文章编号:1000-5862(2015)03-0340-05

2 阶微分方程 $f''+Af'+Bf=0$ 解的增长性

易才凤,钟文波
(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:运用 Nevunlinna 值分布理论和整函数的相关理论,研究了 2 类不同系数的 2 阶线性微分方程解的增长性. 假设 $A(z)=h(z)e^{P_1(z)}$,其中 $P_1(z)$ 是 m 次多项式,$h(z)$ 是 $\rho(h)<m$ 的整函数,$B(z)$ 是 1 个级为 $\rho(B)\neq m$ 的超越整函数,证明了方程 $f''+Af'+Bf=0$ 的每 1 个非零解都是无穷级;又假设 $A(z)$ 是方程 $f''+P_2(z)f=0$ 的非零解,其中 $P_2(z)$ 是 n 次多项式,$B(z)$ 是 Fabry 缺项级数且 $2\rho(B)\neq n+2$,也证明了方程 $f''+Af'+Bf=0$ 的每 1 个非零解都具有无穷级.

关键词:整函数;无穷级;线性微分方程;Fabry 缺项级数
中图分类号:O 174.52　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.04.02

0 引言与结果

本文将使用值分布理论的标准记号[1]. 分别用 $M(r,f)$ 和 $L(r,f)$ 表示整函数 $f(z)$ 在圆周 $|z|=r$ 上的最大模和最小模,用 $T(r,f)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 的特征函数,$\rho(f)$ 和 $\mu(f)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 的增长级和下级,$\lambda(f)$ 则表示亚纯函数 $f(z)$ 的零点收敛指数. 为叙述方便,给出如下定义.

定义 1[2]　如果 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^{\lambda_n}(a_n\neq 0)$ 是整函数,其中 $\{\lambda_n\}$ 是严格递增数列且满足 $\lambda_n/n\to\infty(n\to\infty)$,则称 $f(z)$ 具有 Fabry 缺项级数.

定义 2[3]　设 $f(z)$ 是 $\rho(0<\rho<+\infty)$ 级整函数,对某一固定 θ,若

$$\limsup_{r\to\infty}\log^+\log^+|f(re^{i\theta})|/\log r=\rho,$$

则称 L_θ: $\arg z=\theta$ 为 $f(z)$ 的 1 条 ρ 级射线. 称 ρ 级射线充满的角域为 $f(z)$ 的 ρ 级射线角域.

定义 3[4]　设 $f(z)$ 是 1 个有穷正级整函数,$S=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}$ 是 1 个角域,若 $\forall\theta(\alpha<\theta<\beta)$,有

$$\lim_{r\to\infty}\log^+\log^+|f(re^{i\theta})|/\log r=\rho(f),$$

则称 $f(z)$ 在角域 S 中以指数形式趋于无穷. 类似地,如果 $\forall\theta(\alpha<\theta<\beta)$,有

$$\lim_{r\to\infty}\log^+\log^+|f(re^{i\theta})|^{-1}/\log r=\rho(f),$$

则称 $f(z)$ 在角域 S 中以指数形式趋于 0.

定义 4　设 $f(z)$ 是一个亚纯函数,$\arg z=\theta$ 为一射线,$\forall\varepsilon>0$,将 $f(z)$ 在角域 $\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)=\{z:\theta-\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\theta+\varepsilon\}$ 内的零点收敛指数定义为

$$\lambda_{\theta,\varepsilon}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log n\{\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r),f=0\}}{\log r},$$

其中 $n\{\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r),f=0\}$ 表示 $f(z)$ 在角域 $\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r)=\{z:\theta-\varepsilon<\arg z<\theta+\varepsilon\}\cap\{z:|z|\leqslant r\}$ 内的零点个数,重级零点按其重数计算,并定义 $\lambda_\theta(f)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda_{\theta,\varepsilon}(f)$,若 $\lambda_\theta(f)=\rho(f)$,则称 $\arg z=\theta$ 为 $f(z)$ 的 1 条零点聚值线.

本文主要研究了 2 阶线性微分方程

$$f''+Af'+Bf=0 \tag{1}$$

非零解的增长级,其中 $A(z)$,$B(z)$ 是非零的整函数. 熟知,方程(1)的所有解均为整函数,若 f_1,f_2 是方程(1)的 2 个线性无关的解,则 f_1 和 f_2 中至少有 1 个具有无穷增长级. 自然会问,在对系数 $A(z)$ 和 $B(z)$ 附加什么条件时,可以使得方程(1)的每 1 个非零解都是无穷级呢?从文献[5-6]的研究结果可以知道:若 $A(z)$ 和 $B(z)$ 均为整函数且 $\rho(A)<\rho(B)$;或者 $A(z)$ 为 n 次多项式,$B(z)$ 为超越整函数;或者 $\rho(B)<\rho(A)\leqslant 1/2$,则方程(1)的每 1 个非零解都是无穷级.

当 $\rho(A)=\rho(B)=1$ 且 $A(z)$ 和 $B(z)$ 满足一定关系时,陈宗煊在文献[7]中证明了方程(1)的每 1 个非零解都是无穷级,即定理 A.

定理 A　设 $A_j(z)(\neq 0)(j=0,1)$ 是一整函数

收稿日期:2014-12-10
基金项目:国家自然科学基金(11171170)资助项目.
作者简介:易才凤(1955-),女,江西吉安人,教授,主要从事复分析方向研究.

且 $\rho(A_j)<1$,a,b 为复数,$ab\neq 0$ 且 $a=cb(c>1)$,则方程

$$f''+A_1(z)e^{az}f'+A_2(z)e^{bz}f=0$$

的每1个非零解都是无穷级.

然而,仅由 $\rho(A)=\rho(B)$ 的条件,并不能保证方程(1)的非零解都是无穷级. 例如,$f(z)=e^{P(z)}$ 满足方程

$$f''+A(z)f'-(P''+(P')^2+A(z)P')f=0,$$

其中 $A(z)$ 是整函数,$P(z)$ 是非常数多项式. 显然 $\rho(A)=\rho(B)$,而 $f(z)=e^{P(z)}$ 是方程的有穷解.

当 $\rho(B)<\rho(A)$ 时,文献[5]也列举了一些例子说明方程(1)的非零解不一定都是无穷级. 本文就针对 $\rho(A)\neq\rho(B)$ 的情形进一步研究了方程(1)解的增长性,首先考虑 $A(z)=h(z)e^{P_1(z)}$ 的形式,而 $B(z)$ 为一般的整函数,证明了定理1.

定理1　设 $A(z)=h(z)e^{P_1(z)}$,其中 $P_1(z)=(\alpha+i\beta)z^m+\cdots+b_0$ 为多项式($|\alpha|+|\beta|\neq 0$),$h(z)$ 是整函数且 $\rho(h)<m$,$B(z)$ 为超越整函数,如果 $\rho(B)\neq m$,则方程(1)的每1个非零解都是无穷级.

定理B[8]　设 $Q(z)$ 是超越整函数且 $\rho(Q)\neq 1$,则方程 $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=0$ 的每1个非零解都是无穷级.

显然,定理B是定理1的特殊情形.

推论1　设 $A(z)$,$B(z)$ 满足定理1的假定,如果 $\rho(B)$ 不是正整数,则方程(1)的每1个非零解都是无穷级.

文献[9]当把方程(1)的系数 $A(z)$ 限定为某个多项式系数方程的解时,证明了下面的结果.

定理C　设 $A(z)$ 是方程 $f''+P_2(z)f=0$ 的非零解,其中 $P_2(z)=a_nz^n+\cdots+a_0(a_n\neq 0)$,$B(z)$ 是超越整函数且 $\rho(B)<1/2$,则方程(1)的每1个非零解都是无穷级.

受此工作的启发,本文还证明了下面的结果.

定理2　设 $A(z)$ 是方程 $f''+P_2(z)f=0$ 的非零解,其中 $P_2(z)=a_nz^n+\cdots+a_0(a_n\neq 0)$,$B(z)$ 具有Fabry缺项级数,如果 $2\rho(B)\neq n+2$,则方程(1)的每1个非零解都是无穷级.

推论2　假设 $A(z)$,$B(z)$ 满足定理2的假定,如果 $\rho(B)$ 不是1/2的整数倍,则方程(1)的每1个非零解都是无穷级.

1　相关引理

引理1[5]　设 $A(z)$,$B(z)$ 是整函数,如果满足下列条件之一:

(i) $\rho(A)<\rho(B)$;

(ii) $A(z)$ 是多项式且 $B(z)$ 是超越的,

则方程(1)的所有非零解都是无穷级.

引理2[1]　设 $f(z)$ 为开平面上的超越亚纯函数,则

$$\liminf_{r\to\infty} T(r,f)/\log r=\infty.$$

引理3[10]　设 $f(z)$ 是下级为 $0\leqslant\mu(f)<1$ 的整函数,则对每个 $\alpha\in(\mu(f),1)$,存在1个集合 $H_0\subseteq[0,\infty)$,使得 $\overline{\log d_{ens}}H_0\geqslant 1-\mu(f)/\alpha$,其中 $H_0=\{r\in[0,\infty):\log L(r,f)>\log M(r,f)\cos\pi\alpha\}$.

引理4[7]　设 $P(z)=(\alpha+i\beta)z^m+\cdots+b_0$ ($|\alpha|+|\beta|\neq 0$) 是1个次数为 $m\geqslant 1$ 的多项式,$h(z)$ 为整函数且 $\rho(h)<m$,令 $f(z)=h(z)e^{P(z)}$,$z=re^{i\theta}$,$\delta(P,\theta)=\alpha\cos m\theta-\beta\sin m\theta$,则对任意给定的 $\varepsilon>0$,$\exists E_1\subseteq[0,2\pi)$,$mE_1=0$,当 $\theta\in[0,2\pi)\setminus(E_1\cup E_2)$,其中 $E_2=\{\theta\in[0,2\pi):\delta(P,\theta)=0\}$,$mE_2=0$ 时,对充分大的 $|z|=r$,有

(i) 若 $\delta(P,\theta)>0$,则

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^m\}\leqslant|f(z)|\leqslant\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^m\};$$

(ii) 若 $\delta(P,\theta)<0$,则

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^m\}\leqslant|f(z)|\leqslant\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^m\}.$$

引理5[11]　假设 $f(z)$ 是开平面上的超越亚纯函数,$\Gamma=\{(k_1,j_1),(k_2,j_2),\cdots,(k_q,j_q)\}$ 是不同整数对构成的有限集合,其中 $k_i>j_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,q)$,又设 $\alpha(\alpha>1)$ 是某实常数及 ε 为任意给定的正数,则存在测度为0的集合 $E_3\subset[0,2\pi)$ 和仅依赖于 Γ,α 的常数 C,使得当 $\varphi_0\in[0,2\pi)\setminus E_3$ 时,存在常数 $R_0=R_0(\varphi_0)>1$,对满足 $\arg z=\varphi_0$ 及 $|z|=r\geqslant R_0$ 的所有的 z 及所有的 $(k,j)\in\Gamma$,都有

$$\left(\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right)\leqslant C\left(\frac{T(\alpha r,f)}{r}\log^{\alpha}r\log T(\alpha r,f)\right)^{k-j}. \quad (2)$$

特别地,当 $f(z)$ 的级 $\rho(f)=\rho<\infty$ 时,(2)式可由(3)式代替,

$$|f^{(k)}(z)/f^{(j)}(z)|\leqslant|z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}. \quad (3)$$

引理6[10]　设 $f(z)$ 是1个级为 $\rho(f)=\rho<1/2$ 的整函数,如果 $\sigma<\rho$,则集合 $H_1=\{r:\log L(r,f)>r^{\sigma}\}$ 的上对数密度为正.

引理7[3]　$\rho(1/2\leqslant\rho<\infty)$ 级整函数 $f(z)$ 至少存在1个 ρ 级射线角域,且其每1个 ρ 级射线角域的开度不小于 π/ρ.

引理8　设 $A(z)$ 是 $n(n\geqslant 1)$ 次多项式,$f(z)\neq 0$ 是方程 $f''+A(z)f=0$ 的解,则

(i) $\rho(f)=(n+2)/2$;

(ii) 若 n 是奇数,有 $\lambda(f)=(n+2)/2$;

(iii) 若 n 是偶数,且 f_1,f_2 是方程 $f''+A(z)f=0$ 的 2 个线性无关解,则

$$\max\{\lambda(f_1),\lambda(f_2)\}=(n+2)/2.$$

如果某一解 f 有性质 $\lambda(f)<(n+2)/2$,则 f 仅有有限个零点.

引理 9[4] 设 $f(z)$ 是方程 $f''+P(z)f=0$ 的非零解,其中 $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_0(a_n\neq 0)$,令 $\theta_i=(2\pi i-\arg(a_n))/(n+2)$,$S_i=\{z:\theta_i<\arg z<\theta_{i+1}\}$,其中 $i=0,1,\cdots,n+1$,则 $f(z)$ 具有如下性质.

(i) 在每 1 个角域 S_i 中,$f(z)$ 或者以指数形式趋于无穷,或者以指数形式趋于 0;

(ii) 如果 $f(z)$ 在角域 S_i 中以指数形式趋于 0,则 $f(z)$ 在角域 S_{i-1} 和 S_{i+1}(若 $i=n+1$,则 $S_{i+1}=S_0$)中以指数形式趋于无穷. 然而,$f(z)$ 可以在任意 2 个相邻的角域内以指数形式趋于无穷;

(iii) 如果在角域 S_i 中 $f(z)$ 以指数形式趋于 0,则在角域 $S_{i-1}\cup\bar{S}_i\cup S_{i+1}$ 的任意闭子集中,$f(z)$ 最多有有限多个零点;

(iv) 如果在 2 相邻角域 S_{i-1} 和 S_i 中,$f(z)$ 均以指数形式趋于无穷,则 $\forall\varepsilon>0$ 在角域 $\theta_i-\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\theta_i+\varepsilon$ 中 $f(z)$ 具有无穷多个零点,且当 $r\to\infty$ 时,有

$$n(\Omega(\theta_i-\varepsilon,\theta_i+\varepsilon;r),f=0)=(1+o(1))\frac{4\sqrt{|a_n|}}{\pi(n+2)}r^{(n+2)/2},$$

其中 $n(\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r),f=0)$ 表示 $f(z)$ 在角域 $\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r)=\{z:\theta-\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\theta+\varepsilon,0<|z|\leqslant r\}$ 中的零点个数,重级零点按重数计算.

引理 10[12] 假设 $f(z)$ 具有 Fabry 缺项级数,则对任意给定的 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$,均存在对数测度为无穷的集合 $H_2\subset[0,\infty)$,使得对满足 $|z|=r\in H_2$ 的 r,有

$$\log L(r,f)>(1-\varepsilon)\log M(r,f).$$

引理 11 设 $f(z)$ 具有 Fabry 缺项级数,则对任意给定的 $N>0$,存在 1 个对数测度为无穷的集合 H_3,使得对所有的 $r\in H_3$,有

$$L(r,f)>r^N.$$

证 $f(z)$ 具有 Fabry 缺项级数,由引理 10 可知,对任意给定的 $\varepsilon(0<\varepsilon<1/2)$,$\exists H_2\subseteq[0,\infty)$,其中 $m_lH_2=+\infty$. 对所有的 $|z|=r\in H_2$ 的 r,有

$$L(r,f)>M(r,f)^{1/2}.$$

由于 $f(z)$ 具有 Fabry 缺项级数,则 $f(z)$ 是超越整函数,由引理 2 可知,对任意给定的 $N>0$,$\exists R_1>0$,当 $r>R_1$ 时,有 $M(r,f)>r^{2N}$. 所以,对任意给定的 $N>0$,对所有的 $|z|=r\in H_2\setminus[0,R_1]$ 的 r,有

$$L(r,f)>r^N.$$

记 $H_3=H_2\setminus[0,R_1]$,显然 $m_lH_3=+\infty$.

引理 12[11] 假设 $A(z)$ 和 $B(z)\neq 0$ 是整函数,如果对实常数 $\alpha_1,\beta_1,\theta_1,\theta_2$,其中 $\alpha_1>0$,$\beta_1>0$ 且 $\theta_1<\theta_2$,当 $z\to\infty$ 时,在 $S=\{z:\theta_1\leqslant\arg z\leqslant\theta_2\}$ 中,有

$$|A(z)|\geqslant\exp\{(1+o(1))\alpha_1|z|^{\beta_1}\},$$

$$|B(z)|\leqslant\exp\{o(1)\alpha_1|z|^{\beta_1}\}.$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$,记角域 $S(\varepsilon)=\{z:\theta_1+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\theta_2-\varepsilon\}$. 若 $f(z)\neq 0$ 是方程(1)的有穷级解,则下列结论成立:

(i) 存在不为 0 的常数 b,当 $z\to\infty$ 时,在角域 $S(\varepsilon)$ 中使得 $f(z)\to b$. 更进一步,有

$$|f(z)-b|\leqslant\exp\{-(1+o(1))\alpha_1|z|^{\beta_1}\};$$

(ii) 对任意给定的正整数 $k\geqslant 1$,当 $z\to\infty$ 时,在角域 $S(\varepsilon)$ 中,有

$$|f^{(k-1)}(z)-b|\leqslant\exp\{-(1+o(1))\alpha_1|z|^{\beta_1}\}.$$

2 定理的证明

定理 1 的证明 由假定 $\rho(B)\neq m$,即 $\rho(B)\neq\rho(A)$. 若 $\rho(A)<\rho(B)$,由引理 1 可得结论成立. 若 $\rho(A)>\rho(B)$,假设方程(1)有非零解 $f(z)$ 满足 $\rho(f)<+\infty$,下面将分 3 种情况讨论,分别导出矛盾.

(Ⅰ) 当 $\rho(B)=0$ 时,因为 $B(z)$ 是超越整函数,应用引理 2 便知,$\forall N_1(N_1>2(\rho(f)+2))$,$\exists r_0>0$,使得当 $|z|=r>r_0$ 时,有

$$M(r,B)>r^{N_1+1}.$$

而 $\mu(B)=\rho(B)=0$,根据引理 3 可知,对每个 $\alpha\in(0,1/2)$,存在 1 个集合 H_0,使得 $\overline{\log d_{ens}}H_0=1$,其中 $H_0=\{r\in[0,\infty):\log L(r,B)>\log M(r,B)\cos\pi\alpha\}$,即 $\forall N_1$ 及每个 $\alpha\in(0,1/2)$,当 $|z|=r\in H_0\setminus[0,r_0]$ 且 r 充分大时,有

$$|B(re^{i\theta})|>r^{N_1}. \tag{4}$$

由于 $\delta(P_1,\theta)=\alpha\cos m\theta-\beta\sin m\theta$ 的最小正周期为 $2\pi/m$,则必存在 1 个角域 $\Omega(\theta_1,\theta_2)=\{z:\theta_1<\arg z<\theta_2\}(\theta_2-\theta_1=\pi/m)$,当 $z=re^{i\theta}\in\Omega(\theta_1,\theta_2)$ 时,有 $\delta(P_1,\theta)<0$,由引理 4 得,当 $|z|=r$ 充分大且 $\arg z=\theta\in(\theta_1,\theta_2)$ 且 $\theta\notin(E_1\cup E_2)$(其中 E_1,E_2 由引理 4 所定义,满足 $mE_1=mE_2=0$)时,有

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P_1,\theta)r^m\}\leqslant|A(z)|\leqslant\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_1,\theta)r^m\}. \tag{5}$$

而方程(1)可变形为

$$|B(z)|\leqslant|f''(z)/f(z)|+|A(z)|\cdot|f'(z)/f(z)|. \tag{6}$$

由引理 5 可知,存在 1 个零测度集 $E_3\subseteq[0,2\pi)$, $R_0=R_0(\varphi_0)>0(\varphi_0\in[0,2\pi)\setminus E_3)$,对充分大的 $|z|=r>R_0$ 及 $\arg z=\varphi_0$,有

$$|f^{(k)}(z)/f(z)|\leqslant|z|^{k(\rho(f)+1)}(k=1,2). \tag{7}$$

综合(4)~(7)式可以得到,当充分大的 $|z|=r(r>R_0)\in H_0$ 及 $\arg z=\varphi_0\in(\theta_1,\theta_2)\setminus(E_1\cup E_2\cup E_3)$ 时,有

$$r^{N_1}<|B(re^{i\theta})|\leqslant r^{2(\rho(f)+1)}+\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_1,\theta)r^m\}r^{\rho(f)+1}\leqslant 2r^{2(\rho(f)+1)}. \tag{8}$$

由于 $N_1>2(\rho(f)+2)$,与(8)式是矛盾的,故 $\rho(f)=+\infty$.

(Ⅱ)当 $0<\rho(B)<1/2$ 时,由引理 6 可知,存在 1 个对数密度为正的集合 $H_1=\{r:\log L(r,B)>r^\sigma\}$,其中 $0<\sigma<\rho(B)$. 因此,当 $|z|=|re^{i\theta}|=r\in H_1$ 时,有 $\exp(r^\sigma)<|B(re^{i\theta})|$.

类似于(Ⅰ)的情形,当 $|z|=r(>R_0)\in H_1$ 及 $\arg z=\varphi_0\in(\theta_1,\theta_2)\setminus(E_1\cup E_2\cup E_3)$ 时,有

$$\exp(r^\sigma)<|B(re^{i\theta})|\leqslant r^{2(\rho(f)+1)}+\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_1,\theta)r^m\}r^{\rho(f)+1}\leqslant 2r^{2(\rho(f)+1)}. \tag{9}$$

显然(9)式存在矛盾,故 $\rho(f)=+\infty$.

(Ⅲ)当 $\rho(B)\geqslant1/2$ 时,由引理 7 可知 $B(z)$ 至少存在 1 个 $\rho(B)$ 级射线角域,且其每 1 个 $\rho(B)$ 级射线角域的开度都不小于 $\pi/\rho(B)$,而 $\delta(P_1,\theta)$ 的半个周期为 π/m,由 $\pi/\rho(B)>\pi/m$ 可以看出,存在 1 个角域 $\Omega(\theta_3,\theta_4)=\{z:\theta_3<\arg z<\theta_4\}(\theta_3<\theta_4)$,使得对所有的 $z=re^{i\theta}\in\Omega(\theta_3,\theta_4)$ 且 $\theta\notin(E_1\cup E_2)$(其中 $mE_1=mE_2=0$)有

$$\rho(B)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+\log^+|B(re^{i\theta})|}{\log r} \tag{10}$$

和(5)式同时成立.

从(10)式可以看出,对任意给定的 $\varepsilon(0<\varepsilon<\rho(B))$,存在数列 $\{r_n\}$, $r_n\to\infty(n\to\infty)$,当 $|z|=r_n$ 且 $\arg z=\theta\in(\theta_3,\theta_4)\setminus(E_1\cup E_2)$ 时,有

$$|B(r_ne^{i\theta})|\geqslant\exp\{r_n^{\rho(B)-\varepsilon}\}. \tag{11}$$

结合(5)~(7)式和(11)式得,当 $|z|=r_n$ 及 $\arg z=\theta\in(\theta_3,\theta_4)\setminus(E_1\cup E_2\cup E_3)$ 时,有

$$\exp(r_n^{\rho(B)-\varepsilon})<|B(r_ne^{i\theta})|\leqslant r_n^{2(\rho(f)+1)}+\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_1,\theta)r_n^m\}r_n^{\rho(f)+1}\leqslant 2r_n^{2(\rho(f)+1)}. \tag{12}$$

容易看出(12)式矛盾,故 $\rho(f)=+\infty$.

定理 2 的证明　因 $A(z)$ 是方程 $f''+P_2(z)f=0$ 的非零解,由引理 8 可知 $\rho(A)=(n+2)/2$. 而 $2\rho(B)\neq n+2$,所以 $\rho(A)\neq\rho(B)$. 若 $\rho(A)<\rho(B)$,由引理 1 可得结论成立. 下面只需讨论 $\rho(A)>\rho(B)$ 的情况,假设方程(1)有非零解 $f(z)$ 满足 $\rho(f)<+\infty$,下面通过对 $A(z)$ 的零点聚值线数量的讨论来导出矛盾.

(Ⅰ)如果 $A(z)$ 的零点聚值线条数小于 $n+2$,则应用引理 9 可知,至少存在 1 个角域 $S_{i_0}(0\leqslant i_0\leqslant n+1)$,使得 $A(z)$ 在 S_{i_0} 内以指数形式趋于 0,即 $\forall\theta\in S_{i_0}$,当 $|z|=r$ 充分大时,有

$$|A(re^{i\theta})|\to0. \tag{13}$$

由于 $B(z)$ 具有 Fabry 缺项级数,由引理 11 可知,对任意给定的 $N_2(N_2>2(\rho(f)+2))$,存在 1 个对数测度为无穷的集合 $H_3\subseteq[0,\infty)$,使得对所有的 $|z|=r\in H_3$,有

$$|B(re^{i\theta})|>r^{N_2}. \tag{14}$$

将(7)式、(13)~(14)式代入(6)式,即当 $|z|=r\in H_2$ 及 $\arg z=\theta\in S_{i_0}\setminus E_3$ 时,有

$$r^{N_2}<|B(re^{i\theta})|\leqslant r^{2(\rho(f)+1)}+r^{\rho(f)+1}\leqslant 2r^{2(\rho(f)+1)}. \tag{15}$$

由于 $N_2>2(\rho(f)+2)$,(15)式显然矛盾,所以 $\rho(f)=+\infty$.

(Ⅱ)假设 $A(z)$ 的零点聚值线条数恰好是 $n+2$,由引理 9 可知,$A(z)$ 在 $S_i(i=0,1,\cdots,n+1)$ 内以指数形式趋于无穷,所以 $\forall\eta(0<\eta<(\rho(A)-\rho(B))/2$, $0<\varepsilon<\pi/[4(\rho(f)+1)]$)及对 $i=0,1,\cdots,n+1$,在角域 $S_i(\varepsilon)$ 中,当 $z\to\infty$ 时,有

$$|A(z)|\geqslant\exp\{(1+o(1))\beta_2|z|^{\rho(A)-\eta}\},$$

$$|B(z)|\leqslant\exp\{|z|^{\rho(B)+\eta}\}\leqslant\exp\{o(1)\beta_2|z|^{\rho(A)-\eta}\}$$

成立,其中 β_2 是不依赖于 ε 的正常数. 由引理 12 可知,存在相应的 $b_i\neq0$,使得在每个角域 $S_i(\varepsilon)$ 中 $(i=0,1,\cdots,n+1)$,当 $z\to\infty$ 时,有

$$|f(z)-b_i|\leqslant\exp\{-(1+o(1))\beta_1|z|^{\rho(A)-\eta}\}.$$

由 Phragmen-Lindelof 定理知 $f(z)$ 在整个复平面上是有界的,再由 Liouville 定理可得 $f(z)$ 是非零常数,这与方程(1)本身的假设矛盾,故 $\rho(f)=+\infty$.

至此,定理的证明已全部完成. 关于具有无穷增长级解的复方程的研究,还有不少研究结果,可参见文献[13-15]等.

3 参考文献

[1] 杨乐.值分布论及其新研究[M].北京:科学出版社,1982.

[2] 蒋业阳,陈宗煊.非齐次线性微分方程解的增长性[J].数学年刊,2013,34(3):291-298.

[3] 戴崇基,嵇善瑜.ρ 级射线及其与 Borel 方向分布间的关系[J].上海师范大学学报:自然科学版,1980(2):16-24.

[4] Hille E. Lectures on ordinary differential equations[M]. California,London,Don Mills,Ontario: Addison Wesley. Publishing Company,Reading,Massachusetts Menlo park,1969.

[5] Gundersen G G. Finite order solution of second order linear differential equations[J]. Trans Amer Math Soc,1988,305(1):415-429.

[6] Hellerstein S,Miles J,Rossi J. On the growth of solutions of $f''+gf'+hf=0$[J]. Trans Amer Math Soc,1991,324(2):693-706.

[7] 陈宗煊.微分方程 $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=0$ 解的增长性[J].中国科学:A 辑,2001,31(9):775-784.

[8] Gundersen G G. On the question of whether $f''+e^{-z}f'+B(z)f=0$ can admit a solution $f\not\equiv 0$ of finite order[J]. Pro R S E,1986,102A(1/2):9-17.

[9] 吴秀碧,伍鹏程.关于方程 $f''+Af'+Bf=0$ 解的增长性,其中系数 A 是一个 2 阶线性微分方程的解[J].数学物理学报,2013,33A(1):46-52.

[10] Barry P D. Some theorems related to the cos $\pi\rho$ theorem[J]. Proc London Math Soc,1970,21(3):334-360.

[11] Gundersen G G. Estimate for the logarithmic derivative of a meromorphic function,plussimilar estimates[J]. J London Math Soc,1988,37(2):88-104.

[12] Sons L R. An analogue of a theorem of W. H. J. Fuchs on gap series[J]. Proc London Math Soc,1970,21(3):525-539.

[13] 艾丽娟,易才凤.一类亚纯系数高阶线性微分方程解的增长性[J].江西师范大学学报:自然科学版,2014,38(3):250-253.

[14] 钟文波,易才凤.一类高阶线性微分方程解的增长级[J].江西师范大学学报:自然科学版,2014,38(4):399-402.

[15] 龚攀,肖丽鹏.某类高阶复微分方程解的增长性[J].江西师范大学学报:自然科学版,2014,38(5):512-516.

On the Growth of Solution to the Second Order Differential Equation $f''+Af'+Bf=0$

YI Caifeng,ZHONG Wenbo

(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: By using the Nevunlinna theory and the theory of entire functions,the growth of solutions of the second order linear differential equations with two different coefficients is considered. Let $A(z)=h(z)e^{P_1(z)}$ be an entire function,where $P_1(z)$ is a polynomial of m degree and $h(z)$ is an entire function of order $\rho(h)<m$,and let $B(z)$ be a transcendental entire function of order $\rho(B)\neq m$. Then every nontrivial solution of $f''+Af'+Bf=0$ is of infinite order. Similarly,let $A(z)$ be a nontrivial solution of $f''+P_2(z)f=0$,where $P_2(z)$ is a polynomial of degree and let $B(z)$ be the Fabry gap series of order $\rho(B)\neq(n+2)/2$. Then every nontrivial solution of $f''+Af'+Bf=0$ is also of infinite order.

Key words: entire function; infinite order; linear differential equations; Fabry gap series

(责任编辑:王金莲)