

文章编号: 1000-5862(2015)06-0619-04

# 基于属性蕴含的 $Q$ 矩阵理论

杨淑群

(福建师范大学软件学院 福建 福州 350007)

**摘要:** 认知诊断(CD)是认知心理学与心理和教育测量学相结合的前沿研究领域.在属性间约束关系的 $Q$ 矩阵理论中,其认知模型仅考虑了属性集与属性间的层级关系,忽略了属性间可能存在非层级关系的蕴含关系.该文探讨基于属性蕴含的 $Q$ 矩阵生成,以及属性蕴含关系的挖掘.研究成果扩充了现有 $Q$ 矩阵理论,完善认知诊断的理论、方法和应用.

**关键词:** 属性蕴含;  $Q$ 矩阵理论;  $Q$ 矩阵生成

**中图分类号:** B 842.1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2015.06.14

## 0 研究背景

认知诊断(cognitive diagnosis, CD)是心理学、现代数学和计算机科学相结合的产物,用于测量个体特定的知识结构(knowledge structure)和加工技能(processing skills)<sup>[1]</sup>. 认知诊断对促进教育发展有举足轻重的作用,特别是2001年,美国NCLB法案规定美国政府的学术评估系统应该向每个学生提供解释性、描述性和诊断性的报告,2002年美国教育部随后的草案则详细规定了学生评估报告的要求.2009年,奥巴马行政当局提出斥资43.5亿美元启动《力争上游计划(race to the top)》,以鼓励各州展开卓有成效的教育改革,现已正式启动.教育改革需要教育评估,2009年《Science》中“Perspective Technology and Testing”指出必须平衡各州的评估系统.2010年7月,我国颁布了《2010—2020年国家中长期教育改革和发展规划纲要》,随着我国教育改革的深入发展,认知诊断正成为日益重要的研究课题,戴海琦<sup>[1]</sup>、丁树良等<sup>[2-40]</sup>对认知诊断进行了相关的研究.

认知诊断模型中,K. K. Tatsuoka提出的规则空间模型(rule space model, RSM)是较有影响力的模型之一<sup>[11-42]</sup>,是GRE、SAT及PSAT等考试报告与分析的参考模型. RSM分为两大部分: $Q$ 矩阵理论和判别分类. $Q$ 矩阵理论将被试属性掌握模式转化为被试在既不猜测也不失误的情况下的理想项目反应

模式,建立不可观察的属性掌握模式(知识状态)与可观察的项目反应模式的对应关系,从而对观察反应模式进行判别,以达到认知诊断的目的. 认知诊断模型在认知诊断中的重要性是不言而喻的, $Q$ 矩阵对于大多数认知诊断模型也是不可缺少的,如何评论 $Q$ 矩阵以及 $Q$ 矩阵理论在认知诊断中作用都不为过<sup>[13]</sup>.

研究表明,K. K. Tatsuoka的 $Q$ 矩阵理论至少存在两个方面的问题或不足:(i) K. K. Tatsuoka认为布尔代数是 $Q$ 矩阵理论的基础,而此观点是错误的<sup>[2]</sup>;(ii) K. K. Tatsuoka只考虑属性之间的约束关系. K. K. Tatsuoka用 $Q$ 阵中行的包含关系给出表征属性之间关系的邻接矩阵(adjacency matrix),然后构造可达阵、简化 $Q$ 阵( $Q_r$ )阵,最后确定属性层级关系<sup>[12]</sup>. J. P. Leighton等<sup>[14]</sup>提出先确定属性层级关系,再对被试进行分类诊断的属性层级方法(AHM). 由于 $Q$ 矩阵存在错误,在AHM的基础上,丁树良等<sup>[2]</sup>对 $Q$ 矩阵理论作了进一步补充和修正,修正后的 $Q$ 矩阵理论更合理、科学,至此,在属性层级关系明确的基础上发展起来的 $Q$ 矩阵理论问题得到比较妥善的解决.

然而,属性之间不仅存在先决关系,还有蕴含关系,并且先决关系为蕴含关系的特殊形式<sup>[13]</sup>. 考虑属性的蕴含关系后,传统的 $Q$ 矩阵理论难以表达属性的蕴含关系,显示了其局限性. 若考虑属性间蕴含关系,怎样确定被试的知识状态的集合和理想反应模式将成为更具挑战性的问题.

收稿日期: 2015-07-16

基金项目: 教育部人文社会科学研究一般项目青年基金(10YJCXLX049)和福建省自然科学基金(2013J01119)资助项目.

作者简介: 杨淑群(1970-),女,江西临川人,教授,博士,主要从事人工智能及计算机辅助教学研究.

## 1 国内外研究现状及发展动态分析

截止到 2007 年,心理测量学者们已开发了 60 多种认知诊断模型,其中规则空间方法(RSM)、属性层级方法(AHM)与 DINA 模型近年来受到了广泛关注. M. Gierl 等<sup>[15]</sup>从逻辑上修正了规则空间模型, J. P. Leighton 等<sup>[14]</sup>对此工作进行了深化并提出 AHM. AHM 与 RSM 不同的是采取事前分析,即强调施测前属性层级关系的确定. 丁树良等<sup>[2]</sup>认同事前分析,对  $Q$  矩阵理论的错误进行了修正,并且对  $Q$  矩阵理论进行扩展,给出充分必要  $Q$  矩阵的定义,讨论编制高质量的认知诊断测验的原则,以及如何评估试卷质量的方法. 至此  $Q$  矩阵理论在考虑属性约束关系的前提下比较科学与完备.

RSM 是由学科专家从测验中抽取出属性,给出测验关联  $Q$  阵再导出属性之间的层级关系. 因为 RSM 项目属性标注的错误而导致  $Q$  矩阵的错误,所得到的属性之间的层级关系难以保证正确,甚至可能出现层级关系不唯一的矛盾现象<sup>[1]</sup>. 喻晓峰等<sup>[10]</sup>利用贝叶斯网进行结构学习,从被试的属性掌握模式中挖掘出属性之间的层级关系,模拟实验和实证研究表明所得到的属性层级关系是有参考价值的. 然而以上这些内容都是在考虑属性约束关系的属性层级关系的框架下进行讨论的.

文献[11]讨论过属性之间的蕴含关系,指出属性的先决关系式为蕴含关系的特殊情况. 于是,寻求具有坚实的理论基础且有简单易行的分类方法的新模型是认知诊断模型发展趋势.

## 2 属性蕴含的 $Q$ 矩阵理论

### 2.1 基本概念

蕴含关系的定义:  $A, B$  为属性集,  $A$  蕴含  $B$  当且仅当每个具有  $A$  中属性的对象就一定具有  $B$  中的属性. 蕴含的例子非常多,数学中的所有定理都表明了蕴含关系. 如“三角形两边的和大于第三边”,  $A$  为“三角形”,  $B$  为“两边的和大于第三边”,  $A$  蕴含  $B$ . 再如,集合论中的关系,一般从自反、对称、反对称及传递来考察关系的性质. 众所周知,具有对称与反对称的关系一定具有传递性,即对称与反对称蕴含传递. 属性的先决关系为蕴含关系的特殊情况. 再如,属性  $A$  为同分母分数减法( $5/6 - 2/6$ ),属性  $A_1$  为整数减法( $5 - 2$ ),属性  $A_2$  为整数的除法,要掌握属性

$A$ , 首先要掌握属性  $A_1$  与属性  $A_2$ , 而  $A_1$  与  $A_2$  之间没有先决关系, 因此属性集  $\{A_1, A_2\}$  蕴含属性  $A$ .

### 2.2 基于属性蕴含的 $Q$ 矩阵生成

首先给出充分  $Q$  矩阵的定义: 所有满足属性蕴含关系的项目构成充分  $Q$  矩阵. 研究科学编制测验的原则有利于提高认知诊断准确率,命题专家要模拟符合属性蕴含的考题(项目). 因此,充分  $Q$  矩阵的生成的重要性不言而喻. 充分  $Q$  矩阵的子矩阵亦是符合属性蕴含的  $Q$  矩阵. 与 K. K. Tatsuoka 定义的充分  $Q$  矩阵不同的是, K. K. Tatsuoka 称所有满足先决关系的项目构成充分  $Q$  矩阵.

为简单起见,符合属性蕴含的项目称为有效项目,不符合则称无效项目,所有有效项目便构成了充分  $Q$  矩阵. 如何判定有效、无效项目是生成  $Q$  矩阵的关键. 杨淑群等<sup>[16]</sup>曾给出有效、无效对象的判定方法,但该方法是基于属性层级结构(即先决关系为前提)的基础. 文献[13]指出蕴含关系为先决关系的特殊情况,基于文献[16]思想,本文给出基于向后回归思想的缩减法.

首先,基于属性蕴含,什么是有效、无效项目? 本文沿用文献[13]中的记法,  $\{a, b\} \rightarrow c$  表示属性集  $\{a, b\}$  蕴含属性  $c$ ,  $a \rightarrow b$  表示属性  $a$  蕴含属性  $b$ .

若有属性蕴含集  $\{\{a, b\} \rightarrow c, c \rightarrow d\}$ , 若项目中有属性  $a$  与  $b$  则一定有属性  $c$ , 同时还要满足若项目中有属性  $c$  则一定有属性  $d$ , 则该项目为有效项目, 否则为无效项目.

考虑二值属性,若属性个数为  $n$ , 则可能的有效项目有  $2^n - 1$  个, 这  $2^n - 1$  个项目构成初始  $Q$  矩阵, 采用有效、无效项目的判定方法, 从  $2^n - 1$  个可能的项目中删除无效项目, 便得到充分  $Q$  矩阵.

例 1 求满足蕴含集  $\{\{a, b\} \rightarrow c, c \rightarrow d\}$  的充分  $Q$  矩阵.

图 1 为具有属性  $\{a, b, c, d\}$  的所有可能的项目, 因为有 4 个属性, 且皆为二值属性, 因此具有 16 个可能项目. 显然, 项目 1 不是有效项目, 因为不存在没有属性的项目. 项目 14 不是有效项目, 因为具有属性  $a$  与属性  $b$ , 但不具有属性  $c$ , 不满足  $\{a, b\} \rightarrow c$  蕴含关系. 依此可得, 项目 2、4、5、6、8、9、10、12 与 16 为有效项目, 项目 1、3、7、11、13、14、15 不是有效项目. 所有有效项目(项目 2、4、5、6、8、9、10、12) 构成了充分  $Q$  矩阵. 得到的充分  $Q$  矩阵如图 2 所示.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$a$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$b$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$c$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$d$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

图 1  $Q$  矩阵

	2	4	5	6	8	9	10	12
$a$	0	0	0	0	0	1	1	1
$b$	0	0	1	1	1	0	0	0
$c$	0	1	0	0	1	0	0	1
$d$	1	1	0	1	1	0	1	1

图 2 充分  $Q$  矩阵

2.3 属性蕴含的挖掘

如何获取属性蕴含是另一重要的问题. B. Ganter 等<sup>[17]</sup>给出一种生成属性蕴含的方法,下面为文

中的例子.

在集合论中的关系具有一些性质,文中给出常用的 9 个属性,见表 1 说明. $Q$  矩阵见图 3.

表 1 属性说明

属性简称	属性(关系性质)	属性定义
$r$	自反	$xRx$ 对所有 $x \in S$
$i$	反自反	$\neg xRx$ 对所有 $x \in S$
$s$	对称	$xRy \Rightarrow yRx$ 对所有 $x, y \in S$
$as$	不对称	$xRy \Rightarrow \neg yRx$ 对所有 $x, y \in S$
$an$	反对称	$xRy$ 且 $yRx \Rightarrow x = y$ 对所有 $x, y \in S$
$t$	传递	$xRy$ 且 $yRz \Rightarrow xRz$ 对所有 $x, y, z \in S$
$nt$	负传递	$\neg xRy$ 且 $\neg yRz \Rightarrow \neg xRz$ 对所有 $x, y, z \in S$
$c$	连通	$xRy$ 或 $yRx$ 对所有 $x \neq y \in S$
$sc$	严格连通	$xRy$ 或 $yRx$ 对所有 $x, y \in S$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$r$	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
$i$	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
$s$	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
$as$	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
$an$	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
$t$	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
$nt$	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
$c$	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
$sc$	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0

图 3 一个  $Q$  矩阵

根据文献 [17] 的方法,可得到如下蕴含关系集:  $as \rightarrow i, \mu n; \{t, \rho\} \rightarrow nt; \{an, \rho nt\} \rightarrow t; \{s, \rho\} \rightarrow nt; \{s, \mu n\} \rightarrow t; \{i, \rho\} \rightarrow as, \mu n; \{i, \mu n\} \rightarrow as; \{i, s, as, \mu n, \rho\} \rightarrow nt; \{r, \rho\} \rightarrow sc; \{r, \rho nt\} \rightarrow c, sc; \{r, s, \rho nt, \rho, sc\} \rightarrow t; sc \rightarrow r, \rho; \{r, \rho\} \rightarrow all$ .

3 结论

$Q$  矩阵理论对认知诊断不言而喻,基于属性的先决关系的  $Q$  矩阵理论研究很丰富.但属性关系不仅限于先决关系,且先决关系是属性蕴含关系的特殊形式.本文探讨了从属性先决关系推广到蕴含关

系后  $Q$  矩阵理论的延伸,主要研究了  $Q$  矩阵与属性蕴含之间的关系.就二值属性,采用向前回归思想,从所有可能的项目中把不符合属性蕴含关系的项目删除,即可得到符合属性蕴含关系的完备  $Q$  矩阵.采用从形式背景中挖掘属性蕴含的方法,实现从  $Q$  矩阵中挖掘出属性蕴含.

本文研究为建立  $Q$  矩阵理论的扩展走出重要的一步,由此也产生了较多其它相关的问题.比如,基于属性蕴含,如何进行辅助属性标定,认知诊断计算机自适应测验中的题库如何建设,属性的标定对认知诊断计算机自适应测验题库的开发与维护至关重要.

## 4 参考文献

- [1] 漆书青,戴海崎,丁树良.现代教育与心理测量学原理[M].北京:高等教育出版社,2002.
- [2] 丁树良,祝玉芳,林海菁,等.矩阵理论的修正[J].心理学报,2009,41(2):101-112.
- [3] 丁树良,杨淑群,汪文义.可达矩阵在认知诊断测验编制中的重要作用[J].江西师范大学学报:自然科学版,2010,34(5):490-495.
- [4] 丁树良,罗芬.求偏序关系 Hasse 图的算法[J].江西师范大学学报:自然科学版,2005,29(2):150-152.
- [5] 林海菁,丁树良.具有认知诊断功能的计算机化自适应测验的研究与实现[J].心理学报,2007,39(4):747-753.
- [6] 罗欢,丁树良,汪文义,等.属性不等权重的多级评分属性层级方法[J].心理学报,2010,42(4):528-538.
- [7] 涂冬波,蔡艳,戴海琦,等.一种多级评分的认知诊断模型:P-DINA 模型的开发[J].心理学报,2010,42(10):1011-1020.
- [8] 杨淑群,蔡声镇,丁树良,等.求解简化  $Q$  矩阵的扩张算法[J].兰州大学学报:自然科学版,2008,44(3):87-90,96.
- [9] Lin Haijing, Ding Shuliang, Chang Huahua. Computerized adaptive testing for cognitive diagnosis [C]. San Francisco: National Council on Measurement in Education, 2006.
- [10] 喻晓锋,丁树良,秦春影,等.贝叶斯网在认知诊断属性层级结构确定中的应用[J].心理学报,2011,43(3):338-346.
- [11] Tatsuo K K. Boolean algebra applied to determination of universal set of knowledge states [R]. Princeton: Education Testing Service, 1991.
- [12] Tatsuo K K. Architecture of knowledge structure and cognitive diagnosis: a statistical pattern recognition and classification approach [C]. Hillsdale: Erlbaum, 1995.
- [13] 杨淑群.认知评估中的属性关系[J].江西师范大学学报:自然科学版,2015,39(2):132-137.
- [14] Leighton J P, Cderl M J, Hunka S M. The attribute hierarchy method for cognitive assessment: a variation on Tatsuo's rule-space approach [J]. Journal of Educational Measurement, 2004, 41(3):205-237.
- [15] Gierl M J, Leighton J P, Hunka S M. Exploring the logic of Tatsuo's rule: space model for test development and analysis [J]. Educational Measurement: Issues and Practice, 2000, 19(3):34-44.
- [16] 杨淑群,丁树良.有效对象的判定理论与方法[J].江西师范大学学报:自然科学版,2011,35(1):1-4.
- [17] Ganter B, Wille R. Formal concept analysis: mathematical foundations [M]. Berlin: Springer, 1999.

## $Q$ Matrix Theory Based on Attribute Implication

YANG Shuqun

( Faculty of Software, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian 350007, China)

**Abstract:** Cognitive diagnosis is a cutting-edge research integrated with cognitive psychology, psychometrics and education measurement. In the  $Q$  matrix theory in which the constraint relationships of attributes are considered, the cognitive model of the theory can be described by a set of attributes and the hierarchical relations among them. Nonetheless, the model ignores the possible non-hierarchical implication relations. The paper is aimed to explore the generation of the  $Q$  matrix and the method to mine out the attribute application. The research project is also expected to advance the theories of cognitive diagnosis and to promote its pragmatic application. The research will have a positive academic value of expanding the field of  $Q$  matrix theory.

**Key words:** implication relation;  $Q$  matrix; the generation of the  $Q$  matrix

(责任编辑:冉小晓)