

文章编号: 1000-5862(2015)03-0281-05

基于 l_1 与 l_0 正则化的压缩感知数值算法

李订芳 江 磊

(武汉大学数学与统计学院 湖北 武汉 430072)

摘要: 针对压缩感知模型, 讨论了基于 l_0 正则化的正交匹配追踪算法(OMP)与基于 l_1 正则化的同伦算法(HM)和迭代加权最小二乘法(IRLS). 通过数值实验结果分析, 验证了3种算法的有效性, 且相对于2种基于 l_1 正则化的算法, OMP算法的迭代次数与耗时更少, 均方误差更小.

关键词: l_1 正则化; l_0 正则化; 压缩感知; 稀疏恢复

中图分类号: TP 391.41 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.03.11

0 引言

在科学与工程领域, 人们经常需要对信号进行观测, 以期通过观测信息对原始的信号进行重建. 将信号 x 抽象为1个 n 维向量, 观测的过程抽象为用 $m \times n$ 的矩阵 A 与信号 x 进行乘积, 则观测的信息为

$$y = Ax,$$

称 A 为观测矩阵, 满足行满秩条件, 行数 m 就是观测(采样)的次数, m 维向量 y 为观测信息的抽象.

当前多数数据采集系统都是基于传统的香农定理设计^[1-2], 按照这种方式采集能够恢复原始信号, 但是存在较大冗余, 这会导致数据的泛滥以及设备的浪费. 研究如何根据信号的一些特征来实现低于乃奎斯特采样频率的采集, 以减少所需采集的数据量有重要的意义. 现实世界中的自然信号通常具有一定的规律性. 对这种规律性, 一种常用的刻画方式是自然信号在1组基底表示下是稀疏的, 这里的“稀疏”是指它们用1组基底展开后大多数系数为0, 或者绝对值较小. 这种特性为人们减少采样次数提供了可能性. 压缩感知^[3-6]的主要任务就是设计 m 尽量小的观测矩阵 A , 以及通过观测信息 y 快速恢复 x 的算法. 因而感兴趣的是 $m \times n$ 的情形, 这是1个高度欠定线性系统, 有无穷多个解 x 对应着同一个 y , 但是考虑 x 的稀疏性条件约束后, 就有可能恢复唯一的原始信号.

对信号观测的过程可称为编码过程, 则稀疏信号的恢复重建就是1个解码的过程, 本文将介绍总

结2类方案及其相应的数值算法, 并给出基于 Matlab 的程序实现.

第1种较为自然的解码方案是求解如下的最优问题 l_0 ^[7-8]:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & \|x\|_0 \\ \text{s. t. } & Ax = y, \end{aligned}$$

这里 $\|x\|_0$ 表示 x 中非0元素的个数, 即解码过程为寻求满足约束的最稀疏解, 这也是最感兴趣和最希望得到的解. 定义支撑集为向量中非零元的指标集, 即 $S(x) = \{i | x_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$, 从而 $\|x\|_0 = \#S(x)$.

第2种解码方案是求解如下的最优问题 l_1 ^[9-14]:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & \|x\|_1 \\ \text{s. t. } & Ax = y, \end{aligned}$$

这里 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ 为向量的1-范数.

当测量矩阵 A 满足 NSP 或者 RIP 条件时, 最优问题 l_0 和 l_1 是等价的^[2].

1 基于 l_0 与 l_1 正则化的数值方法

1.1 基于 l_0 最优问题的正交匹配追踪算法

在重建算法中, 贪婪追踪算法因其实现简单、复杂度低的优点而得到广泛应用. 贪婪追踪算法的基本思想是通过迭代的方法, 基于某种准则, 每一次选择一个或多个指标构成信号的支撑集, 即选出一个或多个局部最优解来逐步逼近信号从而最终重建原

收稿日期: 2014-11-25

基金项目: 国家自然科学基金(61271337)资助项目.

作者简介: 李订芳(1966-), 男, 湖南平江人, 教授, 博士生导师, 主要从事计算数学与压缩感知的研究.

始信号. 正交匹配追踪(OMP) 算法是经典贪婪算法之一, 它是对 MP 算法的一种改进. 该算法在指标选择原则上采用与 MP 算法一样的准则, 即从测量矩阵 A 中选择与余量匹配度最高的所在列, 然后对所选列进行 Gram-Schmidt 正交化处理, 从而保证每次迭代所选列指标的最优性. 算法过程如下:

初始化 将矩阵 A 按列正规化后得 \tilde{A} , 初始解 $x^0 = 0$, 初始余量 $r^0 = y - Ax^0$, 初始支撑集 $S^0 = \emptyset$, $k = 1$;

步骤 1 计算测量矩阵与余量的内积值 $p = |\langle \tilde{A}^T, r^{k-1} \rangle|$;

步骤 2 找出最大内积值所在列, 即 $\tilde{i} = \operatorname{argmax}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (p[i])$;

步骤 3 更新支撑集 $S^k = S^{k-1} \cup \{\tilde{i}\}$;

步骤 4 求解最小二乘问题 $\min_{S(x)=S^k} \|y - Ax\|_2$, 更新解 $x^k = (A_{S^k}^T A_{S^k})^{-1} A_{S^k}^T y$, 其中 A_{S^k} 为 A 中某些列组成的矩阵. 这些列的列指标集为 S^k ;

步骤 5 更新余量 $r^k = y - Ax^k$. 若 $\|r^k\|_2 < \varepsilon$, 则停止, 否则 $k = k + 1$, 返回步骤 1.

1.2 基于 l_1 最优问题的同伦算法(HM)

同伦方法又称为修正 LARS 方法^[4]. 考察如下 l_1 最小二乘泛函

$F_\lambda(x) = \|Ax - y\|_2^2 / 2 + \lambda \|x\|_1$, $x \in \mathbf{R}^n$, $\lambda > 0$, 最小值点为 x_λ . 该问题需要利用次微分

$\partial F(x) = \{v \in \mathbf{R}^n | F(y) - F(x) \geq \langle v, y - x \rangle, \forall y \in \mathbf{R}^n\}$,

并且有 x 是 F 的最小值点当且仅当 $0 \in \partial F(x)$. $F_\lambda(x)$ 的次微分为 $\partial F_\lambda(x) = A^*(Ax - y) + \lambda \partial \|x\|_1$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵. l_1 范数的次微分为 $\partial \|x\|_1 = \{v \in \mathbf{R}^n | v_l \in \partial |x_l|, l = 1, 2, \dots, n\}$. 绝对值的次微分定义为

$$\partial |z| = \begin{cases} \{\operatorname{sgn}(z)\} & z \neq 0, \\ [-1, 1] & z = 0, \end{cases}$$

从而 $0 \in \partial F_\lambda(x)$ 等价于对 $l = 1, 2, \dots, n$ 有

$$\begin{cases} (A^*(Ax - y))_l = -\lambda \operatorname{sgn}(x_l) & x_l \neq 0, \\ |A^*(Ax - y)|_l \leq \lambda & x_l = 0. \end{cases}$$

基于次微分和上述等价条件的同伦算法如下:

初始化 $x^0 = 0$, 为满足等价条件第 1 条约束, 可选择相应的 $\lambda^0 = \|c^1\|_\infty$, 其中 $c^j = A^*(y - Ax^{j-1})$ 为残差.

步骤 1 令 $l^1 = \arg \max_{l=1, 2, \dots, n} |c_l^1|$, 设支撑集 $T_1 = \{l^1\}$. 定义同伦路径方向为 $d_{l^1}^1 = \|a_{l^1}\|_2^{-2} \operatorname{sgn}(c_{l^1}^1)$,

$d_{l^1}^1 = 0, l \neq l^1$. 更新解 $x^1 = x^0 + \gamma^1 d^1$, $\gamma^1 \geq 0$ 以及 $\lambda^1 = \lambda^0 - \gamma^1$, $\gamma^1 \leq \lambda^0$. γ^1 的选取应使等价条件第 2 条约束满足, 即

$$\gamma^1 = \min_{l \neq l^1} \left\{ \frac{\lambda^0 - c_l^1}{1 - (A^* A d^1)_l}, \frac{\lambda^0 + c_l^1}{1 + (A^* A d^1)_l} \right\},$$

这里最小值只选择正值的指标. 如此选取后满足 $\lambda^1 = \|c^2\|_\infty$, 令 l^2 为上式最小值对应的指标, 更新支撑集为 $T_2 = \{l^1, l^2\}$.

步骤 $j(j \geq 2)$ 更新同伦路径方向为方程组 $A_{T_j}^* A_{T_j} d_{T_j}^j = \operatorname{sgn}(c_{T_j}^j)$ 的解 d^j 的其它分量为 0. 更新解为 $x^j = x^{j-1} + \gamma^j d^j$ 以及 $\lambda^j = \lambda^{j-1} - \gamma^j$, 其中 γ^j 的选取需要满足等价条件的约束. 为满足第 2 条约束, 有

$$\gamma_+^j = \min_{l \notin T_j} \left\{ \frac{\lambda^{j-1} - c_l^j}{1 - (A^* A d^j)_l}, \frac{\lambda^{j-1} + c_l^j}{1 + (A^* A d^j)_l} \right\}.$$

为满足第 1 条约束, 有 $\gamma_-^j = \min_{l \in T_j} \{-x_l^{j-1} / d_l^j\}$. 与步骤 1 相同, 这里最小值均只在正值指标中选择, 此时 $\gamma^j = \min\{\gamma_+^j, \gamma_-^j\}$. 如果最小值取为 γ_+^j , 则更新支撑集 $T_{j+1} = T_j \cup \{l_+^j\}$, 此时支撑集扩大; 否则更新支撑集 $T_{j+1} = T_j \setminus \{l_-^j\}$, 此时支撑集缩减. 如此更新后有 $\lambda^j = \|c^{j+1}\|_\infty$.

停止 如果 $\lambda^j = \|c^{j+1}\|_\infty = 0$, 即残差为 0, 输出 $x^* = x^j$.

1.3 基于 l_1 最优问题的迭代加权最小二乘法

定义约束集 $\mathcal{F}(y) = \{x | Ax = y\}$, 并假设观测矩阵 A 满足 K 阶 NSP 性质. 对于绝对值符号可以观察到, 当 $t \neq 0$ 时有 $|t| = \min_{w>0} (wt^2 + w^{-1}) / 2$, 且当 $w = 1/|t|$ 时取最小值. 受此启发, 可引入近似 l_1 范数的泛函

$$\mathcal{J}(z, w, \varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (z_j^2 w_j + \varepsilon^2 w_j + w_j^{-1}),$$

其中第 2 项是 1 个校正项. IRLS 算法交替选择最小点 z 和权向量 w 以最小化泛函 \mathcal{J} . 算法过程如下^[5]:

初始化 设置 $w^0 = (1, 1, \dots, 1)$, $\varepsilon_0 = 1$;

第 k 步 $k = 0, 1, \dots$;

(i) 更新最小点为 $x^{k+1} = \operatorname{argmin}_{z \in \mathcal{F}(y)} \mathcal{J}(z, w^k, \varepsilon_k)$ 和

校正项为 $\varepsilon_{k+1} = \min\{\varepsilon_k, r_{K+1}(x^{k+1})/n\}$, 这里 $r(z)$ 表示对向量 $z \in \mathbf{R}^n$ 的分量的 1 个非重排;

(ii) 更新权向量为 $w^{k+1} = \arg \min_{w>0} \mathcal{J}(x^{k+1}, w, \varepsilon_{k+1})$;

停止 如果 $\varepsilon_k = 0$, 则停止.

注 1 1) 算法过程每步要求 1 个带权最小二乘问题, 其解形式为 $x^{k+1} = D_k^{-1} A^* (A D_k^{-1} A^*)^{-1} y$, 其中

$$D_k = \begin{pmatrix} w_1^k & & & \\ & \ddots & & \\ & & w_j^k & \\ & & & \ddots \\ & & & & w_n^k \end{pmatrix}$$

2) 权向量的更新其解为

$$w_j^{k+1} = [(x_j^{k+1})^2 + \varepsilon_{k+1}^2]^{-1/2} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

2 数值试验

数据准备: 随机矩阵 $A_{40 \times 200}$ 为测量矩阵, 原始信号稀疏解 $x^* \in \mathbf{R}^{200}$ 的非零分量为 $x_{40}^* = 7.19$, $x_{100}^* = 2.37$, $x_{133}^* = 5.10$, $x_{150}^* = 4.11$, $x_{163}^* = 20.70$, 观测信息 $y = Ax^*$.

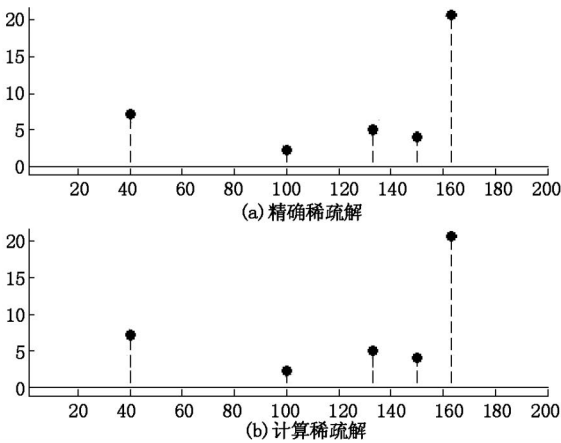


图 1 OMP 数值试验结果
表 1 数值实验结果

算法	均方误差	迭代次数	CPU 运行时间 /s
OMP	1.551×10^{-28}	6	0.528 927
HM	1.700×10^{-28}	27	0.775 444
IRLS	5.075×10^{-12}	35	1.655 806

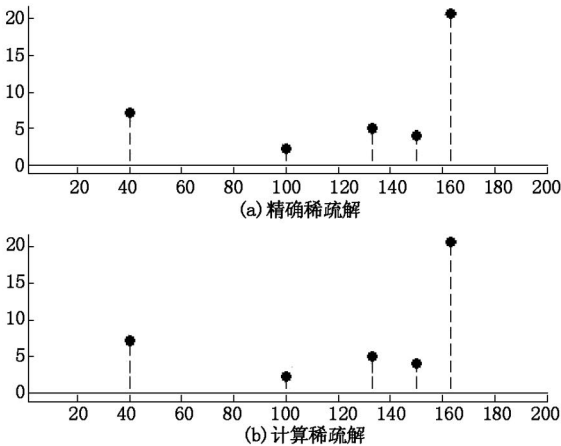


图 3 HM 数值试验结果

模拟结果都已经对绝对值较小的分量 ($x_i \leq 1.0 \times 10^{-6}$) 进行了零化后处理.

数值试验环境, 硬件环境: Intel Pentium 4 CPU 3.00GHz 2.99GH 2.00GB 内存; 软件环境: Matlab 7.6.0(R2008a).

2.1 正交匹配追踪算法

算法设定迭代停止标准 $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-6}$. 模拟结果如图 1 和图 2 所示, 其中相对误差为

$$e_r = \|x^n - x^*\|_2 / \|x^*\|_2,$$

OMP 算法模拟结果见表 1, 达到相对误差停止标准, 迭代 7 次, CPU 耗时 0.528 927s, 均方误差为 1.551×10^{-28} , 在 3 种算法中, OMP 的耗时、迭代次数、结果的均方误差都是最小的.

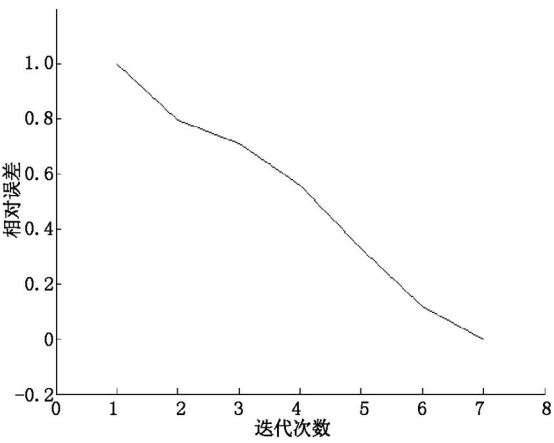


图 2 OMP 相对误差与迭代次数

2.2 同伦算法

同伦算法模拟结果如图 3 和图 4 所示, 其中相对误差定义和 OMP 算法相同. 从数值试验结果看, 同伦算法运行效率居中, 可以达到与 OMP 相同数量级的均方误差.

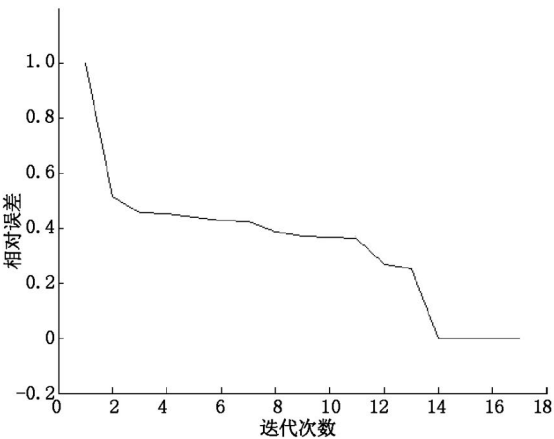


图 4 HM 相对误差与迭代次数

2.3 迭代加权最小二乘法

IRLS 算法模拟结果如图 5 和图 6 所示,其中收敛速率图中纵坐标指标为 $\|x^{n+1} - x^*\|_1 / \|x^n - x^*\|_1$.

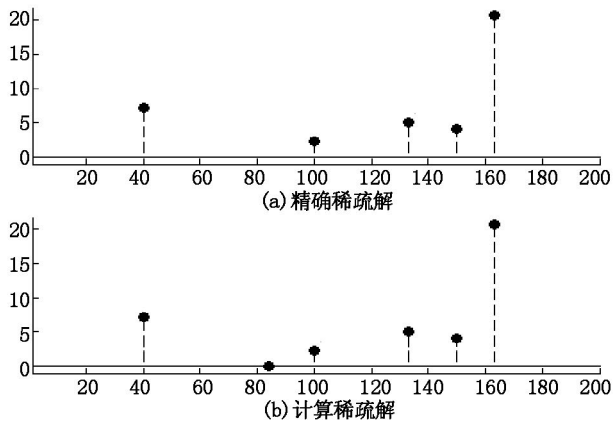


图 5 IRLS 数值试验结果

$x^* \|_1$. 从图 6 和表 1 可以看出 IRLS 算法是线性收敛的,且均方误差比 OMP 与 HM 更大,迭代次数与耗时也更多.

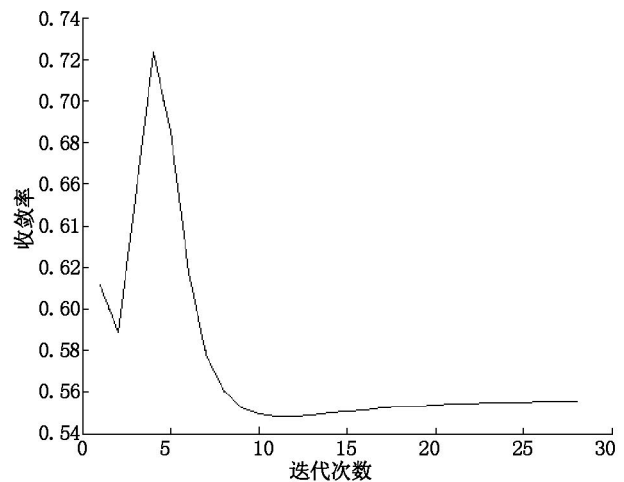


图 6 IRLS 收敛率

3 结论

本文讨论了压缩感知模型基于 l_0 与 l_1 的正则化,该类算法能够较好解决以往算法对于不连续、非光滑、稀疏的原信号效果不佳^[15-17]的问题.以稀疏信号恢复为例进行数值实验,验证了正交匹配追踪算法、同伦算法、迭代加权最小二乘法的收敛性.通过分析数值试验结果,发现基于 l_0 正则化的正交匹配追踪法效率更高,在经过少量迭代之后就能够收敛.

4 参考文献

- [1] 徐志强. 压缩感知 [J]. 中国科学, 2012, 42(9): 865-877.
- [2] 文再文, 印卧涛, 刘歆, 等. 压缩感知稀疏优化简介 [J]. 运筹学学报, 2012, 16(3): 49-62.
- [3] 焦李成, 杨淑媛, 刘芳. 压缩感知回顾与展望 [J]. 电子学报, 2011(7): 1651-1662.
- [4] 秦林霞. 非负稀疏优化的精确松弛理论研究 [D]. 北京: 北京交通大学, 2013.
- [5] 梁锡军. 稀疏优化在机器学习中的若干应用 [D]. 大连: 大连理工大学, 2013.
- [6] 张军. 先验信息整合的压缩感知理论及其应用研究 [D]. 广州: 华南理工大学, 2013.
- [7] Amari Yukawa. Minkovskian gradient for sparse optimization [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Pro-

cessing 2013, 7(4): 576-585.

- [8] Zhao Shilei, Wu Peng, Liu Yupeng. An online kernel learning algorithm based on orthogonal matching pursuit [J]. Journal of Software, 2012, 7(9): 2076-2082.
- [9] Foucart S. A note on guaranteed sparse recovery via l_1 -minimization [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2010, 29(1): 97-103.
- [10] Lu Nan, Ma Feng, Liu Sanyang. A non-interior continuation algorithm for solving the convex feasibility problem [J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(9): 5421-5430.
- [11] Daubechies Devore, Ronald Fornasier Gunturk. Iteratively reweighted least squares minimization for sparse recovery [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2010, 63(1): 1-38.
- [12] Ray Maleh. Efficient sparse approximation methods for medical imaging [D]. Ann Arbor: University of Michigan, 2009.
- [13] 刘谢进, 杨格兰, 霍玉洪. 递推加权最小二乘算法的研究 [J]. 系统仿真学报, 2009(14): 4248-4250.
- [14] 朱红. 求解 L_1 -正则项优化问题的两种算法 [D]. 郑州: 河南大学, 2012.
- [15] 胡彬, 徐会林, 王泽文. 基于模型函数与 L -曲线的正则化参数选取方法 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2014, 38(6): 569-573.
- [16] 肖庭延, 于慎根, 王彦飞. 反问题的数值解法 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [17] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.

The Numerical Algorithm of Compressive Sensing Based on l_1 and l_0 Regularization

LI Dingfang, JIANG Lei

(School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan Hubei 430072, China)

Abstract: For compressive sensing, orthogonal matching pursuit algorithm (OMP) based on l_0 norm regularization, homotopy algorithm (HM) based on l_1 norm regularization and iteratively reweighted least squares algorithm (IRLS) based on l_1 norm regularization are introduced. In numerical experiment, the validity of three algorithms above through analysis of numerical result are proved. Furthermore, for lower CPU cost and smaller mean square error, OMP is more efficient than other two algorithms based on l_1 norm regularization.

Key words: l_1 regularization; l_0 regularization; compressive sensing; sparse restoration

(责任编辑: 曾剑锋)

(上接第 252 页)

The Investigation of the Effect and Mechanism by Which a Recombinant Peanut Allergen Vaccine Inhibits Allergic Inflammation in the Intestine

LIU Ling^{1,2}, YAN Hao², LI Bing¹, HE Shaoheng¹, YANG Pingchang^{1,2}, LIU Zhigang^{1,2*}

(1. The First Affiliated Hospital of Liaoning Medical University, Jinzhou Liaoning 121000, China;

2. Institute of Allergy and Immunology, Shenzhen University School of Medicine, Shenzhen Guangdong 518060, China)

Abstract: To investigate the effect of a peanut allergen vaccine on inhibiting the allergic inflammation in the mouse intestine. A food allergy mouse model was created, the mice were injected (i. p.) with a peanut allergen. Then, the allergic signs were observed, a serum level of specific IgE and IgG2a was determined by ELISA. Level of cytokines in the supernatant of splenocyte culture was assayed by ELISA. The intestinal tissue structure was evaluated by microscopy. The vaccination inhibited food allergy signs, reduced the levels of specific IgE in the serum and increased the levels of specific IgG2a, the expression of IL-4 reduced in splenocyte culture supernatant, and the expression of IFN- γ increased. The HE stain shows that the tissue of intestinal mucosa was improved in the Ara h2-IL-18 treated group. The allergen vaccination of Ara h2-IL-18 can inhibit the allergic inflammation in the intestine and therapeutic potential to treat peanut allergy.

Key words: peanut allergy; Ara h2; vaccine

(责任编辑: 刘显亮)