

文章编号: 1000-5862(2015)06-0592-07

# 一类混合边界条件的裂缝散射问题及数值模拟

王泽文, 吴红利, 胡 彬

( 东华理工大学理学院, 江西 南昌 330013)

**摘要:** 考虑时谐电磁波对非常薄的无限长圆柱理想导体的散射问题, 该散射体在水平截面上抽象为平面上的曲线段(即裂缝). 假设曲线段是光滑的, 且其2侧赋予不同的边界条件(混合边界条件), 首先证明了散射问题解的唯一性; 然后通过位势理论与积分方程方法, 将问题转化为等价的奇异积分方程组并证明了解的存在性; 最后, 通过求解奇异积分方程组给出了混合边界裂缝散射问题的数值模拟.

**关键词:** Helmholtz 方程; 散射问题; 裂缝; 混合边界条件; 积分方程

**中图分类号:** O 241.8; O 241.6 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.06.10

## 0 引言

电磁波散射与逆散射问题在医学成像、无损探测、遥感与雷达等众多领域有着广泛而实际的应用. 本文主要考虑时谐电磁波对非常薄的无限长圆柱理想导体的散射问题, 该散射体在水平截面上抽象为平面上的曲线段, 常称其为裂缝, 而其数学模型归结为1类混合边界条件的 Helmholtz 方程边值问题. 这方面的研究吸引了国内外许多学者. 对于视裂缝为单纯的声柔( sound-soft) 与声刚( sound-hard) 散射体的情形, 文献[1]通过将声柔裂缝散射体的解表示成单层位势的形式获得数值解, 而文献[2]将声刚裂缝散射问题转化为等价的超奇异积分方程, 然后利用数值积分的方法获得散射问题的数值解. 对于将裂缝视为具有2个不同侧的散射体, 文献[3]考虑一类2侧均为声刚但取值不同的裂缝散射问题; R. Kress 等<sup>[4]</sup>考虑裂缝2侧均为一类特殊阻尼边界条件的散射问题, 他们采用组合位势法导出与裂缝散射问题等价的超奇异积分算子方程组, 从而证明了解的存在唯一性; 文献[5]研究了裂缝2侧被赋予更一般的阻尼边界条件的散射问题, 给出一种避免计算超奇异积分方程的数值解法; 文献[6]研究了一类混合裂缝散射问题的边界积分方程方法. 但是, 文献[7]研究了边界为封闭曲线的混合条件散射问

题的数值方法. 对于裂缝散射逆问题以及其它类型散射问题的研究可参见文献[1, 8-12].

这里考虑的是一类混合边界条件的裂缝散射问题, 该裂缝的一侧为声刚属性 Neumann 边界, 另一侧为涂有某种材料的阻尼边界. 本文首先给出了所考虑裂缝散射问题的数学模型, 并证明了该散射问题解的唯一性; 然后, 将裂缝散射问题转化为一等价的积分方程组, 证明了解的存在性; 最后, 利用超奇异边界积分方程的数值离散方法, 并采用余弦变化消除超奇异积分方程解的1阶导数的奇异性<sup>[3]</sup>, 给出了混合边界裂缝散射问题的数值模拟.

## 1 裂缝散射问题及其解的唯一性

本文考虑时谐电磁波对非常薄的无限长圆柱理想导体的散射问题, 该散射体在水平截面上可抽象为平面上的一条弧, 故而称其为裂缝. 为此, 假设裂缝  $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$  是平面上的一段光滑的弧, 且有如下参数化表示

$$\Gamma = \{z(t) : t \in [-1, 1]\},$$

其中映射  $z : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  是单射且无穷次可微. 记  $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \{z_{-1}, z_1\}$ , 其中  $z_{-1} = z(-1)$  和  $z_1 = z(1)$  分别表示弧的两端. 当从端点  $z_{-1}$  走向端点  $z_1$  时, 规定弧  $\Gamma$  的右侧和左侧分别为  $\Gamma^+$  和  $\Gamma^-$ , 且记  $\nu$  为指向  $\Gamma^+$  的单位法向量(见图1). 设在弧的2侧具有不

收稿日期: 2015-08-20

基金项目: 国家自然科学基金(11161002), 江西省自然科学基金(20142BAB201008), 江西省青年科学基金(20132BAB211014)和江西省青年科学家培养计划(20122BCB23024)资助项目.

作者简介: 王泽文(1974-), 男, 江西上饶人, 教授, 博士, 主要从事数学物理方程反问题理论及计算研究.

同的边界条件.特别地,设右侧  $\Gamma^+$  被涂上了阻尼系数为  $\lambda > 0$  的材料,则该裂缝散射的数学模型归结为 Helmholtz 混合边值问题

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u^-(x)}{\partial \nu} = 0 \quad x \in \Gamma^- \setminus \{z_{-1}, z_1\}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u^+(x)}{\partial \nu} + ik\lambda u^+(x) = 0 \quad x \in \Gamma^+ \setminus \{z_{-1}, z_1\}, \quad (3)$$

其中  $k > 0$  是波数,  $d$  是入射波方向且  $|d| = 1$ ,  $u(x) = u^i(x) + u^s(x)$  为波总场,  $u^i(x)$  为已知的入射波场,  $u^s(x)$  为散射波场,  $\lambda \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$  是表征裂缝右侧  $\Gamma^+$  阻尼性质的实函数,且  $\text{Re}(\lambda) > 0$ . 这里,  $u^\pm(x)$  和  $\partial u^\pm(x)/\partial \nu$  指的是

$$u^\pm(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} u(x \pm h\nu(x)) \quad x \in \Gamma,$$

$$\frac{\partial u^\pm(x)}{\partial \nu} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \nu(x) \cdot \text{grad} u(x \pm h\nu(x)) \quad x \in$$

$\Gamma \setminus \{z_{-1}, z_1\}$ .

为保证解的唯一性,散射波场  $u^s(x)$  需满足 Sommerfeld 辐射条件:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} (\partial u^s / \partial r - ik u^s) = 0 \quad r = |x| \quad (4)$$

对所有方向  $\hat{x} = x/|x|$  是一致成立的.

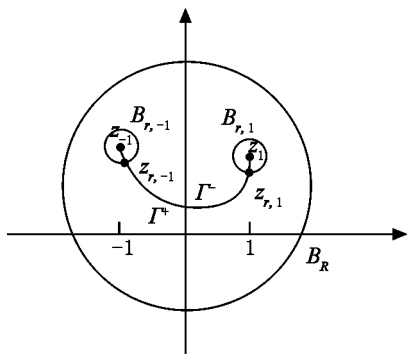


图1 裂缝示意图

本文考虑的混合边界条件裂缝散射问题是: 给定入射平面波  $u^i(x) = e^{ikx \cdot d}$  寻求函数  $u(x) = u^i(x) + u^s(x) \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma) \cap C(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma_0)$  使其满足 Helmholtz 方程(1)和边界条件(2)~(3)以及辐射条件(4).

注意到入射平面波  $u^i(x)$  是已知的,且在整个平面上满足 Helmholtz 方程与辐射条件(4),故上述裂缝散射问题本质上是求散射波场  $u^s(x)$ . 为方便和简洁起见,后文始终记  $u(x) := u^s(x)$ . 因此,混合边界条件的裂缝散射问题实际上为: 寻找散射波场  $u(x)$  满足定解问题

$$\begin{cases} \Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, & x \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma \quad (5) \\ \partial u^-(x) / \partial \nu = f(x), & x \in \Gamma_0, \quad (6) \\ \partial u^+(x) / \partial \nu + ik\lambda u^+(x) = h(x), & x \in \Gamma_0, \quad (7) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} (\partial u / \partial r - ik u) = 0, & r = |x|, \quad (8) \end{cases}$$

其中  $f = -\partial u^i(x) / \partial \nu$ ,  $h = -(\partial u^i(x) / \partial \nu + ik\lambda \cdot u^i(x))$ ,  $x \in \Gamma_0$ . 后文均以定解问题(5)~(8)为研究对象.

**引理1** 记  $B_R$  为圆心为原点与半径为  $R$  的开圆盘,  $\partial B_R$  为开圆盘  $B_R$  的边界,  $\nu$  为边界  $\partial B_R$  上的单位外法向量. 设  $u \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma) \cap C(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma_0)$  是对应于当  $f = h = 0$  时裂缝散射问题(5)~(8)的解,且  $\partial u^\pm / \partial \nu$  在  $\Gamma_0$  上存在,则对充分大的  $R$  (使得  $\Gamma$  在  $B_R$  内部)有  $u \in L^2(B_R)$  和

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \{ |\text{grad} u|^2 - k^2 |u|^2 \} dx &= \int_{\partial B_R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds - \\ &ik \int_{\Gamma} \bar{\lambda} |u^+|^2 ds. \end{aligned} \quad (9)$$

**证** 如图1所示,对于  $r > 0$  和  $j = -1, 1$ , 记  $B_{r,j}$  是以  $z_j$  为圆心  $r$  为半径的圆盘,且圆盘的边界  $\partial B_{r,j}$  与裂缝  $\Gamma$  的交点分别记为  $z_{r,j}$ . 再记  $\partial B_R, \partial B_{r,j}$  ( $j = -1, 1$ ) 与  $\Gamma$  所围成的开区域为  $B_r$ .  $\nu$  始终表示  $B_R, B_{r,j}$  的边界上的单位外法向量和  $\Gamma$  的单位法向量. 选取函数  $v \in C^2(\mathbf{R}^2)$ , 使得  $\forall x \in B_{r_0,j}$  ( $j = -1, 1$ ) 有  $v(x) = u(z_j)$ , 其中  $B_{r_0,j}$  均位于  $B_R$  的内部,且  $r_0$  是满足  $0 < 2r_0 < |z_1 - z_{-1}|$  的常数. 设  $\psi(t) \in C^1(\mathbf{R})$  是一实值奇函数,且  $\psi(t) = 0, \forall t \in [0, 1]; \psi(t) = t, \forall t \geq 2$  和  $\psi'(t) \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}$ .

首先,证明当  $u$  和  $v$  为实值函数时,有  $\text{grad} u \in L^2(B_R)$ . 令  $w = u - v$  与  $w_n = \psi(nw) / n$ . 显然,由函数  $\psi$  的定义可知  $w_n$  一致收敛于  $w$ . 对  $w_n$  和  $w$  关于  $\partial B_r$  应用 Green 定理<sup>[4]</sup>,即

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \{ w_n \Delta w + \text{grad} w_n \cdot \text{grad} w \} dx &= \int_{\partial B_R} w_n \frac{\partial w}{\partial \nu} ds - \\ \int_{\partial B_{r,-1}} w_n \frac{\partial w}{\partial \nu} ds &- \int_{\partial B_{r,1}} w_n \frac{\partial w}{\partial \nu} ds - \int_{\Gamma^+ \setminus (B_{r,-1} \cup B_{r,1})} w_n^+ \frac{\partial w^+}{\partial \nu} ds + \\ \int_{\Gamma^- \setminus (B_{r,-1} \cup B_{r,1})} w_n^- \frac{\partial w^-}{\partial \nu} ds. \end{aligned} \quad (10)$$

又由  $w$  的连续性可知,对于给定的  $n$ ,  $w_n$  分别在裂缝端点  $z_{-1}$  和  $z_1$  的某个邻域内几乎处处为零. 于是,对(10)式关于  $r \rightarrow 0$  取极限,得

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \{ w_n \Delta w + \text{grad} w_n \cdot \text{grad} w \} dx &= \\ \int_{\partial B_R} w_n \frac{\partial w}{\partial \nu} ds &- \int_{\Gamma_0^+} w_n^+ \frac{\partial w^+}{\partial \nu} ds + \int_{\Gamma_0^-} w_n^- \frac{\partial w^-}{\partial \nu} ds. \end{aligned} \quad (11)$$

根据条件  $\partial u^\pm / \partial \nu$  在  $\Gamma_0$  上存在和  $w_n$  的定义可知 (11) 式左端第 1 项与右端对所有  $n \in \mathbf{N}$  是有界的, 故有

$$\int_{B_R} \text{grad} w_n \cdot \text{grad} w \, dx < +\infty, \forall n \in \mathbf{N}.$$

又因为

$$\text{grad} w_n \cdot \text{grad} w = \psi'(nw) |\text{grad} w|^2 \geq 0,$$

且根据函数  $\psi$  的定义, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{grad} w_n \cdot \text{grad} w = |\text{grad} w|^2, \forall x \notin \{x \in B_R | w(x) = 0, \text{grad} w(x) \neq 0\},$$

由隐函数定理可知集合  $\{x \in B_R | w(x) = 0, \text{grad} w(x) \neq 0\}$  是零测度集<sup>[11]</sup>, 于是由 Fatou 引理知  $\text{grad} w(x) \in L^2(B_R)$ , 从而

$$\text{grad} u(x) = \text{grad} w(x) + \text{grad} v(x) \in L^2(B_R).$$

现在, 考虑  $u$  为复值函数, 即  $u = \text{Re}u + i\text{Im}u$ . 显然  $\text{Re}u$  和  $\text{Im}u$  是实值函数且符合上述证明要求. 于是有  $\text{grad}(\text{Re}u) \in L^2(B_R)$ ,  $\text{grad}(\text{Im}u) \in L^2(B_R)$ , 从而

$$\text{grad} u = \text{grad}(\text{Re}u) + i\text{grad}(\text{Im}u) \in L^2(B_R).$$

最后, 证明 (9) 式成立. 注意到  $0 < r < r_0$ , 对  $u$  和  $\bar{u}$  在区域  $B_r$  内应用 Green 定理, 得

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \{u \Delta \bar{u} + \text{grad} u \cdot \text{grad} \bar{u}\} \, dx &= \int_{\partial B_R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \, ds - \\ &\int_{\partial B_{r-1}} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \, ds - \int_{\partial B_{r-1}} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \, ds - \int_{\Gamma^+ \setminus (B_{r-1} \cup B_r)} u^+ \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial \nu} \, ds + \\ &\int_{\Gamma^- \setminus (B_{r-1} \cup B_r)} u^- \frac{\partial \bar{u}^-}{\partial \nu} \, ds. \end{aligned} \quad (12)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_{r,j}} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \, ds \right|^2 &\leq 2\pi \|u\|_\infty^2 r \int_{\partial B_{r,j}} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right|^2 \, ds, \quad j = -1, 1, \\ \text{其中 } \|u\|_\infty^2 &= \sup\{u(x) | x \in (B_R \setminus \Gamma_0)\}. \text{ 于是,} \\ \int_0^{r_0} \frac{1}{r} \left| \int_{\partial B_{r,j}} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \, ds \right|^2 \, dr &\leq 2\pi \|u\|_\infty^2 \cdot \\ \int_0^{r_0} \int_{\partial B_{r,j}} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right|^2 \, ds \, dr &\leq 2\pi \|u\|_\infty^2 \|\text{grad} u\|_{L^2(B_R)}^2. \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \liminf_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B_{r,j}} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \, ds = 0, \quad j = -1, 1.$$

注意到方程 (5) 和边界条件  $h = 0$ , 有

$$\begin{aligned} \liminf_{r \rightarrow 0} \int_{B_r} |\text{grad} u|^2 \, dx &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r} |\text{grad} u|^2 \, dx, \\ \liminf_{r \rightarrow 0} \int_{B_r} u \Delta \bar{u} \, dx &= - \liminf_{r \rightarrow 0} \int_{B_r} k^2 |u|^2 \, dx = - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r} k^2 |u|^2 \, dx, \\ \liminf_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma^+ \setminus (B_{r-1} \cup B_r)} u^+ \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial \nu} \, ds &= \end{aligned}$$

$$ik \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma^+ \setminus (B_{r-1} \cup B_r)} \bar{\lambda} |u^+|^2 \, ds.$$

于是, 注意到  $\partial u^- / \partial \nu = f = 0$ , 在 (12) 式中令  $r \rightarrow 0$  即可得 (9) 式成立. 引理 1 得证.

**定理 1** 设  $\partial u^\pm / \partial \nu$  在  $\Gamma_0$  上存在, 则裂缝散射问题 (5) ~ (8) 至多有 1 个解.

**证** 只需证明: 当  $f = h = 0$  时, 定解问题 (5) ~ (8) 只有零解. 注意到  $\text{Re}(\lambda) > 0$ , 直接对 (9) 式两边取虚部, 即得

$$\text{Im} \int_{\partial B_R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \, ds = k \int_{\Gamma} \text{Re}(\lambda) |u^+|^2 \, ds \geq 0.$$

由文献 [11] 可知定理 1 的结论成立.

## 2 裂缝散射问题解的存在性

通过积分方程法证明裂缝散射问题 (5) ~ (8) 解的存在性. 即将解表示成单层位势与双层位势的组合形式来证明解的存在性. 设  $\partial D$  为  $\Gamma$  延拓后的单连通光滑闭曲线  $\partial D$  所围成的 1 个有界闭区域  $D$ , 且  $\partial D$  的单位外法向量与  $\Gamma$  的单位法向量一致, 即  $\Gamma^+$  为光滑闭曲线  $\partial D$  的外侧. 设  $u \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma) \cap C(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma_0)$  是混合边界条件裂缝问题 (5) ~ (8) 的解, 则  $u \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \bar{D})$  和  $u \in C^2(D)$  且分别在  $\mathbf{R}^2 \setminus \bar{D}$  和  $D$  内满足 Helmholtz 方程, 且在  $\partial D \setminus \Gamma_0$  上满足下述过渡条件:

$$\begin{cases} u^+(x) = u^-(x), & x \in \partial D \setminus \Gamma_0, \\ \partial u^+(x) / \partial \nu = \partial u^-(x) / \partial \nu, & x \in \partial D \setminus \Gamma, \end{cases} \quad (13)$$

其中“+”表示从  $D$  的外部逼近  $\partial D$ , “-”表示从  $D$  的内部逼近  $\partial D$ .

根据 Helmholtz 方程的 Green 表示公式<sup>[11]</sup>, 有

$$u(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \Phi(x, y) \, ds_y - \int_{\partial D} u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_y} \, ds_y, \quad x \in D,$$

$$u(x) = - \int_{\partial D} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \Phi(x, y) \, ds_y +$$

$$\int_{\partial D} u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_y} \, ds_y, \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{D},$$

其中  $\Phi(x, y) = iH_0^{(1)}(k|x-y|)/4$  是 Helmholtz 方程的基本解,  $H_0^{(1)}(\cdot)$  为第 1 类零阶 Hankel 函数. 由单层位势和双层位势的跳跃关系, 有

$$u^-(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu_y} \Phi(x, y) \, ds_y -$$

$$\int_{\partial D} u^-(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_y} \, ds_y + \frac{1}{2} u^-(x), \quad x \in \Gamma_0, \quad (14)$$

$$u^+(x) = - \int_{\partial D} \frac{\partial u^+(y)}{\partial \nu_y} \Phi(x, y) ds_y + \int_{\partial D} u^+(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_y} ds_y + \frac{1}{2} u^+(x) \quad x \in \Gamma_0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial u^-(x)}{\partial \nu_x} = \int_{\partial D} \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu_y} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_x} ds_y + \frac{1}{2} \frac{\partial u^-(x)}{\partial \nu_x} - \frac{\partial}{\partial \nu_x} \int_{\partial D} u^-(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_y} ds_y \quad x \in \Gamma_0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial u^+(x)}{\partial \nu_x} = - \int_{\partial D} \frac{\partial u^+(y)}{\partial \nu_y} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_x} ds_y + \frac{1}{2} \frac{\partial u^+(x)}{\partial \nu_x} + \frac{\partial}{\partial \nu_x} \int_{\partial D} u^+(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_y} ds_y \quad x \in \Gamma_0, \quad (17)$$

将(14)式和(15)式相加,并注意过渡条件(13)得

$$u^- + u^+ = -2 \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] \Phi(x, y) ds_y + 2 \int_{\Gamma} [u] \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_y} ds_y \quad x \in \Gamma_0, \quad (18)$$

其中  $[u] = u^+ - u^-$ ,  $[\partial u / \partial \nu] = \partial u^+ / \partial \nu - \partial u^- / \partial \nu$ .

同理, (16) 式和(17) 式相加得

$$\frac{\partial u^-}{\partial \nu} + \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = -2 \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_x} ds_y + 2 \frac{\partial}{\partial \nu_x} \int_{\Gamma} [u] \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_y} ds_y \quad x \in \Gamma_0. \quad (19)$$

因此,对于裂缝散射问题(5)~(8),寻求如下形式的解,即

$$u(x) = \int_{\Gamma} \varphi_1(y) \Phi(x, y) ds_y + \int_{\Gamma} \varphi_2(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_y} ds_y \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma. \quad (20)$$

实际上,对(20)式利用单双层位势在  $\Gamma$  上的跳跃关系<sup>[13]</sup>可推得

$$\varphi_1(x) = -[\partial u / \partial \nu] \quad \varphi_2(x) = [u] \quad x \in \Gamma_0.$$

又从过渡条件(13)可知,  $[u]$  在  $z_{-1}, z_1$  处为0,故可假设密度函数  $\varphi_1 \in C(\Gamma)$  和  $\varphi_2 \in C_0^{\alpha, \text{loc}}(\Gamma)$ . 结合  $\Phi(x, y)$  的辐射性质可知,由(20)式定义的  $u(x)$  满足 Helmholtz 方程(5)与辐射条件(8),且  $u \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma) \cap C(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma_0)$ .

定义算子

$$\begin{aligned} (S\varphi)(x) &:= 2 \int_{\Gamma} \varphi(y) \Phi(x, y) ds_y \quad x \in \Gamma_0, \\ (K\varphi)(x) &:= 2 \int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_y} ds_y \quad x \in \Gamma_0, \\ (K'\varphi)(x) &:= 2 \int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_x} ds_y \quad x \in \Gamma_0, \\ (T\varphi)(x) &:= 2 \frac{\partial}{\partial \nu_x} \int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_y} ds_y \quad x \in \Gamma_0. \end{aligned}$$

由边界条件(6)~(7), (18) 式和(19) 式,则

密度函数  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  满足边界积分方程

$$\begin{pmatrix} ik\lambda S - 2I & ik\lambda K + ik\lambda I \\ K' + I & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

其中  $g_1 = 2h - 2f$ ,  $g_2 = 2f$ . 反之,若  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  是边界积分方程(21)的解,则(20)式满足定解问题(5)~(8),即边界积分方程(21)与原问题等价<sup>[4,9]</sup>. 因此,由定理1可知,方程组(21)至多存在1个解.

为了获得解的存在性,以及对积分方程组(21)进行数值求解,将(21)式表示成裂缝  $\Gamma$  的参数化形式.为此,对  $-1 < t < 1$ ,记

$$\begin{aligned} (S\varphi)(z(t)) &= \int_{-1}^1 \varphi(z(\tau)) L_1(t, \tau) d\tau, \\ (K\varphi)(z(t)) &= \int_{-1}^1 \varphi(z(\tau)) L_2(t, \tau) d\tau, \\ (K'\varphi)(z(t)) &= \frac{1}{|z'(t)|} \int_{-1}^1 \varphi(z(\tau)) L_3(t, \tau) d\tau, \\ (T\varphi)(z(t)) &= \frac{1}{|z'(t)|} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\tau - t} \frac{d\varphi(z(\tau))}{d\tau} + \varphi(z(\tau)) L_4(t, \tau) \right\} d\tau, \end{aligned}$$

其中  $L_j(t, \tau)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) 为积分核函数,分别为

$$\begin{aligned} L_1(t, \tau) &= \frac{i}{2} H_0^{(1)}(k|z(t) - z(\tau)|) |z'(\tau)|, \\ L_2(t, \tau) &= \frac{ik}{2} H_1^{(1)}(k|z(t) - z(\tau)|) \{z(t) - z(\tau)\} z'^{\perp}(\tau) / |z(t) - z(\tau)|, \\ L_3(t, \tau) &= |z'(\tau)| L_2(\tau, t), \\ L_4(t, \tau) &= -\frac{i}{2} z'(\tau) \{z(t) - z(\tau)\} z'(\tau) \{z(t) - z(\tau)\} / |z(t) - z(\tau)|^2 \cdot \left\{ k^2 H_0^{(1)}(k|z(t) - z(\tau)|) - 2k H_1^{(1)}(k|z(t) - z(\tau)|) / |z(t) - z(\tau)| \right\} - \frac{ik}{2} \frac{z'(t) z'(\tau)}{|z(t) - z(\tau)|} H_1^{(1)}(k|z(t) - z(\tau)|) - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(\tau - t)^2} + \frac{ik^2}{2} H_0^{(1)}(k|z(t) - z(\tau)|) z'(t) z'(\tau). \end{aligned}$$

显然,积分核  $L_j(t, \tau)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) 在  $t = \tau$  处具有对数奇异性.为此,将其分解为

$$L_j(t, \tau) = M_j(t, \tau) \ln(2|t - \tau|) + N_j(t, \tau),$$

其中积分  $M_j(t, \tau)$  和  $N_j(t, \tau)$  为

$$\begin{aligned} M_1(t, \tau) &= -\frac{1}{\pi} J_0(k|z(t) - z(\tau)|) |z'(\tau)|, \\ M_2(t, \tau) &= -\frac{k}{\pi} J_1(k|z(t) - z(\tau)|) \{z(t) - z(\tau)\} z'^{\perp}(\tau) / |z(t) - z(\tau)|, \end{aligned}$$

$$M_4(t, \pi) = \frac{1}{\pi} z'(t) \{z(t) - z(\tau)\} z'(\tau) \{z(t) - z(\tau)\} / |z(t) - z(\tau)|^2 \{k^2 J_0(k|z(t) - z(\tau)|) - 2kJ_1(k|z(t) - z(\tau)|) / |z(t) - z(\tau)|\} + \frac{k}{\pi} \frac{z'(t) z'(\tau)}{|z(t) - z(\tau)|} J_1(k|z(t) - z(\tau)|) - \frac{k^2}{\pi} J_0(k|z(t) - z(\tau)|) z'(t) z'(\tau),$$

$$N_j(t, \pi) = L_j(t, \pi) - M_j(t, \pi) \ln(2|t - \tau|),$$

$$j = 1, 2, 4,$$

且对角元为

$$N_1(t, t) = \left( \frac{i}{2} - \frac{C}{\pi} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{k|z'(t)|}{4} \right) |z'(t)|,$$

$$N_2(t, t) = \frac{z'_2(t) z''_1(t) - z'_1(t) z''_2(t)}{2\pi |z'(t)|^2},$$

$$N_4(t, t) = \left( 1 + \pi i - 2C - 2 \ln \frac{k|z'(t)|}{4} \right) \frac{k|z'(t)|^2}{4\pi} - [z'(t) \cdot z''(t)]^2 / (2\pi |z'(t)|^4) + |z''(t)|^2 / (4\pi |z'(t)|^2) + z'(t) \cdot z'''(t) / (6\pi |z'(t)|^2),$$

$$M_4(t, t) = -k^2 |z'(t)|^2 / 2\pi,$$

这里  $C = 0.57721 \cdots$  为 Euler 常数.

令  $t = \cos s, \pi = \cos \sigma$ , 且在 (21) 式的第 2 个方程两边乘以  $\sin(s) |z'(\cos s)|$ , 则方程组 (21) 改写为

$$\begin{pmatrix} -2I & 0 \\ B & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} + C \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

其中

$$\psi_1(s) = \varphi_1(z(\cos s)), \quad \psi_2(s) = \varphi_2(z(\cos s)),$$

$$g_1(s) = \sin(s) |z'(\cos s)| (2h(z(\cos s)) - 2f(z(\cos s))), \quad g_2(s) = 2f(z(\cos s)),$$

而方程组 (22) 中的算子分别为

$$(U\psi)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin s}{\cos s - \cos \sigma} \psi'(\sigma) d\sigma,$$

$$(A_{11}\psi)(s) := ik\lambda(z(\cos s)) \int_0^\pi L_1(\cos s, \cos \sigma) \sin \sigma \psi(\sigma) d\sigma,$$

$$(A_{12}\psi)(s) := ik\lambda(z(\cos s)) \int_0^\pi L_2(\cos s, \cos \sigma) \sin \sigma \psi(\sigma) d\sigma,$$

$$(A_{21}\psi)(s) := \sin s \int_0^\pi L_3(\cos s, \cos \sigma) \sin \sigma \psi(\sigma) d\sigma,$$

$$(A_{22}\psi)(s) := \sin s \int_0^\pi L_4(\cos s, \cos \sigma) \sin \sigma \psi(\sigma) d\sigma,$$

$$(B\psi)(s) := \sin s |z'(\cos s)| \psi(s),$$

$$(C\psi)(s) := ik\lambda(z(\cos s)) \psi(s).$$

在接下来的分析中, 记

$$C_0^{1,\alpha}[0, \pi] = \{\psi \in C^{1,\alpha}[0, \pi] \mid \psi(0) = \psi(\pi) = 0\}, \quad n = 0, 1.$$

注意到当  $\psi_1 \in C^{0,\alpha}[0, \pi]$  和  $\psi_2 \in C_0^{1,\alpha}[0, \pi]$  有密度函数  $\varphi_1 \in C(\Gamma)$  和  $\varphi_2 \in C_{0,loc}^{1,\alpha}(\Gamma)$ . 因此, 方程组 (21) 解的唯一性意味着参数方程组 (22) 存在唯一解. 至此, 所考虑的裂缝散射问题解的存在性则归结为参数方程组 (22) 解的存在性. 下面将在空间  $C^{0,\alpha}[0, \pi] \times C_0^{1,\alpha}[0, \pi]$  中说明方程组 (22) 的解的存在性.

首先, 将函数  $\psi_2(s)$  作奇延拓至区间  $[0, 2\pi]$  上, 且满足  $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$ , 仍然记为  $\psi(s)$ . 因为

$$\frac{\sin s}{\cos s - \cos \sigma} = \frac{1}{2} \cot \frac{\sigma - s}{2} - \frac{1}{2} \cot \frac{\sigma + s}{2},$$

所以有

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin s}{\cos s - \cos \sigma} \psi_2'(\sigma) d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \psi_2'(\sigma) d\sigma.$$

显然, 空间  $C_0^{1,\alpha}[0, \pi]$  上的函数可作周期为  $2\pi$  的连续奇延拓至  $[0, 2\pi]$ , 故  $C_0^{1,\alpha}[0, \pi]$  上的函数可以展开为正弦级数. 又因为

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \cos(m\sigma) d\sigma = -\sin(ms),$$

所以算子  $U: C_0^{1,\alpha}[0, \pi] \mapsto C_0^{0,\alpha}[0, \pi]$  是个双射, 且逆算子有界. 因此, 算子

$$\begin{pmatrix} -2I & 0 \\ B & U \end{pmatrix}: C^{0,\alpha}[0, \pi] \times C_0^{1,\alpha}[0, \pi] \mapsto C^{0,\alpha}[0, \pi] \times C_0^{0,\alpha}[0, \pi]$$

是有界的, 且逆算子存在. 再根据  $C_0^{1,\alpha}[0, \pi]$  到  $C_0^{0,\alpha}[0, \pi]$  的紧嵌入性质, 以及积分核的光滑性知, 算子  $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} + C \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$  为  $C^{0,\alpha}[0, \pi] \times C_0^{1,\alpha}[0, \pi] \mapsto C^{0,\alpha}[0, \pi] \times C_0^{0,\alpha}[0, \pi]$  上的紧算子.

**定理 2** 积分方程组 (22) 在空间  $C^{0,\alpha}[0, \pi] \times C_0^{1,\alpha}[0, \pi]$  中存在唯一解.

**证** 解的唯一性直接由积分方程组 (21) 的解的唯一性得到. 或者说直接有裂缝散射问题的解的唯一性得到. 对第 2 类积分方程组

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2I & 0 \\ B & U \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} + C \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2I & 0 \\ B & U \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

应用 Riesz-Fredholm 定理, 即可知积分方程组 (22) (20) 的远场模式为  
在空间  $C^{0,\alpha}[0,\pi] \times C^{1,\alpha}_0[0,\pi]$  中的解存在.

3 数值算例

下面针对 2 个不同裂缝散射体分别给出数值模拟结果, 实际上给出的是散射波的远场模式  $u^\infty$  的计算结果, 这是因为散射波场与其远场模式之间是相互唯一决定的. 远场模式刻画了散射波场在无穷远处的性态, 即对所有方向  $\hat{x} = x/|x|$  一致有

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u^\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, |x| \rightarrow \infty.$$

由 Hankel 函数的渐近性可知, 对应于散射波场

$$u^\infty(\hat{x}) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_\Gamma (\varphi_1(y) - ik\hat{x} \cdot v(y)\varphi_2(y)) e^{-ik\hat{x} \cdot y} ds(y). \tag{23}$$

从方程组 (22) 中解出密度函数  $\psi_1$  和  $\psi_2$ , 即密度函数  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ , 然后代入 (23) 式计算出远场模式, 其中方程组 (22) 的具体离散化方法参见文献 [24]. 在数值算例中, 始终取入射波方向为  $d = (0, 1)$ , 分别取波数  $k = 1.0$  和  $k = 5.0$ , 以及分别取阻尼系数为  $\lambda = 0.3$  和  $\lambda = (1 - t^2)^2$  进行数值模拟.

例 1 考虑简单的直线形裂缝散射体, 其参数方程为  $z(t) = (t, 0)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ .

数值计算结果如表 1 和表 2 所示.

表 1 当阻尼系数  $\lambda = 0.3$  时的计算结果

$k$	$n$	$\text{Re}(u^\infty(d))$	$\text{Im}(u^\infty(d))$	$\text{Re}(u^\infty(-d))$	$\text{Im}(u^\infty(-d))$
$k = 1.0$	16	0.352 133 91	-0.761 807 78	-0.668 818 29	1.137 676 05
	32	0.352 129 21	-0.761 849 15	-0.668 786 83	1.137 639 58
	64	0.352 126 33	-0.761 855 03	-0.668 780 64	1.137 635 37
	128	0.352 125 38	-0.761 855 99	-0.668 779 32	1.137 634 97
	256	0.352 125 12	-0.761 856 17	-0.668 779 01	1.137 634 96
$k = 5.0$	16	0.797 470 16	-0.600 276 86	-1.359 193 84	1.201 590 82
	32	0.797 451 57	-0.600 376 95	-1.359 195 29	1.201 504 80
	64	0.797 454 07	-0.600 391 84	-1.359 193 52	1.201 495 65
	128	0.797 455 39	-0.600 394 18	-1.359 192 90	1.201 494 85
	256	0.797 455 79	-0.600 394 59	-1.359 192 72	1.201 494 84

表 2 当阻尼系数  $\lambda = (1 - t^2)^2$  时的计算结果

$k$	$n$	$\text{Re}(u^\infty(d))$	$\text{Im}(u^\infty(d))$	$\text{Re}(u^\infty(-d))$	$\text{Im}(u^\infty(-d))$
$k = 1.0$	16	0.030 679 214 9	-0.502 157 494 4	-0.537 409 824 1	0.956 757 832 9
	32	0.030 678 538 6	-0.502 150 108 3	-0.537 415 055 9	0.956 754 659 6
	64	0.030 678 530 7	-0.502 150 111 6	-0.537 415 051 9	0.956 754 656 1
	128	0.030 678 530 6	-0.502 150 111 6	-0.537 415 051 9	0.956 754 656 1
	256	0.030 678 530 6	-0.502 150 111 6	-0.537 415 051 9	0.956 754 656 1
$k = 5.0$	16	0.621 798 905 1	-0.420 442 863 8	-1.335 465 819 3	1.240 118 749 8
	32	0.621 896 526 1	-0.420 304 115 7	-1.335 370 932 1	1.240 073 090 2
	64	0.621 896 502 0	-0.420 304 130 3	-1.335 370 933 9	1.240 073 084 8
	128	0.621 896 502 0	-0.420 304 130 4	-1.335 370 933 9	1.240 073 084 8
	256	0.621 896 502 0	-0.420 304 130 4	-1.335 370 933 9	1.240 073 084 8

例 2 考虑裂缝散射体, 其参数方程为

$$z(t) = \left( t, 0.5 \cos \frac{\pi t}{2} + 0.2 \sin \frac{\pi t}{2} - 0.1 \cos \frac{3\pi t}{2} \right),$$
  
 $-1 \leq t \leq 1.$

数值计算结果如表 3 和表 4 所示.

由以上 2 个算例的数值结果(见表 1 ~ 表 4) 可以看出, 本文给出边界积分方程组的数值离散求解方法是非常有效的. 特别是对于第 2 种非常数阻尼系数, 算法表现出非常好收敛速度.

表 3 当阻尼系数  $\lambda = 0.3$  时的计算结果

$k$	$n$	$\operatorname{Re}(u^\infty(d))$	$\operatorname{Im}(u^\infty(d))$	$\operatorname{Re}(u^\infty(-d))$	$\operatorname{Im}(u^\infty(-d))$
$k = 1.0$	16	0.348 824 852 6	-0.460 213 476 1	-1.136 138 727 7	0.040 732 900 4
	32	0.348 811 348 0	-0.460 175 174 0	-1.136 008 107 8	0.040 710 602 1
	64	0.348 801 525 6	-0.460 165 403 3	-1.135 977 731 4	0.040 711 063 7
	128	0.348 798 147 7	-0.460 162 637 1	-1.135 970 378 7	0.040 711 773 4
	256	0.348 797 186 9	-0.460 161 909 1	-1.135 968 573 3	0.040 712 027 5
$k = 5.0$	16	0.710 118 207 6	-0.524 661 784 2	0.653 982 887 2	0.407 375 998 6
	32	0.710 214 195 4	-0.524 817 094 6	0.653 561 231 3	0.406 948 410 8
	64	0.710 232 824 6	-0.524 842 463 6	0.653 571 053 7	0.406 946 282 3
	128	0.710 237 000 1	-0.524 846 645 8	0.653 573 043 2	0.406 945 652 3
	256	0.710 237 976 3	-0.524 847 431 5	0.653 573 486 4	0.406 945 493 3

表 4 当阻尼系数  $\lambda = (1 - t^2)^2$  时的计算结果

$k$	$n$	$\operatorname{Re}(u^\infty(d))$	$\operatorname{Im}(u^\infty(d))$	$\operatorname{Re}(u^\infty(-d))$	$\operatorname{Im}(u^\infty(-d))$
$k = 1.0$	16	0.022 345 409 6	-0.314 083 348 1	-0.934 215 625 7	0.107 055 902 3
	32	0.022 456 442 3	-0.314 092 745 7	-0.934 289 049 7	0.107 060 871 9
	64	0.022 456 520 3	-0.314 092 646 0	-0.934 289 017 3	0.107 060 799 0
	128	0.022 456 520 1	-0.314 092 645 9	-0.934 289 017 1	0.107 060 798 9
	256	0.022 456 520 1	-0.314 092 645 9	-0.934 289 017 1	0.107 060 798 9
$k = 5.0$	16	0.538 646 769 9	-0.446 708 862 1	0.648 532 280 7	0.289 023 280 2
	32	0.538 510 552 6	-0.447 605 144 7	0.647 077 673 6	0.288 547 696 0
	64	0.538 510 442 9	-0.447 605 392 0	0.647 077 084 4	0.288 547 896 3
	128	0.538 510 442 8	-0.447 605 392 3	0.647 077 084 4	0.288 547 896 3
	256	0.538 510 442 7	-0.447 605 392 3	0.647 077 084 4	0.288 547 896 3

## 5 参考文献

- [1] Kress R. Inverse scattering from an open arc [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1995, 18(4): 267-293.
- [2] Monch L. On the numerical solution of the direct scattering problem for an open sound-hard arc [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1996, 71(2): 343-356.
- [3] Wendland W L, Stephan E P. A hypersingular boundary integral method for two-dimensional screen and crack problems [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1990, 112(4): 363-390.
- [4] Kress R, Lee K M. Integral equation methods for scattering from an impedance crack [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 161(1): 161-177.
- [5] Liu Jijun, Krutitskii P A, Sini M. Numerical solution of the scattering problem for acoustic waves by a two-sided crack in 2-dimensional space [J]. Journal of Computational Mathematics, 2011, 29(2): 141-166.
- [6] 严国政. 具有混合裂缝散射问题的边界积分方程方法 [J]. 数学物理学报, 2011, 31A(5): 1167-1175.
- [7] Wang H, Liu J. Numerical solution for the Helmholtz equation with mixed boundary condition [J]. Numerical Mathematics (English Seriers), 2007, 16(3): 203.
- [8] Monch L. On the inverse acoustic scattering problem by an open arc: the sound-hard case [J]. Inverse Problems, 1997, 13(5): 1379.
- [9] Cakoni F, Colton D. The linear sampling method for cracks [J]. Inverse Problems, 2003, 19(2): 279.
- [10] Liu Jijun, Sini M. Reconstruction of cracks of different types from far-field measurements [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2010, 33(8): 950-973.
- [11] Colton D, Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory [M]. New York: Springer, 2013.
- [12] Colton D, Kress R. Integral equation methods in scattering theory [M]. New York: Springer-Verlag, Wiley, 1983.
- [13] McLean W. Strongly elliptic systems and boundary integral equations [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

(下转第 618 页)

development of technological innovation and high environmental regulation promotes the development of technological innovation. Especially in the central area of china where environmental pollution is serious the effect is particularly evident. For most areas like Fujian and Guangdong where environmental regulation is moderate ,environmental regulation has less impact on technological innovation. These areas need to further enhance the intensity environmental regulation.

**Key words:** semi-parametric; spatial lag econometric model with cross section data; instrumental variable estimation; asymptotic normality; the rate of convergence

(责任编辑:王金莲)

---

(上接第 598 页)

## A Scattering Problem of a Crack with Mixed Boundary Conditions and Its Numerical Simulations

WANG Zewen ,WU Hongli ,HU Bin

( School of Science ,East China University of Technology ,Nanchang Jiangxi 330013 ,China)

**Abstract:** Consider a scattering problem of time-harmonic electromagnetic plane waves from a thin infinitely long cylindrical obstacle. The thin obstacle is a curve segment referred to as crack. Assuming that the crack is smooth and both sides of the crack have different boundary conditions ( mixed boundary conditions) ,the uniqueness of the solution is firstly given for the scattering problem. Then the scattering problem is transformed into an equivalent system of hypersingular integral equations by the potential theory and the integral equation method ,and the existence of the solution is also proved. Finally ,numerical simulations of the scattering problem for the mixed boundary crack are presented by solving the system of hypersingular integral equations.

**Key words:** Helmholtz equation; scattering problem; crack; mixed boundary conditions; integral equation

(责任编辑:曾剑锋)