mu(M)$, 下证 $f^{-1}(U) \in \mu(L)$.

设 $x \in f^{-1}(U)$, 因为 U 为 μ-开集, 故 $\exists y \ll_c f(x)$ 使 $f(x) \in \Uparrow_c y \cap \downarrow f(x) \subseteq U$, 由插入性质知, $\exists m \in M$ 使 $y \ll_c m \ll_c f(x) = f(\vee \Downarrow_c x) = f(\vee \downarrow \Downarrow_c x) = \vee f(\downarrow \Downarrow_c x) = \vee \downarrow f(\Downarrow_c x)$, 因为 f 是可数 Scott 连续映射, 故 f 保可数定向并, 所以 $\exists a \in \Downarrow_c x$ 使 $y \ll_c f(a)$.

下证 $\Uparrow_c a \cap \downarrow x \subseteq f^{-1}(U)$, 即 $\forall t \in \Uparrow_c a \cap \downarrow x$ 有 $t \in f^{-1}(U)$. 假设 $\exists t \in \Uparrow_c a \cap \downarrow x$ 使 $t \notin f^{-1}(U)$, 则 $y \ll_c t \leqslant x$, 由 f 保 $\ll_c$ 关系, 故 $y \ll_c f(a) \ll_c f(t) \leqslant f(x)$, 所以 $f(t) \in \Uparrow_c y \cap \downarrow f(x) \subseteq U$, $f(x) \in U$, $t \in f^{-1}(U)$, 矛盾, 从而 f 是 μ-连续映射.

(iv)$\Rightarrow$(i) 易知 $\forall I \in \sigma_{IdL}$, $\vee f(I) \leqslant f(\vee I)$. 下面只需证明 $\vee f(I) \geqslant f(\vee I)$.

假设 $f(\vee I) \not\leqslant \vee f(I)$, 因为 $f(\vee I) \in M \backslash \downarrow \vee f(I) \in \sigma_c(M)$, 由 f 是 μ-σ_c-连续映射, $\vee I \in f^{-1}(M \backslash \downarrow \vee f(I)) \in \mu(L)$, 故 $\exists a \ll_c \vee I$ 使 $\vee I \in \Uparrow_c a \cap \downarrow(\vee I) \subseteq f^{-1}(M \backslash \downarrow \vee f(I))$, 由插入性质知, $\exists b \in L$ 使 $a \ll_c b \ll_c \vee I$, $b \in \Uparrow_c a \cap I$ 矛盾, 所以 $b \in f^{-1}(M \backslash \downarrow \vee f(I))$, 从而 $f(b) \in M \backslash \downarrow \vee f(I)$, 因此 $f(b) \notin \downarrow \vee f(I)$, 与 $f(b) \in \downarrow \vee f(I)$ 矛盾, 所以 $\vee f(I) = f(\vee I)$, 因而 f 是可数 Scott 连续映射.

定理5 设 L 和 M 是有可数定向并的偏序集, 映射 $f: L \to M$, $\mathscr{U}$ 为 M 中的可数 Scott 开集族, 若 U 分离 M 中的点, 且 $f^{-1}(U) \in \sigma_c(L)$, 则 f 是可数 Scott 连续映射.

证 (i) 先证明 f 保序. 设 $u, v \in L$, 若 $f(u) \not\leqslant f(v)$, 则 $\exists U \in \mathscr{U}$ 使 $f(u) \in U$, $f(v) \notin U$, 所以 $u \in f^{-1}(U)$, $v \in f^{-1}(U)$, 由 $f^{-1}(U) \in \sigma_c(L)$ 知 $f^{-1}(U)$ 为上集, 从而 $u \not\leqslant v$, 所以 f 保序.

(ii) 下证 f 保可数定向并. 设可数定向集 $D \subseteq L$, 由 f 保序易知 $\vee f(D) \leqslant f(\vee D)$. 假设 $f(\vee D) \not\leqslant \vee f(D)$, 故 $\exists U \in \mathscr{U}$ 使 $f(\vee D) \in U$, $\vee f(D) \notin U$, 又 $U = \uparrow U$, 所以 $f(D) \cap U = \varnothing$, 由 $f(\vee D) \in U$, $\vee D \in f^{-1}(U)$, 又 $f^{-1}(U) \cap D = \varnothing$, $f^{-1}(U) \in \sigma_c(L)$, 所以 $\vee D \notin f^{-1}(U)$, 矛盾. 因此 f 是可数 Scott 连续映射.

命题8 设 L 为代数可数逼近偏序集, M 为有可数定向并的偏序集, 若映射 $f_0: K_c(L) \to M$ 单调, 定义 $f: L \to M$, $f(x) = \vee f_0(\downarrow x \cap K_c(L))$, 则 f 是可数 Scott 连续映射且 $f|_{K_c(L)} = f_0$.

证 只需证明对任意可数定向集 $D \subseteq L$ 有 $f(\vee D) = \vee f(D)$. 事实上,

$f(\vee D) = \vee f_0(\downarrow \vee D \cap K_c(L)) =$

$\vee \bigcup_{d \in D} f_0(\downarrow d \cap K_c(L)) = \vee_{d \in D} \vee f_0(\downarrow d \cap$

$K_c(L)) = \vee_{d\in D} f(d) = \vee f(D)$.

4 结论

本文讨论了可数逼近偏序集上可数 Scott 拓扑、Lawson 拓扑和 μ-拓扑的基本性质，并对可数偏序集之间的多种连续映射进行了刻画．一系列结果表明：可数逼近偏序集具有许多与连续偏序集相似的良好性质，从而说明了可数逼近偏序集是连续偏序集的较为合适的推广．

5 参考文献

[1] Lee S O. On countably approximating lattices [J]. J Korean Math Soc, 1988, 25(1): 11-23.
[2] Han Y H, Hong S S, Lee C K, et al. A generalization of continuous posets [J]. Comm Korean Math Soc, 1989, 4(1): 129-138.
[3] Yang Jingbo, Liu Min. On generalized countably approximating posets [J]. Journal of the Chungcheong Mathematical Society, 2012, 25(3): 415-424.
[4] Gierz G. Continuous lattices and domains [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
[5] 伍秀华，李庆国．半连续格上的拓扑 [J]．数学物理学报，2009, 29A(4): 1132-1137.
[6] Martin K. The regular spaces with countably based models [J]. Theoret Comput Sci, 2003, 305(1/2/3): 229-310.
[7] 杨金波，罗懋康．拟连续 Domain 的若干拓扑性质 [J]．模糊系统与数学，2006, 20(3): 69-76.
[8] Raney G N. Completely distributive complete lattices [J]. Proc Amer Math Soc, 1952, 3(5): 667-680.
[9] 赵东升．连续格与完全分配格的几个特征 [J]．数学季刊，1990, 5(1): 162-163.
[10] 万潇，杨金波．Z-半连续格上的 Z-半基与局部 Z-半基 [J]．江西师范大学学报：自然科学版，2012, 36(1): 54-58.
[11] Wang Xijuan, Lu Tao, He Wei. On a characterization theorem for continuous posets [J]. 数学进展，2010, 39(1): 95-98.
[12] Venugopalan P. A generalization of completely distributive lattices [J]. Algebra Universalis, 1990, 27(4): 578-586.
[13] 李娇，徐晓泉．相容连续 Domain 的序同态扩张 [J]．江西师范大学学报：自然科学版，2011, 35(4): 373-374.
[14] 占诗源，姜广浩．可数连续格的序同态 [J]．淮北师范大学学报：自然科学版，2014, 35(2): 7-9.

The Several Properties of Countably Approximating Posets

HU Junjun, ZHANG Hongxia*
(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: Countably approximating posets are generalizations of continuous posets. Some topological properties of countably approximating posets and the properties relative to continuous mappings in countably approximating posets are presented. These results show that countably approximating posets have many "good" properties which are similar to that of continuous posets.

Key words: countably approximating posets; countable Scott topology; algebraic countably approximating posets

(责任编辑：曾剑锋)