第 39 卷 第 4 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 39 No. 4
2015 年 7 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jul. 2015

文章编号:1000-5862(2015)04-0345-06

奇异线性随机微分方程的几个结果

胡 华

(宁夏大学数学计算机学院,宁夏 银川 750021)

摘要: 研究了 1 类带有 Goursat 型核函数保留了维纳测度的 Volterra 变换,这类核函数满足自再生性. 给出了几个能引起新的自再生性的相关 Gram 矩阵逆的结果,以及它与经典自再生性的联系. 结果被应用于 1 类带相应滤过分解的奇异线性随机微分方程研究,研究的方程被看作是一些广义桥的非标准分解.

关键词: 随机微分方程; Volterra 变换; 布朗运动; 扩张滤过; Goursat 内核; 自再生核

中图分类号: O 211.6 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.04.03

0 引言

文献[1-3]研究了高斯扩张滤过,源于高斯性质的潜在广义高斯桥的结果已应用于概率与金融数学等领域中[4-6]. Volterra 型变换允许构造有趣的高斯过程族,根据核函数是否是平方可积的,Volterra 变换可以进行分类,这些平方可积的核在研究等价高斯测度、随机线性微分方程以及线性 Kalman-Bucy 滤过中有着重要的作用,但是目前对非平方可积核的 Volterra 变换的关注很少[7-9]. 如果强加这样一个变换去保持维纳测度它们也会出现,在一些例子中有相应的 Goursat 型核函数.

令 $B:=(B(t),t\geqslant 0)$ 是 1 个标准布朗运动,定义 1 个完全概率空间 (Ω,F,P_0). $\{F_t^B,t\geqslant 0\}$ 表示生成的滤过. 令 $\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_n)^*\in L^2_{loc}(\mathbf{R}^+)=\{h;\int_0^t h^2(s)\,\mathrm{d}s<\infty,t\in[0,\infty)\}$,这里 * 代表转置运算符,$n\in\mathbf{N}$. 假设对任意固定的 $t>0$,高斯随机变量 $\int_0^t \boldsymbol{f}^*(s)\,\mathrm{d}B_s$ 的协方差矩阵 $\boldsymbol{m}_t$ 是可逆的,即 Gram 矩阵 $\boldsymbol{m}_t=\int_0^t \boldsymbol{f}(s)\boldsymbol{f}^*(s)\,\mathrm{d}s$ 有逆矩阵 $\boldsymbol{\alpha}_t$. 不难看出当 $t\to\infty$ 时 $\boldsymbol{\alpha}_t\to\boldsymbol{\alpha}_\infty$,这里 $\boldsymbol{\alpha}_\infty$ 是 1 个有限矩阵. 此外,$\forall i$,对所有 j 当且仅当 $\|f_i\|:=\left(\int_0^\infty f_i^2(s)\,\mathrm{d}s\right)^{1/2}=\infty$ 时,$(\boldsymbol{\alpha}_\infty)_{ij}=0$. 对于 $t>0$,$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\alpha}_t\cdot\boldsymbol{f}(t)$ $(\boldsymbol{\alpha}_t,t>0)$ 是给定的. $\forall t>0$,依据 $\boldsymbol{\alpha}_t=\int_t^\infty\boldsymbol{\varphi}(u)\boldsymbol{\varphi}^*(u)\,\mathrm{d}u+\boldsymbol{\alpha}_\infty$ 确定的 $\boldsymbol{\varphi}$ 的形式可以建立定理 2,这个关系在本文中很重要,同时在其他重要的逆 Gram 矩阵领域中有应用,具体参见文献[10].

在连续半鞅集合 X 上定义与 Volterra 核 k 相关的 Volterra 变换 Σ,使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^t\int_0^v k(u,v)\,\mathrm{d}X_u\mathrm{d}v<\infty,0<t<\infty\ \text{a.s.},$$

通过文献[11]中的

$$\Sigma(X)_t=X_t-\int_0^t\int_0^u k(u,v)\,\mathrm{d}X_v\mathrm{d}u,0<t<\infty,\tag{1}$$

给出的核 $k(t,s)=\boldsymbol{\varphi}^*(t)\cdot\boldsymbol{f}(s)$,其中 $0<s\leqslant t<+\infty$,该核是自再生 Volterra 核. 这等价于,当应用于布朗运动 B 时,Σ 满足以下 2 个条件:

(i) $\Sigma(B)$ 是 1 个标准布朗运动;

(ii) 对任意固定的 $t\geqslant 0$,$F_t^{\Sigma(B)}$ 是与 $\int_0^t\boldsymbol{f}(u)\,\mathrm{d}B_u$ 独立的.

$\Sigma(B)$ 的存在性可以通过利用在文献[11]中发现的 1 个广义 Hardy 不等式来建立. 称 k 和 Σ 分别为基于 $\boldsymbol{f}$ 再生的 Goursat-Volterra 核和变换. Span $\{\boldsymbol{f}\}$ 的维度称为 Goursat-Volterra 核 k 的阶. 这一术语在定义 1 中正式给定.

注意条件(i)和条件(ii),并且考虑扩张滤过和随机微分方程. 条件(ii)意味着,$\forall t\geqslant 0$,正交分解

$$F_t^B=F_t^{\Sigma(B)}\otimes\sigma\left(\int_0^t\boldsymbol{f}(u)\,\mathrm{d}B_u\right)\tag{2}$$

成立. 这里,通过 $F\otimes G$,想要对于 F 和 G 独立的

收稿日期:2015-03-15

基金项目:国家自然科学基金(11361044)资助项目.

作者简介:胡 华(1962-),男,宁夏中宁人,教授,主要从事随机过程与金融数学的研究.

$F\vee G$ 进行说明. 对 Goursat-Volterra 变换,(2)式事实上可以写成

$$F_t^B=F_t^{\Sigma(B)}\otimes\sigma\left(\boldsymbol{Y}-\int_0^t\boldsymbol{\varphi}(u)\,\mathrm{d}\Sigma(B)_u\right),\quad(3)$$

$\forall t\geqslant 0$,这里 $\boldsymbol{Y}=(Y_1,\cdots,Y_N)^*$ 是 1 个独立于 $F_\infty^{\Sigma(B)}$ 的高斯随机向量,在 $\boldsymbol{\alpha}_\infty\neq\boldsymbol{0}$ 的情况下其协方差 $E[\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^*]=\boldsymbol{\alpha}_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{\alpha}_t$,否则 $\boldsymbol{Y}\equiv\boldsymbol{0}$. 这里允许 Y 是空集或者是常向量. 回顾条件(i),注意到所有连续半鞅的确定都可以解决方程

$$X_t=W_t+\int_0^t\int_0^s\boldsymbol{\varphi}^*(s)\cdot\boldsymbol{f}(u)\,\mathrm{d}X_u\mathrm{d}s,X_0=0,t>0,(4)$$

考虑 1 个可能的扩张概率空间,这里 W 是 1 个标准布朗运动. 要注意的是仅仅假设

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^t\int_0^v\boldsymbol{\varphi}^*(v)\cdot\boldsymbol{f}(u)\,\mathrm{d}X_u\mathrm{d}v<\infty,0<t<\infty\ (5)$$

几乎处处成立,后者不是绝对收敛的. 因为在时间 0 处有奇异点,称(4)式为奇异线性随机微分方程. 如果取 $W=\Sigma(B)$,则通过构造初始布朗运动 B 是 1 个解. 第 2 个解是在有限时间间隔上与关联 f-广义桥一致的[12]. 因此,当(4)式有很多解时,对如上定义的 Goursat-Volterra 变换 Σ 是不可逆的. 事实上,k 是 1 个自再生核意味着它不是 1 个非平方可积的[13]. 定理 3 涉及了(4)式的解的所有连续半鞅的研究. 特别地,展示了强解存在的充要条件:布朗运动和 F_∞^B 可测是 $\boldsymbol{\alpha}_\infty\equiv\boldsymbol{0}$ 的. 在这种情况下 $F_\infty^{\Sigma(B)}=F_\infty^B$. 当 $\boldsymbol{\alpha}_\infty\neq\boldsymbol{0}$ 时,定理 3 得到结论:在扩张空间上仍然存在 1 个是布朗运动的强解,它包含了 1 个独立中心协方差矩阵是 $\boldsymbol{\alpha}_\infty$ 的高斯向量 Y. 另一个自然的目的是找出满足条件(i)和(ii)的所有连续半鞅的特征. 在 $\boldsymbol{\alpha}_\infty\equiv\boldsymbol{0}$ 的情况下,这部分是在定理 4 获得的,并且分析和展示了某些空间-时间调和函数的联系. 后者是函数 $h\in C^{1,2}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^+)$ 使得 $h(\cdot,\int_0^{\cdot}\boldsymbol{f}^*(s)\,\mathrm{d}B_s)$ 是 1 个期望为 1 的连续 (P_0,F) 鞅,这里 P_0 代表维纳测度.

1 Goursat-Volterra 核函数和变换

联系由(1)式定义的中心高斯过程 $\Sigma(B)$ 与布朗运动 B,假设它是已经定义的,这里 k 是 1 个连续 Volterra 核. 也就是说,$k:\mathbf{R}^{+2}\to\mathbf{R}$ 满足 $k(u,v)=0$,$0<u\leqslant v<\infty$,并且在 $\{(u,v)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty):u>v\}$ 上是连续的. 由文献[9]知 Σ 保持了维纳测度,或者 $\Sigma(B)$ 是 1 个布朗运动,当且仅当 k 满足自再生性

$$k(t,s)=\int_0^s k(t,u)k(s,u)\,\mathrm{d}u,0<s\leqslant t<\infty.$$

当应用到 B 时,注意到(1)式可以被看作是关于滤过 $(F_t^B,t\geqslant 0)$ 的 $\Sigma(B)$ 半鞅分解. 现在,由于 $\Sigma(B)$ 的 Doob-Meyer 分解的结果在它自己的滤过里,必须有严格包含 $F_t^{\Sigma(B)}\subsetneqq F_t^B,0<t<\infty$. 在文献[3]中展示了正交分解给出了再生高斯空间所缺少的信息 $F_t^B=F_t^{\Sigma(B)}\otimes\sigma(\Gamma_t^{(k)})$,这里,$\forall t>0$,

$$\Gamma_t^{(k)}=\{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}B_u;f\in L^2((0,t]),f(s)=\int_0^t k(s,u)f(u)\,\mathrm{d}u,a.e.\}.$$

给出 1 个核 k,对每个固定的 $t>0$,它不容易确定 $\Gamma_t^{(k)}$ 的基,因为这相当于去解决显式积分方程 $f(t)=\int_0^s k(t,u)f(u)\,\mathrm{d}u,0<t<\infty$. 容易确定空间族 $(\Gamma_t^{(k)},t>0)$,并且计算出相应的 Volterra 核. 事实上,这个步骤相当于在区间 $[0,t]$ 上对任意固定的 $t>0$ 沿着 $\Gamma_t^{(k)}$ 分解维纳测度. 回忆 1 个具有以下形式的 Goursat 核 $k(t,s)=\boldsymbol{\varphi}^*(t)\cdot\boldsymbol{f}(s)$,$0<s\leqslant t<\infty$,这里 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)^*$ 和 $\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_n)^*$ 是 2 个定义在 $(0,\infty)$ 和 $n\in\mathbf{N}$ 上的函数向量. 对这样 1 个核,很自然地引进如下定义.

定义 1 Goursat-Volterra 变换 Σ 的阶 $(n_t,t>0)$ 是 1 个保持维纳测度的 Volterra 变换,使得对任意布朗运动 B 以及 $t>0$,$F_t^{\Sigma(B)}$ 是不依赖于 $\int_0^t\boldsymbol{f}(u)\,\mathrm{d}B_u$ 的,$\boldsymbol{f}\equiv(f_1,\cdots,f_{n_t})^*$ 是 n_t 维线性无关的 $L_{loc}^2(\mathbf{R}^+)$ 函数. 相关核被称为 Goursat-Volterra 核. $\boldsymbol{f}$、Span$\{\boldsymbol{f}\}$、Span$\{\int_0^{\cdot}\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}B_s\}$ 分别被称为再生基、再生基空间和再生基高斯空间.

因为对每个固定的 $t>0$,$\boldsymbol{m}_t$ 是正定的,可以看出 $t\to n_t$ 是不减的. 然而,在假设中,总是取这个阶是有限的恒量. 众所周知,最简单的 Goursat-Volterra 核是 $k_1(t,s)=t^{-1}$,它给出 $\Sigma(B)_{\cdot}=B_{\cdot}-\int_0^{\cdot}B_u/u\,\mathrm{d}u$. 这相当于设 $n=1$ 以及令 $f_1\equiv 1$. 在文献[3]中注意到 Σ 迭代到 1 个非常简单的形式,即 $\Sigma^{(0)}=\boldsymbol{I}$,$\Sigma^{(1)}=\Sigma$ 以及 $\Sigma^{(m)}=\Sigma^{(m-1)}\circ\Sigma$,对 $m\geqslant 2$. 这里 $\circ$ 代表复合运算,有

$$\Sigma^{(n)}(B)_{\cdot}=B-\int_0^{\cdot}L_n(\log(\cdot/s))\,\mathrm{d}B_s,$$

这里 $(L_n,n\in\mathbf{N})$ 是拉盖尔多项式序列. 作为以上内核的 1 个概括,由文献[11]引出如下结果.

定理 1[11] 令 $\boldsymbol{f}$ 是 1 个 n 维 $L_{loc}^2(\mathbf{R}^+)$ 函数,使得 $\forall t>0$,Gram 矩阵 $\boldsymbol{m}_t=\int_0^t\boldsymbol{f}(s)\cdot\boldsymbol{f}^*(s)\,\mathrm{d}s$ 有 1 个

由 $\boldsymbol{\alpha}_t$ 表示的逆,则对于 $\varphi(\cdot) = \boldsymbol{\alpha}.\cdot f(\cdot)$,核 k 是由 $k(t,s) = 0$ (如果 $s > t$) 与 $k(t,s) = \boldsymbol{\varphi}^*(t) \cdot f(s)$ (其他) 所定义. k 是 1 个 n 阶的 Goursat-Volterra 核.

后续内容的研究都是在定理 1 的假设下进行. 接下来的目的是去得到在 $\varphi(\cdot)$ 的形式下 α 的 1 个表达式. 作为 1 个直接的应用,将展示通过核 k 可以获得 1 个新的自再生性.

定理 2　当 $t \to \infty$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_t$ 收敛于 1 个有限矩阵 $\boldsymbol{\alpha}_\infty$. 此外,有

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \int_t^\infty \boldsymbol{\varphi}(u) \cdot \boldsymbol{\varphi}^*(u) \mathrm{d}u + \boldsymbol{\alpha}_\infty, 0 < t < \infty. \quad (6)$$

因此,自再生性

$$k(t,s) = \int_t^\infty k(u,t) k(u,s) \mathrm{d}u + \boldsymbol{f}^*(t) \cdot \boldsymbol{\alpha}_\infty \cdot f(s), 0 < s \leqslant t < \infty$$

成立.

证　固定 $t > 0$. 注意到 $\boldsymbol{\alpha}_t$ 和 $\boldsymbol{m}_t$ 是绝对连续的对称正定阵. 对恒等式 $\boldsymbol{\alpha}_t \cdot \boldsymbol{m}_t = \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{m}_t \cdot \boldsymbol{\alpha}_t$ 微分,产生 $\boldsymbol{\alpha}'_t \cdot \boldsymbol{m}_t = -\boldsymbol{\alpha}_t \cdot \boldsymbol{m}'_t$. 因此得到 $\boldsymbol{\varphi}(t) \cdot \boldsymbol{f}^*(t) = \boldsymbol{\alpha}_t \cdot f(t) \cdot \boldsymbol{f}^*(t) = \boldsymbol{\alpha}_t \cdot \boldsymbol{m}'_t = -\boldsymbol{\alpha}'_t \cdot \boldsymbol{m}_t$. 所以,有 $\boldsymbol{\alpha}'_t = -\boldsymbol{\varphi}(t) \cdot \boldsymbol{f}^*(t) \cdot \boldsymbol{\alpha}_t = -\boldsymbol{\varphi}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}^*(t)$. $\forall j (1 \leqslant j \leqslant n)$, $(\boldsymbol{\alpha}'_t)_{j,j} = -\varphi_j^2(t)$ 是负的. 因此 $(\boldsymbol{\alpha}_t)_{j,j}$ 是递减的. 由 $(\boldsymbol{\alpha}_t)_{j,j} > 0$ 得到 $\int_r^\infty \varphi_j^2(s) \mathrm{d}s < \infty$, $r > 0$. 因为对于 $t \geqslant r$,令 $t \to +\infty$,发现 $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\alpha}_t = \boldsymbol{\alpha}_r - \int_r^t \boldsymbol{\varphi}(s) \cdot \boldsymbol{\varphi}^*(s) \mathrm{d}s = \boldsymbol{\alpha}_\infty$. 因此,$\boldsymbol{\alpha}_\infty$ 是 1 个有限矩阵. 最后的陈述由 $k(t,s) = \boldsymbol{f}^*(t) \cdot \boldsymbol{\alpha}_t \cdot f(s)$ 产生,这里利用了(6) 式中给出的 $\boldsymbol{\alpha}_t$ 表达式.

自再生核,尤其是 Goursat-Volterra 核不同于内核系统和再生核希尔伯特空间,但却与之相关. 接下来的目的是概述这个关系. 为此,对一些 $t > 0$,开始固定 1 个时间区间 $[0,t]$. 令向量 $\boldsymbol{q}_t(u) := (q_{m,t}(u), 0 < u \leqslant t; 1 \leqslant m \leqslant n)$ 由区间 $[0,t]$ 上的标准正交序列 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 组成. 这个系统有如下特征 $\int_0^t q_{m,t}(r) q_{k,t}(r) \mathrm{d}r = \delta_{m,k}, 1 \leqslant m, k \leqslant n$,要求对每个整数 $1 \leqslant m \leqslant n$, $q_{m,t}$ 是 1 个由与 f_m 有关的首相系数为正的 $f_1, \cdots, f_m$ 生成的线性组合. 经典核系统由对称核 $k_t(u,v) = \boldsymbol{q}_t(u) \cdot \boldsymbol{q}_t^*(v)$ $(0 < u, v \leqslant t)$ 给出. 在 $k_t(u,v) = \int_0^t k_t(u,r) k_t(v,r) \mathrm{d}r$ $(0 < u, v \leqslant t)$ 的意义上这是 1 个再生核. 在 k_t 扩张下,$(\boldsymbol{\alpha}_t)_{i,j}$ 被看作是 $f_i(u) f_j(v)$ 的系数,对于 $1 \leqslant i, j \leqslant n$. 更精确地有 $(\boldsymbol{\alpha}_t)_{i,j} = (\boldsymbol{b}_t \cdot \boldsymbol{b}_t^*)_{i,j}$,这里 $\boldsymbol{b}$ 是 1 个元素 $(\boldsymbol{b}_t)_{i,k}$ 在 $q_{k,t}(u)$ 里 $f_i(u)$ 的系数的上对角矩阵,对于 $i \leqslant k$. 显然对所有 i 有 $\varphi_i^2(t) = -2(\boldsymbol{b}'_t \cdot \boldsymbol{b}_t^*)_{i,i}$,可以依据 $\varphi(t)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{b}_t$.

命题 1　对每个固定的 $t > 0$,在时间区间 $[0,t]$ 上与 f 相关的核系统由 $k_t(u,v) = \int_t^\infty k_t(r,u) k_t(r,v) \mathrm{d}r + \boldsymbol{f}^*(u) \cdot \boldsymbol{\alpha}_\infty \cdot f(v)$ 给出,$0 < u, v \leqslant t$. 特别地,对所有 $0 < s \leqslant t < \infty$, $k(t,s) = k_t(t,s)$.

证　如同在定理 2 的证明一样,结论的第 1 部分由关系 $k_t(u,v) = \boldsymbol{f}^*(u) \cdot \boldsymbol{\alpha}_t \cdot f(v)$ 给出,$\forall u, v (0 < u, v \leqslant t)$. 第 2 部分通过极限和连续性得到.

2　一些奇异线性随机微分方程

考虑奇异线性随机方程(4). 兴趣在于定义在可能扩张空间上所有连续半鞅解的集合. 对特解 X,回想当(5) 式成立时(4) 式是很好给出的. 如果设 $W = \Sigma(B)$,这里 B 是 1 个布朗运动,那么集合至少包含 2 个现在可以简略描述的解. 首先,B 是 1 个解; 其次,还有 1 个解是定义在 $\mathbf{R}^+$ 上并且在它的有效区间上符合 f-广义桥. 后 1 个过程,对一些 $t_1 > 0$ 表示为 $(B_u^y, u \leqslant t_1)$,对实值 y 的 1 个列向量,定义为 $B_u^y = B_u - \boldsymbol{\psi}^*(u) \cdot \int_0^{t_1} f(s) \mathrm{d}B_s + \boldsymbol{\psi}^*(u) \cdot \boldsymbol{y}, 0 < u < t_1$,这里 $\boldsymbol{\psi}$ 是这个线性系统 $\int_0^u f(s) \mathrm{d}s = \boldsymbol{\psi}(u) \cdot \int_0^{t_1} f(s) \cdot \boldsymbol{f}^*(s) \mathrm{d}s = \boldsymbol{\psi}(u) \cdot \boldsymbol{m}_{t_1} (0 < u < t_1)$ 的唯一解. 则 $\boldsymbol{\psi}(u) = \boldsymbol{\alpha}_{t_1} \cdot \int_0^u f(s) \mathrm{d}s$ 蕴含了 $\int_0^{t_1} f(s) \mathrm{d}B_s^y = \boldsymbol{y}$,因为 $\boldsymbol{\alpha}_{t_1}$ 是矩阵 $\boldsymbol{m}_{t_1}$ 的逆. 这就是为什么称以上过程为在 $[0,t_1]$ 上有终点 $\boldsymbol{y}$ 的 f-广义桥. 现在,有 $\Sigma(B^y) = \Sigma(B)$ 成立,因为 Σ 是线性的并且 $\Sigma(\int_0^\cdot f(r) \mathrm{d}r) \equiv 0$,因为对于所有 $0 < t < \infty$, $f(t) = \int_0^t k(t,v) f(v) \mathrm{d}v$. 这说明 B_y 也是(4) 式的 1 个解,事实上,它不是 1 个标准分解. 现在,考虑任意布朗运动 W 的方程(4).

定理 3　(*i*) X 是方程(4) 的解,当且仅当存在 1 个随机向量 $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots, Y_n)^*$ 使得

$$X = X^0 + \int_0^\cdot \boldsymbol{f}^*(u) \mathrm{d}u \cdot \boldsymbol{Y}, \quad (7)$$

这里 $X^0 = W - \int_0^\cdot \int_u^\infty \boldsymbol{\varphi}^*(v) \cdot f(u) \mathrm{d}W_v \mathrm{d}u$, $X, \boldsymbol{Y}$ 按照 $\boldsymbol{Y} = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\alpha}_t \cdot \int_0^t f(u) \mathrm{d}X_u$ 给出.

(*ii*) X^0 是 1 个布朗运动当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_\infty \equiv \mathbf{0}$. 当

$\boldsymbol{\alpha}_\infty \neq \mathbf{0}$ 时,方程(4)的解 X 是 1 个布朗运动,当且仅当 Y 独立于 $F_\infty^{X^0}$ 并且具有协方差矩阵 $\boldsymbol{\alpha}_\infty$ 的中心高斯过程.

证 (i)首先验证 X_t^0 是方程(4)的 1 个特解. 利用随机 *Fubini* 定理[14],完成分解

$$X_t^0 - \int_0^t \int_0^u k(u,v) X_v^0 \mathrm{d}u = W_t - \int_0^t \int_u^\infty k(v,u) \mathrm{d}W_v \mathrm{d}u - \int_0^t \int_0^u k(v,u)\left(\mathrm{d}W_v - \int_v^\infty k(\rho,v) \mathrm{d}W_\rho \mathrm{d}v\right) \mathrm{d}u = W_t - \int_0^t \int_u^\infty k(v,u) \mathrm{d}W_v \mathrm{d}u - \int_0^t \int_0^u k(u,v) \mathrm{d}W_v \mathrm{d}u + \int_0^t \int_0^u \int_0^\rho k(u,v) k(\rho,v) \mathrm{d}v \mathrm{d}W_\rho \mathrm{d}u + \int_0^t \int_u^\infty \int_0^u k(u,v) k(\rho,v) \mathrm{d}v \mathrm{d}W_\rho \mathrm{d}u.$$

因为 k 是自再生的,方程的最后 4 项可以消掉,X_t^0 是方程(4)的解. 接下来,如果 X 是 1 个解,则通过令 $X = X^0 + Z$ 可以看到 Z 必须满足 $\mathrm{d}Z_r = \int_0^r k(r,v) \mathrm{d}Z_v \mathrm{d}r$,$0 < r < \infty$. 两边同时乘以 $f(r)$,关于 r 在 $[0,t]$ 上积分,得

$$\int_0^t \boldsymbol{f}(v) \mathrm{d}Z_v = \int_0^t \boldsymbol{f}(v) \boldsymbol{\varphi}^*(v) \cdot \int_0^v \boldsymbol{f}(r) \mathrm{d}Z_r \mathrm{d}v = \int_0^t \boldsymbol{m}_v \cdot \boldsymbol{\varphi}(v) \boldsymbol{\varphi}^*(v) \cdot \int_0^v \boldsymbol{f}(r) \mathrm{d}Z_r \mathrm{d}v = -\int_0^t \boldsymbol{m}_v \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} \boldsymbol{\alpha}_v \cdot \int_0^v \boldsymbol{f}(r) \mathrm{d}Z_r \mathrm{d}v.$$

这里利用定理 2 中证明给出的 $\boldsymbol{\alpha}'$ 表达式去得到最后的等式. 因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{m}$ 的逆,最后的关系可以写成 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{\alpha}_t \cdot \int_0^t \boldsymbol{f}(s) \mathrm{d}Z_s = 0$. 综合起来,对一些随机向量 $\boldsymbol{Y}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_t \cdot \int_0^t \boldsymbol{f}(s) \mathrm{d}Z_s = \boldsymbol{Y}$. 因此 $\int_0^t \boldsymbol{f}(r) \mathrm{d}Z_r = \boldsymbol{m}_t \cdot \boldsymbol{Y}$ 蕴含了 $Z_t = \boldsymbol{Y}^* \cdot \int_0^t \boldsymbol{f}(s) \mathrm{d}s$. 这完成了第 1 个命题第 1 部分的证明. 对于第 2 部分,由定理 2 得

$$\boldsymbol{\varphi}(t) \mathrm{d}W_t = \boldsymbol{\varphi}(t) \mathrm{d}X_t - \boldsymbol{\varphi}(t) \boldsymbol{\varphi}^*(t) \cdot \int_0^t \boldsymbol{f}(u) \mathrm{d}X_u \mathrm{d}t = \boldsymbol{\alpha}_t \cdot \mathrm{d}\left(\int_0^t \boldsymbol{f}(u) \mathrm{d}X_u\right) - \boldsymbol{\varphi}(t) \boldsymbol{\varphi}^*(t) \cdot \int_0^t \boldsymbol{f}(u) \mathrm{d}X_u \mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\boldsymbol{\alpha}_t \cdot \int_0^t \boldsymbol{f}(u) \mathrm{d}X_u\right).$$

两边在 $[s,t]$ 上积分得

$$\int_s^t \boldsymbol{\varphi}(u) \mathrm{d}W_u = \boldsymbol{\alpha}_t \cdot \int_0^t \boldsymbol{f}(u) \mathrm{d}X_u - \boldsymbol{\alpha}_s \cdot \int_0^s \boldsymbol{f}(u) \mathrm{d}X_u.$$

然后,注意到当 $t \to \infty$ 时,左边几乎处处收敛. 那么对以一些表示为 $\tilde{Y}$ 的极限右边也收敛. 更确切地说,设 $\tilde{\boldsymbol{Y}} = \lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{\alpha}_t \cdot \int_0^t \boldsymbol{f}(u) \mathrm{d}X_u$,已经证明了

$$\int_t^\infty \boldsymbol{\varphi}(u) \mathrm{d}W_u = \tilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{\alpha}_t \cdot \int_0^t \boldsymbol{f}(u) \mathrm{d}X_u, 0 < t \leqslant \infty. \quad (8)$$

因此,有

$$\int_0^t \int_u^\infty \boldsymbol{f}^*(u) \cdot \boldsymbol{\varphi}(v) \mathrm{d}W_v \mathrm{d}u - \tilde{\boldsymbol{Y}}^* \cdot \int_0^t \boldsymbol{f}(u) \mathrm{d}u = \int_0^t \boldsymbol{f}^*(u) \boldsymbol{\alpha}(u) \cdot \int_0^u \boldsymbol{f}(v) \mathrm{d}X_v \mathrm{d}u = \int_0^t \int_0^u \boldsymbol{\varphi}^*(u) \cdot \boldsymbol{f}(v) \mathrm{d}X_v \mathrm{d}u.$$

所以,有

$$\int_0^t \int_u^\infty k(v,u) \mathrm{d}W_v \mathrm{d}u - \tilde{\boldsymbol{Y}}^* \cdot \int_0^t \boldsymbol{f}(u) \mathrm{d}u = -\int_0^t \int_0^u k(u,v) \mathrm{d}X_v \mathrm{d}u = W_t - X_t.$$

比较之前的运算得到 $\boldsymbol{Y} = \tilde{\boldsymbol{Y}}$,$P_0$ 几乎必然.

(ii)定理 2 蕴含了

$$E[X_s^0 X_t^0] = s \wedge t - \int_0^{s\wedge t} \int_0^t \boldsymbol{f}^*(r) \cdot \boldsymbol{\alpha}_\infty \cdot \boldsymbol{f}(v) \mathrm{d}v \mathrm{d}r. \quad (9)$$

很显然 X^0 是 1 个布朗运动当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_\infty \equiv \mathbf{0}$. 接下来,若如(9)式所规定的那样,并且实际上 $\boldsymbol{\alpha}_\infty$ 是 $\boldsymbol{Y}$ 的协方差矩阵,则有

$$E[X_s X_t] = s \wedge t - \int_0^s \int_0^t \boldsymbol{f}^*(u) \cdot \boldsymbol{\alpha}_\infty \cdot \boldsymbol{f}(v) \mathrm{d}v \mathrm{d}u + \int_0^s \int_0^t E[(\boldsymbol{Y}^* \cdot \boldsymbol{f}(u))(\boldsymbol{Y}^* \cdot \boldsymbol{f}(v))] \mathrm{d}v \mathrm{d}u = s \wedge t.$$

因为 X 是 1 个连续高斯过程,所以可以得出它是 1 个布朗运动. 相反地,如果 X 是(4)式的布朗解,则它有(7)式的形式. 由于 Goursat-Volterra 变换的正交性,可以看到对任意固定的 $t > 0$,$\boldsymbol{Y}$ 是独立于 $F_t^{\Sigma(X)} = F_t^W$ 的. 接下来,通过令 $t \to \infty$,可以得到 $\boldsymbol{Y}$ 是独立于 $F_\infty^{X^0} \subseteq F_\infty^W$ 的. 因此,$\boldsymbol{Y}$ 是具有协方差矩阵 $\boldsymbol{\alpha}_\infty$ 并且独立于给定 $F_\infty^{X^0}$ 的高斯向量.

由于对称矩阵 $\boldsymbol{\alpha}_\infty$ 的重要性,以定理 2 为例,可以很自然地得到它的结构描述. 隐藏在定理 3 证明中的结果给出了列向量或者行向量为 $\mathbf{0}$ 的充要条件.

推论 1 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$ 和所有 j 有 $(\boldsymbol{\alpha}_\infty)_{i,j} = (\boldsymbol{\alpha}_\infty)_{j,i}$,当且仅当 $\|f_i\| = \infty$.

证 对于固定的 $t > 0$,$\boldsymbol{\alpha}_t$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_t \cdot \int_0^t \boldsymbol{f}(s) \mathrm{d}B_s$ 的协方差矩阵. 此外,由定理 3 得 $\boldsymbol{\alpha}_t \cdot \int_0^t \boldsymbol{f}(s) \mathrm{d}B_s$ 收敛到 $\boldsymbol{Y}$,可能有一些零分量,使得 $E(\boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{Y}^*) = \boldsymbol{\alpha}_\infty$. 因此,对一些 i,$Y_i \equiv 0$ 当且仅当 $(\boldsymbol{\alpha}_\infty)_{i,i} = 0$ 并且当且仅当 $\|f_i\| = \infty$. $(\boldsymbol{\alpha}_\infty)_{i,i} = 0$ 当且仅当对于所有 j,$(\boldsymbol{\alpha}_\infty)_{i,j} = 0$. 为了得到这个结果,令 $t \to \infty$ 且利用对称正定矩阵的著名不等式 $|(\boldsymbol{\alpha}_t)_{i,j}|^2 \leqslant (\boldsymbol{\alpha}_t)_{i,i} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_t)_{j,j}$ 的连续性.

下面分析由 Goursat-Volterra 变换引起的滤过的

正交分解,并且给出说明.

推论 2　由(3)式给出的正交分解成立. 此外,逐步分解

$$F_t^B = F_t^{\Sigma(B)} \otimes \sigma\left(Y - \int_t^\infty \varphi(u)\,\mathrm{d}\Sigma(B)_u\right),0 < t < \infty$$

成立,这里 $Y \equiv 0$,如果 $\alpha_\infty \equiv 0$. 否则,Y 是 1 个有协方差矩阵 α_∞ 的独立于 $F_\infty^{\Sigma(B)}$ 的高斯向量. 因此,当 $\alpha_\infty \equiv 0$ 时,$F_\infty^B = F_\infty^{\Sigma(B)}$. 否则 $F_\infty^B = F_\infty^{\Sigma(B)} \vee \sigma\{Y\}$.

证　对于固定的 $t > 0$,定理 3 蕴含了

$$B_t = \Sigma(B)_t - \int_0^t\int_u^\infty k(u,v)\,\mathrm{d}\Sigma(B)_v\mathrm{d}u + Y^* \cdot \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u,$$

这里 Y 是 1 个有协方差 α_∞ 的独立于 $F_\infty^{\Sigma(B)}$ 的高斯向量. 因此,有

$$\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}B_u = m_t \cdot \left(Y - \int_t^\infty \varphi(u)\,\mathrm{d}\Sigma(B)_u\right),$$

这使 $\sigma\{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}B_u\} = \sigma\{Y - \int_t^\infty \varphi(u)\,\mathrm{d}\Sigma(B)_u\}$. 当 $t \to +\infty$ 时,上式蕴含了第 1 个结论.

3　一些正鞅的联系

令 $(k(t,s),t \geqslant s > 0)$ 是 1 个阶为 n 的 Goursat–Volterra 核,这里 $n \in \mathbf{N}$. 假设 f 是 1 个基于 k 的再生,或者基于相应的 Volterra 变换 Σ,并且继续沿用引言中的记号. 考虑由标准布朗运动 W 驱动的关于 k 的 1 个奇异随机微分方程(4). 目的是去描述集合 $\mathscr{Y}^{(k)} = \{P$ 是 1 个在 $(C([0,\infty),\mathbf{R}),F_\infty^*)$ 上的连续半鞅 X 的概率,使得方程(4)满足 $\Sigma(X)$ 是 1 个布朗运动且对于所有 $0 < t < \infty$,$F_t^{\Sigma(X)}$ 是独立于 $\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}X_s$ 的$\}$.

由定理 3 知 $\alpha_\infty \equiv 0$ 当且仅当对于所有 i,$\|f_i\| = \infty$. 陈述集合 $\mathscr{Y}^{(k)}$ 的如下统一特性描述.

定理 4　如果 $\alpha_\infty \equiv 0$,则以下命题等价:

(i) $P \in \mathscr{Y}^{(k)}$;

(ii) P 满足 $B + Y^* \cdot \int_0^\cdot f(s)\,\mathrm{d}s$,这里 B 是 1 个标准布朗运动,Y 是 1 个独立于 F_∞^B 的随机变量向量;

(iii) 存在 1 个正函数 $h \in C^{1,2}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n,\mathbf{R}^+)$ 使得 $h(\cdot,\int_0^\cdot f^*(s)\,\mathrm{d}B_s)$ 是 1 个期望为 1 的连续 (P_0,F) 鞅,并且 $P = P_0^h$ 有 $P_0^h|_{F_t} = h(t,\int_0^t f^*(s)\,\mathrm{d}B_s) \cdot P_0|_{F_t}$,$0 < t < \infty$,这里 P_0 代表维纳测度.

证　(i) ⇒ (ii)　令 $P \in \mathscr{Y}^{(k)}$. 定理 3 蕴含了存在 1 个向量 Y 使得 P 满足 $X_t^0 + Y^* \cdot \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$. 联合假设 $\alpha_\infty \equiv 0$ 得到 X^0 是 1 个布朗运动. 因此,说明 Y 是独立于 X^0 的. 由(8)式得 $Y = \int_t^\infty \varphi(u)\,\mathrm{d}B_u + \alpha_t \cdot \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}X_u$;向量 $\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}X_u$ 是独立于 B 的,因此它同样是独立于 X^0 的. 所以,当 $Z \in L^2(F_\infty^{X^0})$ 时,对任意固定的 $t \geqslant 0$,有

$$E\left[E[Z \mid F_t^{X^0}]\,\varphi\left(Y - \int_0^t \varphi(u)\,\mathrm{d}B_u\right)\right] = E[Z]\,E\left[\varphi\left(Y - \int_0^t \varphi(u)\,\mathrm{d}B_u\right)\right],$$

对任意有界函数 φ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. 令 $t \to \infty$ 得到 $E[Z \cdot \varphi(Y)] = E[Z]\,E[\varphi(Y)]$,蕴含了独立性要求.

(ii) ⇒ (i)　令 k 是 1 个 Goursat–Volterra 核. 通过 f 定义 1 个基于 k 的再生,设 $X_t = B_t + Y^* \cdot \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\ (t > 0)$. 对固定的 $t > 0$,$\int_0^u f(u)\,\mathrm{d}B_u \in \Gamma_t^{(k)}$,可以写作

$$X_t - \int_0^t\int_0^u k(u,v)\,\mathrm{d}X_v\mathrm{d}u = B_t - \int_0^t\int_0^u k(u,v)\,\mathrm{d}X_v\mathrm{d}u = \Sigma(B)_t.$$

这当然是 1 个布朗运动. 另外,再用 1 次上述的讨论可以看到 $\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}X_u$ 是独立于 $F_t^{\Sigma(B)}$ 的.

(ii) ⇒ (iii)　将 Y 的分布表示为 $v(\mathrm{d}y)$. 对于任意的可测函数 φ,有

$$E\left[\varphi\left(B_s + Y^* \cdot \int_0^s f(u)\,\mathrm{d}u : s \leqslant t\right)\right] = \int_{\mathbf{R}^n} E\left[\varphi\left(B_s + y^* \cdot \int_0^s f(u)\,\mathrm{d}u : s \leqslant t\right)\right] v(\mathrm{d}y) = \int_{\mathbf{R}^n} E\left[\exp\left(\int_0^t y^* \cdot f(u)\,\mathrm{d}B_u - \frac{1}{2}\int_0^t (y^* \cdot f(u))^2\mathrm{d}u\right)\varphi(B_s : s \leqslant t)\right] v(\mathrm{d}y),$$

这里最后 1 个等式是通过 Girsanov 定理获得. 在 $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n$ 上的间隔调和函数为

$$h(t,x) = \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left(y^* \cdot x - \frac{1}{2}\int_0^t (y^* \cdot f(s))^2\mathrm{d}s\right) v(\mathrm{d}y).$$

(iii) ⇒ (ii)　固定 $0 < u \leqslant t < +\infty$,设 $\psi(u,t) = \alpha_t \cdot \int_0^u f(s)\,\mathrm{d}s$. 写出显而易见的分解

$$B_u = \left(B_u - \psi^*(u,t) \cdot \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s\right) + \psi^*(u,t) \cdot \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s,$$

将右边的第 1 项表示为 H_u^t. 注意到过程 $(H_u^t,u < t)$ 在 P_0 和 P_0^h 下有相同的规律. 接下来,简写为

$$\hat{H}_u^t = \psi^*(u,t) \cdot \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s = Y_t^* \cdot \int_0^u f(s)\,\mathrm{d}s,$$

这里设 $Y_t^* = \alpha_t \cdot \int_0^t f(r)\,\mathrm{d}B_r$. $\forall s(0 \leqslant s \leqslant u \leqslant t)$,有 $E[H_s^t H_u^t] = s - \psi^*(s,t) \cdot \int_0^u f(v)\,\mathrm{d}v$ 和 $\psi^*(s,t) \cdot$

$\int_0^u f(v)\,\mathrm{d}v = \int_0^u f^*(v)\,\mathrm{d}v \cdot \alpha_t \cdot \int_0^s f(r)\,\mathrm{d}r \to 0$ (当 $t \to \infty$),因为 $\alpha_\infty \equiv 0$,得出的结论是依分布收敛 $H^t_\cdot \to B^{(h)}_\cdot$ 成立,这里 $B^{(h)}_\cdot$ 是 1 个 P^h_0 布朗运动. 这蕴含了 $\hat{H}^t_\cdot$ 的收敛同样是 1 个有限极限. 但是当且仅当 Y^*_t 收敛到有限极限 Y^*,最后,从以上讨论看到 Y^* 是独立于 $F^{B(h)}_\infty$ 的,定理 4 得证.

注 1 本文的主要结果推广了文献[3,15]的一些结果,为文献[15]中所介绍和研究的带有条件和约束的随机微分方程提供了 1 个明确的例子. 推论 2 给出形如(4)式的奇异方程和渐进的扩张滤过可以很容易地应用于文献[4,16-17]中阐述的内线交易模型.

4 参考文献

[1] Jeulin Th,Yor M. Grossissements de filtrations: exemples et applications [M]. Berlin: Springer-Verlag,1985.
[2] Deheuvels P. Invariance of Wiener processes and of Brownian bridges by integral transforms and applications [J]. Stochastic Process Appl,1982,13(3):311-318.
[3] Jeulin Th,Yor M. Filtration des ponts browniens et equations differentielles lineaires [M]. Berlin: Springer-Verlag,1990.
[4] Karatzas I,Pikovsky I. Anticipative portfolio optimization [J]. Adv Appl Probab,1996,28(4):1095-1122.
[5] Kumaresan N. Solution of generalized matrix Riccati differential equation for indefinite stochastic linear quadratic singular fuzzy system with cross-term using neural networks [J]. Neural Computing and Applications,2012,21(3):497-503.
[6] 任磊,孙乐平. 一类奇异微分代数系统的数值解 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2012,36(5):491-494.
[7] Kallianpur G. Stochastic filtering theory [M]. New York: Springer-Verlag,1980.
[8] 包立平. 一类奇摄动线性随机微分方程边值问题 [J]. 杭州电子科技大学学报,2012,32(1):92-95.
[9] 全晓静,韩惠丽,王健. Adomian 分解法求解非线性分数阶 Volterra 积分方程 [J]. . 江西师范大学学报: 自然科学版,2014,38(5):517-520.
[10] Berlinet A,Thomas-Agnan C. Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers,2004.
[11] Hibino Y,Hitsuda M,Muraoka H. Construction of non-canonical representations of a Brownian motion [J]. Hiroshima Math J,1997,27(3):439-448.
[12] Alili L. Canonical decomposition of certain generalized Brownian bridges [J]. Electron Comm Probab,2002(7):27-36.
[13] Follmer H,Wu C T,Yor M. On weak Brownian motions of arbitrary order [J]. Ann Inst H Poincare Probab Statist,2000,36(4):447-487.
[14] Protter Ph. Stochastic integration and differential equations [M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag,2005.
[15] Yor M. Some aspects of Brownian motion part I: some special functionals, lectures in mathematics ETH Zürich [M]. Boston: Birkhäuser,1992.
[16] Baudoin F. Conditioned stochastic differential equations: theory,examples and application to finance [J]. Stochastic Process Appl,2002,100(1/2):109-145.
[17] Amendinger J. Initial enlargement of filtrations and additional information in financial markets [D]. Berlin: Technische Universitat,1999.

The Several Results of Singular Linear Stochastic Differential Equations

HU Hua

(School of Mathematics and Computer Science,Ningxia University,Yinchuan Ningxia 750021,China)

Abstract: The type with Goursat kernel function retained the Wiener measure on the Volterra transformation is studied. This kind of kernel function satisfy a self-reproduction property. Some results on the inverses of the associated Gramian matrices which lead to a new self-reproduction property are provided. And it links with the classical reproduction property. The result is applied to a class of singular linear stochastic differential equation with corresponding filter decomposition's study. The equation is regarded as some non-standard decomposition of generalized bridges.

Key words: stochastic differential equations; Volterra transform; Brownian motion; enlargement of filtrations; Goursat kernels; self-reproducing kernels

(责任编辑: 曾剑锋)