**文章编号:** 1000-5862(2015)05-0514-05

# $P$-平坦半模和 $k$-$P$-平坦半模

毛 瑜,黄福生*,许 娣,李 扬

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

**摘要:** 在半模张量积和真正合列的基础上,给出 $P$-平坦半模和 $k$-$P$-平坦半模的定义,讨论了它们的相关性质,刻画了 $k$-$P$-平坦半模和 $P$-内射半模的关系,最后,通过 $k$-$P$-平坦右 $R$-半模来对半环 $R$ 的左主理想进行一些研究.

**关键词:** $P$-平坦半模; $k$-$P$-平坦半模; $P$-内射半模

**中图分类号:** O 153.3 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.05.15

## 0 引言

自 1966 年 S. M. Yusuf[1] 引入半环上逆半模的概念并得到了逆半模中类似模论的性质后,一批代数工作者试图将模论的相关概念及研究结果搬到半模上. 1999 年 J. S. Golan[2] 综合介绍了半环和半模及其应用,近 10 多年来,在半模领域已取得相当多的研究成果[3-15].

平坦半模是一类重要的半模,它既是投射半模的推广,又与内射半模有着密切的联系. 由于人们至今没有掌握平坦半模的内部结构,因此对平坦半模及其性质的深入研究自然成为半模论中重要研究课题之一. 在文献[3]中,H. M. J. Al-Thani 定义了平坦半模和 $k$-平坦半模,刻画了 $k$-平坦半模与内射半模的关系. 受文献[16]的启发,在文献[4,17]的基础上,将对平坦半模和 $k$-平坦半模进行延拓,引入 $P$-平坦半模与 $k$-$P$-平坦半模,得出相似的性质,以便更深刻地认识平坦半模这一类半模.

文中所有半环都是带单位元的半环,同态均指半模同态,用 $_RM$ 和 $M_R$ 分别表示左 $R$-半模和右 $R$-半模,约定 $\mathscr{N}$ 表示非负整数半环,以下几个定义是本文中常用到的,未定义的概念和符号均参见文献[2-3].

**定义 1** 设 $R$ 是一个半环,$M_R$、$_RN$ 分别为右 $R$-半模、左 $R$-半模,$M \times N$ 是集合的卡氏积,设 $(A,+)$ 为左 $\mathscr{N}$-半模,称映射 $\beta: M \times N \to A$ 为 $R$-平衡,如果满足条件:

(i) $\beta(m_1+m_2,n)=\beta(m_1,n)+\beta(m_2,n)$;

(ii) $\beta(m,n_1+n_2)=\beta(m,n_1)+\beta(m,n_2)$;

(iii) $\beta(mr,n)=\beta(m,rn)$;

(iv) $\beta(0_M,n)=\beta(m,0_N)=0_A$;

其中 $m,m_1,m_2 \in M,n,n_1,n_2 \in N,r \in R$.

**定义 2** 设 $T$ 为左 $\mathscr{N}$-半模,$t: M_R \times {_RN} \to T$ 为 $R$-平衡映射,称 2 元组 $(T,t)$ 为 $M_R$ 与 $_RN$ 的张量积,如果对任意的左 $\mathscr{N}$-半模 $A$ 和任意的 $R$-平衡映射 $\beta: M \times N \to A$,存在唯一的 $\mathscr{N}$-同态 $f: T \to A$,满足 $f \circ t=\beta$,即图 1 交换.

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "t"'] & A \\ T \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

图 1 泛性质交换图

记 $T=M \otimes_R N$,$t(m,n)=m \otimes n$,称 $t$ 为 $M \times N \to M \otimes_R N$ 的张量映射.

若 $_SM_R$,$_RN_T$ 均为双半模,则 $M \otimes_R N$ 为 $(S,T)$-双半模,其纯量乘法为

$$s(m \otimes n)=(sm) \otimes n,(m \otimes n)t=m \otimes (nt).$$

## 1 $P$-平坦半模与 $k$-$P$-平坦半模的性质

**定义 3** 称右 $R$-半模 $M$ 是 $P$-平坦半模,记作 $M \in P\text{-}Flat\mathscr{M}_R$,如果对半环 $R$ 的任意左主理想 $P$,

收稿日期: 2015-02-10

基金项目: 国家自然科学基金(11261021)资助项目.

通信作者: 黄福生(1962-),男,江西抚州人,教授,主要从事半环和半模理论的研究.

同态列 $0 \to M \otimes P \xrightarrow{I_M \otimes i_P} M \otimes R$ 是真正合列(即 $\ker(I_M \otimes i_P) = 0$).对于左 $R$-半模,可类似定义 $P$-平坦半模.

**定义 4**　称右 $R$-半模 $M$ 是 $k$-$P$-平坦半模,记作 $M \in k\text{-}P\text{-}Flat.\mathscr{M}_R$,如果对半环 $R$ 的任意左主理想 $P$,同态列 $0 \to M \otimes P \xrightarrow{I_M \otimes i_P} M \otimes R$ 是真正合列且 $I_M \otimes i_P$ 是 $k$-正则(即 $I_M \otimes i_P$ 是单同态).对于左 $R$-半模,可类似定义 $k$-$P$-平坦半模.

若 $M_R$ 是 $k$-$P$-平坦半模,则 $M_R$ 是 $P$-平坦半模;若 $M_R$ 是平坦半模,则 $M_R$ 是 $P$-平坦半模;若 $M_R$ 是 $k$-平坦半模,则 $M_R$ 是 $k$-$P$-平坦半模.

**命题 1**　设 $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是一族右 $R$-半模,则 $\oplus_A M_\alpha$ 是 $k$-$P$-平坦半模当且仅当 $\forall\ \alpha \in A$,$M_\alpha$ 是 $k$-$P$-平坦半模.

**证　必要性**　对于半环 $R$,$P$ 为 $R$ 的任意左主理想,其中

$$\pi_\alpha: \oplus(M_\alpha \otimes P) \to M_\alpha \otimes P$$

和

$\pi'_\alpha: \oplus(M_\alpha \otimes R) \to M_\alpha \otimes R$ 为标准投射,

$i_\alpha: M_\alpha \otimes P \to \oplus(M_\alpha \otimes P)$

和

$i'_\alpha: M_\alpha \otimes R \to \oplus(M_\alpha \otimes R)$ 为标准内射,$\varphi: (\oplus M_\alpha) \otimes P \to \oplus(M_\alpha \otimes P)$ 定义为 $(\sum(m_\alpha)) \otimes p_\alpha \to \sum(m_\alpha \otimes p_\alpha)$,$\theta: \oplus(M_\alpha \otimes P) \to \oplus(M_\alpha \otimes R)$ 定义为 $\sum(m_\alpha \otimes p_\alpha) \to \sum(m_\alpha \otimes i_p(p_\alpha))$.

易证图 2 是交换的,由文献[4,定理 3.2]知,$\varphi$,$\varphi'$ 是同构.若 $(I_{M_\alpha} \otimes i_P)(\sum(m_\alpha \otimes p_\alpha)) = (I_{M_\alpha} \otimes i_P)(\sum(m'_\alpha \otimes p'_\alpha))$,即

$$\sum(m_\alpha \otimes i_P(p_\alpha)) = \sum(m'_\alpha \otimes i_P(p'_\alpha)),$$

两边同时作用 $\varphi'^{-1}i'_\alpha$ 得 $\sum((m_\alpha) \otimes i_P(p_\alpha)) = \sum((m'_\alpha) \otimes i_P(p'_\alpha))$.

由于 $\oplus_A M_\alpha$ 是 $k$-$P$-平坦半模,则 $I_{\oplus M_\alpha} \otimes i_P$ 是单同态,

即 $\sum((m_\alpha) \otimes p_\alpha) = \sum((m'_\alpha) \otimes p'_\alpha)$.

因为 $\varphi$ 是同构,所以 $\sum(m_\alpha \otimes p_\alpha) = \sum(m'_\alpha \otimes p'_\alpha)$.又因为 $i_\alpha$ 是单同态,所以 $\sum(m_\alpha \otimes p_\alpha) = \sum(m'_\alpha \otimes p'_\alpha)$,即 $I_{M_\alpha} \otimes i_P$ 是单同态,从而 $\forall \alpha \in A$,$M_\alpha$ 是 $k$-$P$-平坦半模.

**充分性**　若 $(I_{\oplus M_\alpha} \otimes i_P)(\sum(m_\alpha \otimes p_\alpha)) = (I_{\oplus M_\alpha} \otimes i_P)(\sum(m'_\alpha \otimes p'_\alpha))$,两边同时作用 $\pi'_\alpha\varphi'$ 得 $\sum(m_\alpha \otimes i_P(p_\alpha)) = \sum(m'_\alpha \otimes i_P(p'_\alpha))$.由于 $M_\alpha$ 是 $k$-$P$-平坦半模,则 $I_{M_\alpha} \otimes i_P$ 是单同态,即 $\sum(m_\alpha \otimes p_\alpha) = \sum(m'_\alpha \otimes p'_\alpha)$,对两边作用 $\varphi^{-1}i_\alpha$ 得 $\sum(m_\alpha \otimes p_\alpha) = \sum(m'_\alpha \otimes p'_\alpha)$,即 $I_{\oplus M_\alpha} \otimes i_P$ 是单同态,所以 $\oplus_A M_\alpha$ 是 $k$-$P$-平坦半模.

$$\begin{tikzcd}
M_\alpha \otimes P \arrow[r, "I_{M_\alpha} \otimes i_P"] \arrow[d, shift left, "i_\alpha"] & M_\alpha \otimes R \arrow[d, shift right, "i'_\alpha"'] \\
\oplus(M_\alpha \otimes P) \arrow[r, "\theta"] \arrow[u, shift left, "\pi_\alpha"] \arrow[d, shift left, "\varphi^{-1}"] & \oplus(M_\alpha \otimes R) \arrow[u, shift right, "\pi'_\alpha"'] \arrow[d, shift right, "\varphi'^{-1}"'] \\
(\oplus M_\alpha) \otimes P \arrow[r, "I_{\oplus M_\alpha} \otimes i_P"] \arrow[u, shift left, "\varphi"] & (\oplus M_\alpha) \otimes R \arrow[u, shift right, "\varphi'"']
\end{tikzcd}$$

图 2　直和交换图

**命题 2**　设 $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是一族右 $R$-半模,则 $\oplus_A M_\alpha$ 是 $P$-平坦半模当且仅当 $\forall \alpha \in A$,$M_\alpha$ 是 $P$-平坦半模.

**证　必要性**　如图 2 所示,由文献[4,定理 3.2]知,$\varphi$,$\varphi'$ 是同构,若 $(I_{M_\alpha} \otimes i_P)(\sum(m_\alpha \otimes p_\alpha)) = 0$,即 $\sum(m_\alpha \otimes i_P(p_\alpha)) = 0$,两边作用 $\varphi'^{-1}i'_\alpha$ 得 $\sum((m_\alpha) \otimes i_P(p_\alpha)) = (I_{\oplus M_\alpha} \otimes i_P)((\sum(m_\alpha)) \otimes p_\alpha) = 0$.由于 $\oplus_A M_\alpha$ 是 $P$-平坦半模,则 $(\sum(m_\alpha)) \otimes p_\alpha = 0$,因为 $\varphi$ 是同构,所以 $\sum(m_\alpha \otimes p_\alpha) = 0$.又因为 $i_\alpha$ 是单同态,$i_\alpha(\sum(m_\alpha \otimes p_\alpha)) = 0$,所以 $\sum(m_\alpha \otimes p_\alpha) = 0$,故 $\forall\ \alpha \in A$,$M_\alpha$ 是 $P$-平坦半模.

**充分性**　若 $(I_{\oplus M_\alpha} \otimes i_P)((\sum(m_\alpha)) \otimes p_\alpha) = 0$,两边作用 $\pi'_\alpha\varphi'$ 得 $\sum(m_\alpha \otimes i_P(p_\alpha)) = (I_{M_\alpha} \otimes i_P)(\sum(m_\alpha \otimes p_\alpha)) = 0$.由于 $M_\alpha$ 是 $P$-平坦半模,所以 $\ker(I_{M_\alpha} \otimes i_P) = 0$,即 $\sum(m_\alpha \otimes p_\alpha) = 0$,两边作用 $\varphi^{-1}i_\alpha$ 得 $(\sum(m_\alpha)) \otimes p_\alpha = 0$,即 $\ker(I_{\oplus M_\alpha} \otimes i_P) = 0$,则 $\oplus_A M_\alpha$ 是 $P$-平坦半模.

**引理 1**[15]　设 $R$ 为半环,则半模 $R_R$ 是 $k$-平坦半模(平坦半模).

**引理 2**[15]　每个自由半模是 $k$-平坦半模(平坦半模).

**命题3** 设 $R$ 为半环,则半模 $R_R$ 是 $k$-$P$-平坦半模($P$-平坦半模);每个自由半模是 $k$-$P$-平坦半模($P$-平坦半模).

**定理1** 对任意半环 $R$ 和 $S$,设 $M\in {}_S\mathscr{M}_R$,且 $M\in k\text{-}P\text{-}Flat_S\mathscr{M}$,$N\in k\text{-}Flat_R\mathscr{M}$,则 $M\otimes N\in k\text{-}P\text{-}Flat_S\mathscr{M}$.

**证** 对于半环 $S$,$P$ 为 $S$ 的任意右主理想,因为 $M\in k\text{-}P\text{-}Flat_S\mathscr{M}$,所以

$$0\to P\otimes M\xrightarrow{i_P\otimes I_M}S\otimes M$$

是真正合列且 $i_P\otimes I_M$ 是 $k$-正则的. 又因为 $N\in k\text{-}Flat_R\mathscr{M}$,所以 $0\to P\otimes M\otimes N\xrightarrow{i_P\otimes I_M\otimes I_N}S\otimes M\otimes N$ 是真正合列且 $i_P\otimes I_M\otimes I_N$ 是 $k$-正则的,则 $M\otimes N\in k\text{-}P\text{-}Flat_S\mathscr{M}$.

**定理2** 对任意半环 $R$ 和 $S$,设 $M\in {}_S\mathscr{M}_R$,且 $M\in k\text{-}P\text{-}Flat_S\mathscr{M}$,$N\in Flat_R\mathscr{M}$,则 $M\otimes N\in P\text{-}Flat_S\mathscr{M}$.

**证** 对于半环 $S$,$P$ 为 $S$ 的任意右主理想,因为 $M\in k\text{-}P\text{-}Flat_S\mathscr{M}$,则有真正合列

$$0\to P\otimes M\xrightarrow{i_P\otimes I_M}S\otimes M$$

且 $i_P\otimes I_M$ 是 $k$-正则的. 又因为 $N\in Flat_R\mathscr{M}$,所以

$$0\to P\otimes M\otimes N\xrightarrow{i_P\otimes I_M\otimes I_N}S\otimes M\otimes N$$

是真正合列,则

$$\ker(i_P\otimes I_M\otimes I_N)=0,$$

即 $M\otimes N\in P\text{-}Flat_S\mathscr{M}$.

**定理3** 设 $R$ 为半环,右 $R$-半模 $M$ 是 $k$-$P$-平坦半模当且仅当对任何形如 $0\to P\xrightarrow{i_p}R\xrightarrow{\pi}R/P\to 0$ 的正合列,其中 $P$ 是 $R$ 的左主理想,有 $0\to M\otimes P\xrightarrow{I_M\otimes i_p}M\otimes R\xrightarrow{I_M\otimes\pi}M\otimes R/P\to 0$ 是正合的,且 $I_M\otimes i_P$ 是 $k$-正则.

**证** **必要性** 因为 $i_p$ 是单同态和右 $R$-半模 $M$ 是 $k$-$P$-平坦半模,所以 $0\to M\otimes P\xrightarrow{I_M\otimes i_P}M\otimes R$ 是正合的,且 $I_M\otimes i_P$ 是单的. 由自然满同态 $\pi$ 是 $k$-正则和文献[5,定理2]知,

$$M\otimes P\xrightarrow{I_M\otimes i_P}M\otimes R\xrightarrow{I_M\otimes\pi}M\otimes R/P\to 0$$

是正合的,所以

$$0\to M\otimes P\xrightarrow{I_M\otimes i_p}M\otimes R\xrightarrow{I_M\otimes\pi}M\otimes R/P\to 0$$

是正合的,且 $I_M\otimes i_P$ 是 $k$-正则.

**充分性** 对 $R$ 的任意左主理想 $P$,存在正合列 $0\to P\xrightarrow{i_p}R\xrightarrow{\pi}R/P\to 0$. 由已知条件知,$0\to M\otimes P\xrightarrow{I_M\otimes i_P}M\otimes R$ 是正合的,且 $I_M\otimes i_P$ 是 $k$-正则,所以右 $R$-半模 $M$ 是 $k$-$P$-平坦半模.

**定理4** 设 $R$ 为半环,$M$ 是右 $R$-半模,对 $R$ 的任意左主理想 $P$,则下列结论等价:

(i) $M$ 是 $k$-$P$-平坦半模;

(ii) $M\otimes P\overset{\varphi}{\cong}MP$,其中 $\varphi(m\otimes p_1)=mp_1$,$\forall m\in M,p_1\in P$.

**证** (i)$\Rightarrow$(ii) 由文献[4,命题1.7]知,$M\otimes R\cong M$. 令 $\varphi':M\times P\to MP$,其中 $\varphi'(m,p_1)=mp_1$,显然 $\varphi'$ 是 $R$-平衡映射. 由张量积泛性质知,存在唯一的 $N$-同态 $\varphi:M\otimes P\to MP$,显然 $\varphi$ 是满同态.

由 $M$ 是 $k$-$P$-平坦半模,则 $I_M\otimes i_P$ 是单同态. 若 $\varphi(\sum(m\otimes p))=\varphi(\sum(m'\otimes p'))$,

由图3可交换得

$$\eta(I_M\otimes i_P)(\sum(m\otimes p))=\eta(I_M\otimes i_P)\cdot(\sum(m'\otimes p')),$$

因为 $\eta$ 和 $I_M\otimes i_P$ 是单同态,所以

$$\sum(m\otimes p)=\sum(m'\otimes p'),$$

即 $\varphi$ 是单同态,则 $\varphi:M\otimes P\cong MP$.

$$\begin{tikzcd}
M\otimes P \arrow[r, "I_M\otimes i_P"] \arrow[d, "\varphi"'] & M\otimes R \arrow[d, "\eta"] \\
MP \arrow[r, "i_{MP}"] & M
\end{tikzcd}$$

图3 同态交换图

(ii)$\Rightarrow$(i) 因为 $i_{MP}$ 是单同态,$\eta$,$\varphi$ 是同构,所以 $I_M\otimes i_P$ 是单同态,故 $M$ 是 $k$-$P$-平坦半模.

## 2 $k$-$P$-平坦半模与 $P$-内射半模的关系

**引理3**[15](半模上的伴随同构定理) 设 $R$,$S$ 为任意半环,则

(i) 对任意的 $({}_RK,{}_SL_R,{}_SP)$ 有 $\mathscr{N}$-半模同构 $\varphi:\mathrm{Hom}_S(L\otimes K,P)\cong\mathrm{Hom}_R(K,\mathrm{Hom}_S(L,P))$.

(ii) 对任意的 $(K_R,{}_RL_S,P_S)$ 有 $\mathscr{N}$-半模同构 $\varphi':\mathrm{Hom}_S(K\otimes L,P)\cong\mathrm{Hom}_R(K,\mathrm{Hom}_S(L,P))$,

且 $\varphi$,$\varphi'$ 都是自然同构.

若 $R$,$S$ 为任意半环,$E\in{}_S\mathscr{M}$,$M\in{}_S\mathscr{M}_R$,则 $\mathrm{Hom}_S(M,E)\in{}_R\mathscr{M}$. 设 $f\in\mathrm{Hom}_S(M,E)$,定义 $rf(m)=f(mr)$,$\forall r\in R,m\in M$. 则 $\forall r'\in R$,$r'(rf)(m)=(rf)(mr')=f(mr'r)=(r'r)f(m)$,因此 $\mathrm{Hom}_S(M,E)\in{}_R\mathscr{M}$.

**定理 5**　设 $R$,$S$ 为任意半环,$E$ 是左 $S$-内射半模,$M \in {}_S\mathscr{M}_R$ 且 $M$ 是 $k$-$P$-平坦右 $R$-半模,则 $\mathrm{Hom}_S(M,E)$ 是 $P$-内射左 $R$-半模.

**证**　设 $P$ 是 $R$ 的任意左主理想,$i_P: P \to R$ 为嵌入同态. 考虑交换图(见图 4).

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_S(M\otimes_R R, E) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_S(I_M\otimes i_P, E)"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathrm{Hom}_S(M\otimes_R P, E) \arrow[d, "\varphi'"] \\ \mathrm{Hom}_R(R, \mathrm{Hom}_s(M,E)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(i_P, \mathrm{Hom}_s(M,E))"] & \mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Hom}_s(M,E)) \end{tikzcd}$$

图 4　Hom 函子交换图

易证图 4 是交换图. 由 $M$ 是 $k$-$P$-平坦右 $R$-半模,则 $0 \to M \otimes P \xrightarrow{I_M \otimes i_P} M \otimes R$ 是真正合列,且 $I_M \otimes i_P$ 是 $k$-正则的,即 $I_M \otimes i_P$ 是单同态. 因为 $E$ 是左 $S$-内射半模,所以 $\mathrm{Hom}_s(I_M \otimes i_P, E)$ 是满同态. 又由引理 3 知,$\varphi$,$\varphi'$ 是同构,则 $\mathrm{Hom}_R(i_P, \mathrm{Hom}_S(M,E))$ 是满同态. 由 $P$-内射半模的定义知,$\mathrm{Hom}_S(M,E)$ 是 $P$-内射左 $R$-半模.

记函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{N}}(\cdot, C)$ 为 $(\cdot)^*$,其中 $C$ 是可消 $\mathscr{N}$-半模上的内射上生成子.

**定理 6**　设 $R$ 为任意半环,$M$ 为右 $R$-半模,有

(i) 若 $M$ 是 $k$-$P$-平坦右 $R$-半模,则 $M^*$ 是 $P$-内射左 $R$-半模.

(ii) 若 $M^*$ 是 $P$-内射左 $R$-半模,则 $M$ 是 $P$-平坦右 $R$-半模.

**证**　(i) 由定理 5 可得.

(ii) 考虑如图 5 所示的交换图.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(R, M^*) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(i_P, M^*)"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathrm{Hom}_R(P, M^*) \arrow[d, "\varphi'"] \\ (M\otimes R)^* \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{N}}(I_M\otimes i_P, C)"] & (M\otimes P)^* \end{tikzcd}$$

图 5　伴随同构交换图

由于 $M^*$ 是 $P$-内射左 $R$-半模,从而

$$\mathrm{Hom}_R(R, M^*) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(i_p, M^*)} \mathrm{Hom}_R(P, M^*) \to 0$$

是真正合列. 又由引理 3 知,$\varphi$,$\varphi'$ 是同构,所以

$$(M \otimes R)^* \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{N}}(I_M \otimes i_P, C)} (M \otimes P)^* \to 0$$

也是真正合列. 由 $C$ 是可消 $\mathscr{N}$-半模上的内射上生成子知,$0 \to M \otimes P \to M \otimes R$ 是正合列,故 $M$ 是 $P$-平坦右 $R$-半模.

**定理 7**　若 $R$ 是正则半环,则任意右 $R$-半模 $M_R$ 是 $P$-平坦半模.

**证**　因为 $R$ 是正则半环,所以任意左 $R$-半模是 $P$-内射半模,即 $M^*$ 是 $P$-内射左 $R$-半模. 又由定理 6(ii) 得,$M$ 是 $P$-平坦右 $R$-半模.

**定理 8**　设 $R$ 为任意半环,则下列结论等价:

(i) $R$ 的每个主左理想都是 $k$-平坦的;

(ii) $k$-$P$-平坦右 $R$-半模的子半模是 $k$-$P$-平坦右 $R$-半模;

(iii) $k$-平坦右 $R$-半模的子半模是 $k$-$P$-平坦右 $R$-半模.

**证**　(i)$\Rightarrow$(ii)　设 $M_R$ 是 $k$-$P$-平坦半模,$N_R \leqslant M_R$,$i: N \to M$ 为嵌入同态,$P$ 是 $R$ 的任意左主理想,考虑交换图(见图 6).

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N\otimes P \arrow[r, "i\otimes I_P"] \arrow[d, "I_N\otimes i_P"] & M\otimes P \arrow[d, "I_M\otimes i_P"] \\ 0 \arrow[r] & N\otimes R \arrow[r, "i\otimes I_R"] & M\otimes R \end{tikzcd}$$

图 6　左正合交换图

由 (i) 知,${}_RP$ 是 $k$-平坦半模,则 $i \otimes I_P$ 是单同态. 因为 ${}_RR$ 是 $k$-平坦半模和 $M_R$ 是 $k$-$P$-平坦半模,所以 $i \otimes I_R$,$I_M \otimes i_P$ 是单同态. 由图 6 可交换得 $I_N \otimes i_P$ 也是单同态,故 $N_R$ 是 $k$-$P$-平坦半模.

(ii)$\Rightarrow$(iii)　显然成立.

(iii)$\Rightarrow$(i)　设 $P$ 是 $R$ 的任意左主理想,$i_P$: $P \to R$ 为嵌入同态,$M_R$ 是 $k$-平坦半模,$N_R \leqslant M_R$,考虑如图 7 所示的交换图.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N\otimes P \arrow[r, "I_N\otimes i_P"] \arrow[d, "i\otimes I_P"] & N\otimes R \arrow[d, "i\otimes I_R"] \\ 0 \arrow[r] & M\otimes P \arrow[r, "I_M\otimes i_P"] & M\otimes R \end{tikzcd}$$

图 7　张量左正合交换图

由 (iii) 知,$I_N \otimes i_P$,$I_M \otimes i_P$ 是单同态. 因为 ${}_RR$ 是 $k$-平坦半模,所以 $i \otimes I_R$ 是单同态,由图 7 可交换得 $i \otimes I_P$ 是单同态,故左主理想 ${}_RP$ 是 $k$-平坦半模.

## 3　参考文献


[1] Yusuf S M. Inverse semimodules [J]. J Natur Sci Math, 1966, 6: 111-117.

[2] Golan J S. Semirings and their applications [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[3] Al-Thani H M J. Flat semimodules [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2004, 2004(17): 873-880.

[4] Katsov Y. On flat semimodules over semirings [J]. Algebra Univers, 2004, 51(2/3): 287-299.

[5] Bhambri S K, Dubey M K. Extensions of semimodules and

injective semimodules [J]. Southeast Asian Bull Math, 2010, 34(1): 25-41.

[6] Briec W, Horvath C. On the separation of convex sets in some idempotent semimodules [J]. Linear Algebra Appl, 2011, 435(7): 1542-1548.

[7] Cohen G, Gaubert S, Quadrat J P. Duality and separation theorems in idempotent semimodules [J]. Linear Algebra Appl, 2004, 379(1): 395-422.

[8] Ebrahimi A R, Ebrahimi A S. On subsemimodules of semimodules [J]. Bul Acad Stiinte Repub Mold Mat, 2010, 63(2): 20-30.

[9] Ebrahimi A R. Prime subsemimodules of semimodules [J]. Int J Algebra, 2010, 4(26): 1299-1306.

[10] Wang Huaxing, Takahashi M. On epimorphisms of semimodules [J]. Kobe J Math, 1989, 7(6): 297-298.

[11] Chaudhari J N, Bonde D R. On subtractive extension of semimoduls [J]. J of the Chungcheong Mathematical Society, 2013, 26(1): 37-44.

[12] Tan Yijia. Inner products on semimodules over a commutative semiring [J]. Linear Algebra And Its Applications, 2014, 460: 151-173.

[13] 王聪, 黄福生. 拟内射半模与伪内射半模 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2012, 36(2): 155-159.

[14] 陈培慈, 周媛兰. 半模的张量积 [J]. 数学学报, 2002, 45(1): 139-150.

[15] 顾腾, 黄福生, 余安安. 平坦半模 [J]. 江西科学, 2011, 29(2): 141-145.

[16] 丰建文, 黄福生, 周永正. $I_V \otimes i_I$-内射模 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2008, 32(3): 300-305.

[17] 李珊珊. P-平坦模, P-内射模和某些环 [J]. 西南民族大学学报: 自然科学版, 2007, 33(1): 26-30.

# $P$-Flat Semimodules and $k$-$P$-Flat Semimodules

MAO Yu, HUANG Fusheng*, XU Di, LI Yang

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

**Abstract:** On the basis of the tensor product of semimodules and the proper exact sequence, the concepts of $P$-flat semimodules and $k$-$P$-flat semimodules are given, and their related properties are discussed. Also the relationship of $k$-$P$-flat semimodules and $P$-injective semimodules is described, and the left principal ideal of semiring $R$ is studied by means of $k$-$P$-flat right $R$-semimodules.

**Key words:** $P$-flat semimodules; $k$-$P$-flat semimodules; $P$-injective semimodules

(责任编辑: 曾剑锋)