

文章编号: 1000-5862(2016)01-0061-04

一种成功概率几乎完美的基于 相干纠缠态的隐形传态方案

张力健, 叶志清*

(江西师范大学物理与通信电子学院, 江西省光电子与通信重点实验室, 江西 南昌 330022)

摘要: 提出以四模纠缠相干态作为量子信道, 待传的量子信息为三模相干叠加态, 系统组成的系综态经过一个由分束器和移相器组成的线性光学系统, 然后通过奇偶态测量, 并把测量结果通过经典信道告诉对方, 对方选择合适的么正变换就可以恢复待传的量子信息, 通过计算, 该方案所得到的成功传态概率几乎完美, 同时保真度也趋近于1.

关键词: 相干纠缠态; 隐形传态; 么正变换

中图分类号: TN 918 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.01.11

0 引言

量子通信是指利用量子纠缠效应进行信息传递的一种新型的通讯方式. 量子通信是近20年发展起来的新型交叉学科, 是量子论和信息论相结合的新研究领域. 量子通信^[1-3]主要涉及: 量子密码通信^[4-5]、量子计算机^[6-7]、量子隐形传态^[8-10]和量子密集编码^[11]等. 近年来, 这门学科已经逐步从理论走向实验, 并向实用化发展. Ma Xiaosong等^[12]利用有源前馈传输距离超过143km. 2013年Peng Jiayin等^[13]提出了新的方案, 此方案通过不同的量信道实现了多粒子任意态的量子隐形传送. 近几年一些知名学者围绕量子隐形传态也展开了相关的研究^[14-17]. 最近我国将基于该卫星开展卫星与地面之间绝对安全的高速量子密钥分发实验, 通过高精度的捕获与跟瞄系统, 建立超远距离量子信道, 并在此基础上进行广域量子通信网络的演示. 这将是国际首次星地间量子通信实验. 量子隐形传态是经由经典通道和量子通道传送未知量子态, 即将某一粒子的未知量子态在另一个地点的另一粒子上还原出来. 近年来, 对量子隐形传态的研究也越来越深, 其中相干纠缠态在量子信息处理过程中也扮演着重要的角色. S. J. Van Enk等^[18]研究了纠缠相干态的消相干问题, 提出了如何利用纠缠相干态隐形传输一个薛定谔猫态的方案. 2003年S. J. Van Enk等^[14]提出了包含偶相干态和奇相干叠加态. 该方案所得到

的隐形传态成功概率是1/2. 王晓光^[19]对纠缠相干态的特性进行分析计算, 给出了双模和多模纠缠相干态^[8]的隐形传态, 并计算实现量子隐形传态成功的概率为1/2.

通过分析以上方案, 发现光子计数通常分为2部分: 偶数(包含0)与奇数. 而本文提出的方案, 仅对光子计数做一点小的调整, 0从偶数计数中单独分列称为真空态、非零偶数态和奇数态. 以三模相干叠加态为例, 设计一套由移相器(phase shifter, 简记为PS)和50:50分束器(beam splitter, 简记为BS)组成的线性光学系统对量子系综态进行变换. 经过计算, 本方案实现隐形传态的成功概率几乎为10%. 可以大大提高成功传输的概率, 同时还计算了平均保真度也接近为1.

1 隐形传态方案

有通信双方: Alice 和 Bob. Alice 要把三模相干叠加态传给 Bob, 三模相干叠加态为 $|I\rangle_{123} = \varepsilon_+ |\sqrt{2}\alpha, \alpha, \alpha\rangle_{123} + \varepsilon_- |-\sqrt{2}\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle_{123}$.

用一对正交态来表示为

$$\begin{aligned} |I\rangle_{123} &= H_+ |EVEN, \sqrt{2}\alpha, \alpha, \alpha\rangle + H_- |ODD, \\ &\quad -\sqrt{2}\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |EVEN, \sqrt{2}\alpha, \alpha, \alpha\rangle + \\ &\quad \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |ODD, -\sqrt{2}\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

收稿日期: 2015-11-07

基金项目: 国家自然科学基金(61368001)资助项目.

通信作者: 叶志清(1960-), 男, 浙江建德人, 教授, 主要从事光量子通信和光电子器件的研究.

其中 $H_+ = \cos(\theta/2)$ $H_- = \sin(\theta/2) e^{i\varphi}$.

$$\begin{aligned} |EVEN \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle = \\ \frac{|\sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle + |-\sqrt{2}\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle}{\sqrt{2(1+x^8)}} |ODD \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle = \\ \frac{|\sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle - |-\sqrt{2}\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle}{\sqrt{2(1-x^8)}}. \end{aligned} \quad (2)$$

H_{\pm} 与 ε_{\pm} 的关系为

$$\begin{aligned} H_{\pm} &= (\varepsilon_{\pm} \pm \varepsilon_{\mp}) \sqrt{(1 \pm x^8)/2}, \\ \varepsilon_{\pm} &= [2(1+x^8)]^{-1/2} H_{\pm} \pm [2(1-x^8)]^{-1/2} H_{\mp}. \end{aligned}$$

θ 和 φ 为 $\cot \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} = H_+ / H_-$, 为了实现三模相

干叠加态的隐形传态, 需要四模相干纠缠态作为量子信道, 选择如下形式:

$$\begin{aligned} |E\rangle_{4567} &= \frac{1}{\sqrt{2(1-x^8)}} (|2\alpha, \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle_{4567} - \\ &| -2\alpha, -\sqrt{2}\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle_{4567}), \end{aligned}$$

其中 $x = e^{-|\alpha|^2}$, 量子系统的系综态为

$$|\psi\rangle_{1234567} = |I\rangle_{123} |E\rangle_{4567}.$$

设计一个线性光学系统, 如图 1 所示, 其中 PS 为相移器, 可由算符 $\hat{P}_j(\theta) = \exp(-i\alpha_j^\dagger \alpha_j)$ 表示, BS 为分束器, 由算符 $\hat{B}_{ij}(\theta) = \exp(i\theta(\alpha_i^\dagger \alpha_j + \alpha_j^\dagger \alpha_i))$ 表示. 其中 $\alpha_j^\dagger(\alpha_j)$ 为 j 模的产生(湮灭)算符. 模 1, 2, 3, 4 属于 Alice, 模 5, 6, 7 属于 Bob. 通过下式的线性光学系统变换, 可以将态 $|\psi\rangle_{144567}$ 转变成态 $|\psi\rangle_{16,17567}$.

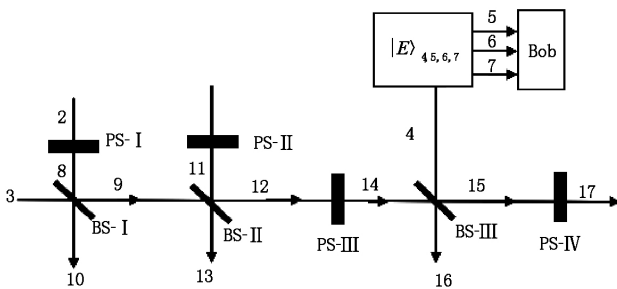


图1 线性光学系统

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{16,17567} &= \\ \frac{1}{\sqrt{2(1-x^{16})}} &(\varepsilon_+ |2\sqrt{2}\alpha \alpha \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle_{16,17567} - \\ \varepsilon_+ &|0, -2\sqrt{2}\alpha, -\sqrt{2}\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle_{16,17567} + \\ \varepsilon_- &|0, 2\sqrt{2}\alpha \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle_{16,17567} - \varepsilon_- | -2\sqrt{2}\alpha \alpha, \\ &-\sqrt{2}\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle_{16,17567}). \end{aligned} \quad (3)$$

2 量子测量

H. Prakash 等^[1] 修改了量子计数的方案, 将

$|\pm\sqrt{2}\alpha\rangle$ 按照真空态、非零偶数态和奇数态展开.

$$|\pm\alpha\rangle = \sqrt{x}|0\rangle + 2^{-1/2}(1-x)|NZE \alpha\rangle \pm ((1/2)(1-x^2)^{1/2}|ODD \alpha\rangle), \quad (4)$$

其中

$$|NZE \alpha\rangle = (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle - 2\sqrt{x}|0\rangle) / \sqrt{2(1-x)}, \quad (5)$$

$|NZE \alpha\rangle$ 只包含的非零偶数的光子态. 同理,

$$|\pm 2\sqrt{2}\alpha\rangle = x^3|0\rangle + 2^{-1/2}(1-x^8)|NZE, 2\sqrt{2}\alpha\rangle \pm ((1/2)(1-x^{16})^{1/2}|ODD 2\sqrt{2}\alpha\rangle). \quad (6)$$

利用(4)~(6)式,(3)式可变为

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{16,17567} &= \frac{x^3}{\sqrt{2(1-x^{16})}} |0\rangle_{16} |0\rangle_{17} (\varepsilon_+ + \\ \varepsilon_-) &(|\sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle_{567} - |-\sqrt{2}\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle_{567}) + \\ \frac{1}{2} &\sqrt{\frac{1-x^8}{1+x^8}} (|NZE 2\sqrt{2}\alpha\rangle_{16} |0\rangle_{17} (\varepsilon_+ |\sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle_{567} - \\ \varepsilon_- &|-\sqrt{2}\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle_{567}) + |0\rangle_{16} |NZE 2\sqrt{2}\alpha\rangle_{17} \cdot \\ (-\varepsilon_+ &|-\sqrt{2}\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle_{567} + \varepsilon_- |\sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle_{567})) + \\ \frac{1}{2} &(|ODD 2\sqrt{2}\alpha\rangle_{16} |0\rangle_{17} (\varepsilon_+ |\sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle_{567} + \\ \varepsilon_- &|-\sqrt{2}\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle_{567}) + |0\rangle_{16} |ODD 2\sqrt{2}\alpha\rangle_{17} \cdot \\ (\varepsilon_+ &|-\sqrt{2}\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle_{567} + \varepsilon_- |\sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle_{567})). \end{aligned} \quad (7)$$

由(7)式发现, Alice 对模 16、17 做双模测量, 存在 3 种情况: (i) 2 个模都为零即真空态, (ii) 2 个模一个为零模另一个为非零偶数态, (iii) 2 个模一个为零模另一个为奇数态. 其中第 1 种情况传态失败了, 第 2 和第 3 种情况传态成功概率经过计算几乎达到 100%.

3 传态概率计算

为了计算隐形传态概率, 把待传的信息 $|I\rangle_{123}$ 用一对正交态来表示的. 由(1)~(2)和(7)式得

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{16,17567} &= \frac{\sqrt{2}x^3}{(1-x^{16})} |0\rangle_{16} |0\rangle_{17} H_+ |ODD \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle_{567} + \\ \frac{1}{2} &\sqrt{\frac{1-x^8}{1+x^8}} (|NZE 2\sqrt{2}\alpha\rangle_{16} |0\rangle_{17} (H_+ \sqrt{\frac{1-x^8}{1+x^8}} |ODD \sqrt{2}\alpha, \\ \alpha \alpha\rangle_{567} &+ H_- \sqrt{\frac{1+x^8}{1-x^8}} |EVEN \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle_{567}) + \\ |0\rangle_{16} &|NZE 2\sqrt{2}\alpha\rangle_{17} (H_+ \sqrt{\frac{1-x^8}{1+x^8}} |ODD \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle_{567} - \\ H_- &\sqrt{\frac{1+x^8}{1-x^8}} |EVEN \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle_{567})) + \frac{1}{2} (|ODD, \\ 2\sqrt{2}\alpha\rangle_{16} &|0\rangle_{17} (H_+ |EVEN, \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha\rangle_{567} + \end{aligned}$$

$$H_- | \text{ODD} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha \rangle_{567} + | 0 \rangle_{16} | \text{ODD} 2\sqrt{2}\alpha \rangle_{17} \cdot (H_+ | \text{EVEN} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha \rangle_{567} - H_- | \text{ODD} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha \rangle_{567}) . \quad (8)$$

当 Alice 对模 16、17 作双模测量, 并把测量结果通过经典信道发送给 Bob, Bob 对测量后塌缩的态进行么正变换:

$$U_I = I ,$$

$$U_{II} = | \text{EVEN} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha \rangle_{567} \cdot {}_{567} \langle \text{ODD} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha | + | \text{ODD} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha \rangle_{567} \cdot {}_{567} \langle \text{EVEN} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha | ,$$

$$U_{III} = | \text{EVEN} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha \rangle_{567} \cdot {}_{567} \langle \text{ODD} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha | - | \text{ODD} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha \rangle_{567} \cdot {}_{567} \langle \text{EVEN} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha | ,$$

$$U_{IV} = I ,$$

$$U_V = | \text{EVEN} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha \rangle_{567} \cdot {}_{567} \langle \text{EVEN} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha | - | \text{ODD} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha \rangle_{567} \cdot {}_{567} \langle \text{ODD} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha | .$$

根据 (8) 式, 可以算出成功传输的概率,

$$P_{II} = P_{III} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1-x^8}{1+x^8} \left((H_+ \frac{\sqrt{1-x^8}}{1+x^8})^2 + (H_- \frac{\sqrt{1+x^8}}{1-x^8})^2 \right) \right\} ,$$

$$P_{IV} = P_V = \frac{1}{4} (|H_+|^2 + |H_-|^2) = \frac{1}{4} ,$$

$$P_{\text{成功}} = P_{II} + P_{III} + P_{IV} + P_V = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4x^8}{(1+x^8)^2} H_+^2 \right) + \frac{1}{2} .$$

由于 $\cot(\theta e^{i\varphi}/2 = H_+/H_-)$, 当 $\theta = \pi$ 时, 取得最小概率 P_1 ; 当 $\theta = 0$ 或者 2π 时, 取得最大概率 P_2 ; 当 $\theta = \pi/2$ 或者 $3\pi/2$ 时, 取得的概率为 P_3 :

$$P_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1-x^8}{1+x^8} \right)^2 + \frac{1}{2} \quad P_2 = 1 ,$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x^{16}}{(1+x^8)^2} \right) + \frac{1}{2} .$$

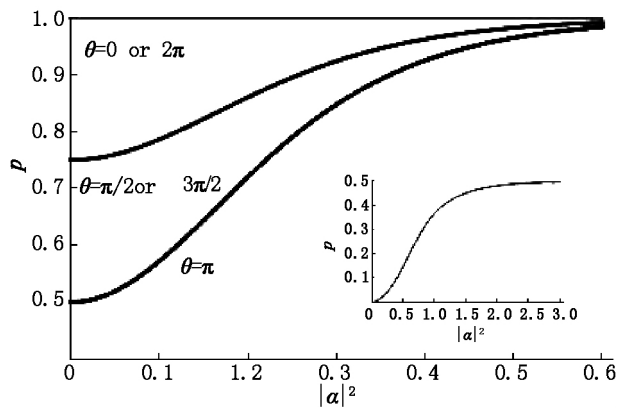


图 2 成功传输概率 P 与 $|\alpha|^2$ 的变化关系

由图 2 可知, 当 $\theta = \pi$ 时, 取得最小概率 P_1 ; 当 $\theta = 0$ 或者 2π 取得最大概率 P_2 ; 当 $\theta = \pi/2$ 或者

$3\pi/2$ 时, 取得的概率为 P_3 . $\forall \theta$, 传输概率在 $|\alpha|^2 \approx 0.6$ 处趋近于 1. 相比较于文献 [18] 的研究方案, 即概率 $P = (1-x^2)^2/(2+2x^4)$ (见图 2), 本隐形传态方案的成功概率几乎完美.

4 保真度的计算

当 Alice 对模 16、17 作双模测量时, 量子系统分别进入塌缩态:

$$|T\rangle_{0\rho} = | \text{ODD} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha \rangle_{567} ,$$

$$|T\rangle_{NZE\rho} = |T\rangle_{0,NZE} \sim H_+ \sqrt{\frac{1-x^8}{1+x^8}} | \text{EVEN} ,$$

$$\sqrt{2}\alpha \alpha \alpha \rangle_{567} + H_- \sqrt{\frac{1+x^8}{1-x^8}} | \text{ODD} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha \rangle_{567} ,$$

$$|T\rangle_{\text{ODD}\rho} = |T\rangle_{0,\text{ODD}} = H_+ | \text{EVEN} , \sqrt{2}\alpha \alpha , \alpha \rangle_{567} + H_- | \text{ODD} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha \rangle_{567} .$$

当测量结果为 $(\text{ODD} \rho)$ 和 $(0, \text{ODD})$ 时, 保真度为 $|\langle I | T \rangle|^2 = 1$. 当测量结果为 (0ρ) 时, 若传态为 $| \text{ODD} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha \rangle$, 则保真度为 1, 若传态为 $| \text{EVEN} \sqrt{2}\alpha \alpha \alpha \rangle$, 则保真度为 0. 当测量结果为 $(NZE \rho)$ 和 $(0, NZE)$ 时, 保真度为

$$F \equiv |\langle I | T \rangle|^2 = \frac{(1-x^8(|H_+|^2 - |H_-|^2))^2}{(1+x^{16}-2x^8(|H_+|^2 - |H_-|^2))} = (1 - x^8 \cos \theta)^2 / (1+x^{16}-2x^8 \cos \theta) . \quad (12)$$

由 (12) 式可知, 当 $\theta = 0$ 和 π 时取得最大保真度 $F_{\max} = 1$. 当 $\theta = \cos^{-1}(x^4)$ 时取得最小保真度

$F_{\min} = 1 - x^8$. 还可以得出平均保真度 $F_{av} = \sum_{i=1}^v P_i F_i = 1 - 2x^4 |H_+|^2 (x^8 |H_-|^2 + |H_+|^2) / (1+x^8)^2$. 当 $H_- = 0$ 时, 平均保真度取得最小值 $F_{av, \min} = 1 - 2x^8 / (1+x^8)^2$. 将 F_{\min} 与 $F_{av, \min}$ 作出图 3, 由图 3 可知, 当 $|\alpha|^2$ 趋近于 1 时, $F_{ac, \min}$ 和 F_{\min} 几乎等于 1.

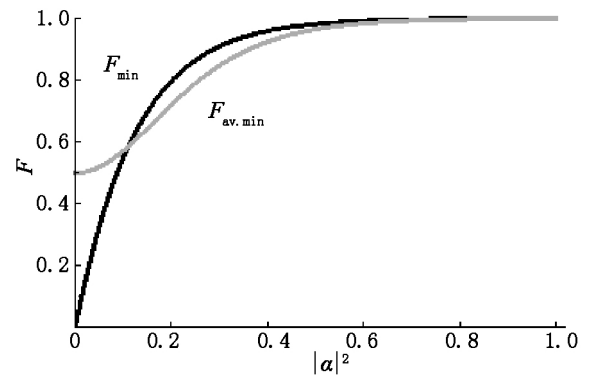


图 3 保真度 F 与 $|\alpha|^2$ 的变化关系

5 结论

当 $|\alpha|^2$ 取得适当值时,传输的效果也会非常完美.于 Wang Xiaogang^[19] 的方案将量子计数分为奇数和偶数,当量子计数为偶数时传输会失败而当量子计数为奇数时可以成功传输,所以文献[19]的方案成功概率为 $1/2$.将量子计数分为零、非零偶数和奇数.当它为零时,传输不成功,但当它是非零偶数和奇数时,本文传输成功率几乎为 1,同时所计算出来的保真度也非常理想.在 α^2 取一定值时,保真度可以趋近于 1.

6 参考文献

- [1] Prakash H, Chandra N, Prakash R, et al. Improving the teleportation of entangled coherent states [J]. Physical Review A 2007, 75(4): 810-814.
- [2] Prakash H, Chandra N, Prakash R, et al. Entanglement diversion between two pairs of entangled states: fidelity and decoherence [J]. International Journal of Modern Physics B 2009(4): 23: 585-595.
- [3] DiVincenzo D P. Quantum computation [J]. Science. 1995, 270(5234): 255-261.
- [4] 李思广, 黄健. 数字签名技术及在网络安全中的应用 [J]. 四川兵工学报 2008, 29(2): 115-116.
- [5] 林帅, 林雄. 量子密码通信及其研究进展 [J]. 电脑与信息技术 2012, 20(6): 13-15.
- [6] 郭光灿, 周正威, 郭国平, 等. 量子计算机的发展现状与趋势 [J]. 学科发展 2010, 25(5): 516-524.
- [7] Bennett C H, Weisner S J. Computation via one-and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states [J]. Physical Review Letter, 1992, 69(20): 2881-2884.
- [8] 刘传龙, 郑亦庄. 纠缠相干态的量子隐形传态 [J]. 物理学报 2006, 55(12): 6222-6228.
- [9] 苏晓琴, 郭光灿. 量子隐形传态 [J]. 物理学进展, 2004, 22(3): 259-272.
- [10] Weedbrook C, Pirandola S, Garcia-Patron R, et al. Gaussian quantum information [J]. Review Modern Physics, 2012, 84(2): 621-669.
- [11] Ekert A K. Quantum cryptography based on Bell's theorem [J]. Physical Review Letter, 1991, 67(6): 661-663.
- [12] Ma Xiaosong, Herbst T, Scheidl T, et al. Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward [J]. Nature 2012, 489(7415): 269-273.
- [13] Peng Jiayin, Mo Ziwen. Several teleportation schemes of an arbitrary unknown multi-particle state via different quantum channels [J]. Chinese Physical B 2013, 22(5): 160-167.
- [14] Pirandola S, Eisert S, Weedbrook C, et al. Advances in quantum teleportation [J]. Cancer Research, 2015, 9(10): 5439.
- [15] Shuntaro T, Takahiro M, Maria F, et al. Deterministic quantum teleportation of photonic quantum bits by a hybrid technique [J]. Nature 2013, 500(7462): 315-318.
- [16] Girolami D. Observable measure of quantum coherence in finite dimensional systems [J]. Physical Review Letter, 2014, 113(17): 170401.
- [17] Karpat G, Akmak B, Fanchini F F. Quantum coherence and uncertainty in the anisotropic XY chain [J]. Physical Review B 2014, 90(90): 104431.
- [18] Enk S J V, Hirota T. Entangled coherent states: teleportation and decoherence [J]. Physical Review A, 2001, 64(2): 29-32.
- [19] Wang Xiaoguang. Quantum teleportation of entangled coherent states [J]. Physical Review A, 2001, 64: 22302.

The Scheme of Teleportation Based on Coherent Entangled State with Almost Perfect Probability of Success

ZHANG Lijian, YE Zhiqing*

(College of Physics & Communication Electronics, Key Laboratory of Photoelectron & Telecommunication of Jiangxi Province, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The paper presents a four-mode entangled coherent state as a quantum channel, quantum information to be transmitted is a three-mode coherent superposition state, the department of state through the mechanized system consisting of a linear optical system by the beam splitter and the phase shifter formed. Then by parity state measurement, and the measurement results tell each other through a classical channel, the other to select the appropriate unitary operation can be restored quantum information to be transmitted, by calculating the probability of successful teleportation of this scheme was almost perfect, what is more the fidelity close to 1.

Key words: coherent entangled state; teleportation; unitary operation

(责任编辑: 冉小晓)