

文章编号: 1000-5862(2016)01-0071-06

应用量纲归一化方法改进的 分数傅里叶变换快速算法

林 睿^{1 2 3}

(1. 重庆工商大学计算科学与信息工程学院, 重庆 400067;
2. 中国科学院国家授时中心, 陕西 西安 710600; 3. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要: 提出了一种实现分数傅里叶变换快速计算的改进算法, 该算法将量纲归一化的方法应用到分数傅里叶变换光学系统中, 严格导出了空域、分数傅里叶变换域和傅里叶变换域的采样间隔, 并根据该采样间隔模拟分数傅里叶变换光学系统实现了分数傅里叶变换快速算法。相应的数值模拟实验表明: 该算法计算的强度值结果与 Kutay 的算法相应的计算结果一致; 以 Kutay 算法的计算结果为参考, 该算法计算的准确性要优于 Bultheel 的算法的计算结果; 与 Kutay 的算法和 Bultheel 的算法相比较, 该算法的计算速度较快。实验还表明, 该算法的计算结果不会随人为确定的 2 个参数(波长和透镜焦距)的变化而变化, 具有良好的稳定性。

关键词: 分数傅里叶变换; 角谱衍射; 量纲归一化; 采样间隔; 离散化

中图分类号: O 438. 2 **文献标志码:** A **DOI:** 10. 16357/j. cnki. issn1000-5862. 2016. 01. 13

0 引言

分数傅里叶变换(Fractional Fourier Transform, FRFT)作为一种能在相空间对输入函数实现任意角度旋转的数学工具^[1], 自从1993年被引入光学领域以来, 已经广泛应用于量子力学^[2]、光学^[3-4]、信号处理^[5-6]、图像处理^[7]及通信等领域。FRFT的数值计算对于FRFT的在各个领域的应用是非常重要的, 到目前为止计算速度最快的一种FRFT数值计算方法是由H. M. Ozaktas研究小组提出的分解型算法^[8], 这种算法在计算前必须对输入信号施行量纲归一化的操作^[8-11]。经过量纲归一化操作后, 信号在时域和频域的表示都是无量纲的, 这就统一了时域和频域的尺度, 其计算结果接近连续的分数傅里叶变换的结果。分解型算法目前有2种公认的计算性能较好的且公开了源码的实现算法: M. A. Kutay编写的算法^[12]和A. Bultheel编写的算法^[13]。另一种FRFT的快速算法是根据光波衍射与分数傅里叶变换的关系^[14]通过模拟计算光波在分数傅里叶变换光学系统中的传播来实现相应的分数傅里叶变换的计算^[15-19], 但这种算法的实现都没有进行量纲归

一化的操作, 其离散化计算的采样间隔缺乏严格的数学推导; 并且除了文献[15]在计算中统一了输入输出的尺度外, 文献[16-19]在计算中会涉及到尺度变换的问题, 最终计算结果需要进行插值计算, 这就降低了计算精度和计算速度。

量纲归一化的方法自从H. M. Ozaktas提出后, 逐渐在信号处理中得到应用^[9-11, 20-21], 特别是在处理chirp信号和线性频率调制(LFM)信号时应用量纲归一化已经有较好的效果^[10-11, 20]。因此, 本文在量纲归一化的条件下提出一种改进的模拟FRFT光学系统实现FRFT快速计算的算法, 即将量纲归一化的方法应用到Lohman型分数傅里叶变换的光学系统中, 对输入信号的时域和频域施行量纲归一化的操作, 导出了在离散化计算时严格数学意义上的采样间隔关系, 统一了时域和频域信号的尺度, 避免了模拟FRFT光学系统时的尺度变换, 在此基础上实现了分数傅里叶变换的快速算法。仿真实验表明, 以Kutay的实现算法的计算结果为参考, 本文所提算法较Bultheel的实现算法的计算更准确; 对于长序列信号, 本文所提算法的计算速度要快于Kutay和Bultheel的实现算法。

收稿日期: 2015-09-28

基金项目: 中国科学院西部之光在职博士研究生课题(Y307YR9101)资助项目。

作者简介: 林 睿(1972-), 男, 重庆市人, 讲师, 博士, 主要从事光学信息处理的研究。

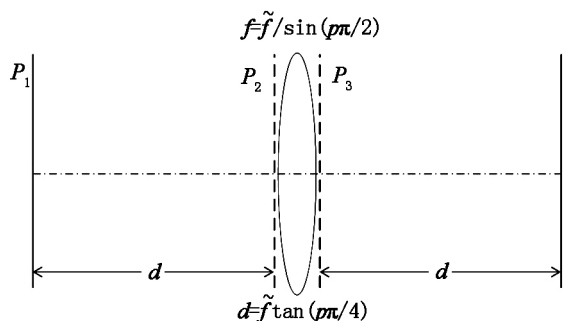
1 量纲归一化的采样间隔的推导及 FRFT 数值算法

信号 $g(x)$ 的 p 阶连续 FRFT 的线性积分形式定义^[8]为

$$G(u) = \mathcal{F}^p\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) K_p(x, u) dx, \quad (1)$$

其中积分核为

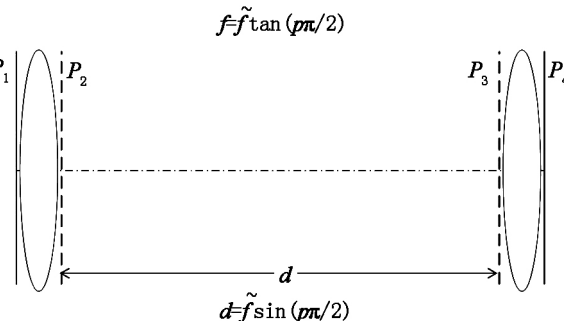
$$K_p(x, u) =$$



(a) Lohmann I 型

$$\begin{cases} C_p \exp[j\pi(u^2 + x^2) \cot\varphi - j2\pi ux \csc\varphi] & 0 < |p| < 2, \\ \delta(u - x), & p = 0, \\ \delta(u + x), & p = \pm 2. \end{cases} \quad (2)$$

$\mathcal{F}^p\{*\}$ 表示 p 阶 FRFT $\varphi = p\pi/2$, $C_p = \sqrt{1 - i \cot\varphi}$. (1) 式的定义可以扩展到 $-2 \leq p \leq 2$ 之外的所有实数^[8]. 在光学中 FRFT 可以采用薄透镜构成的 FRFT 光学单元^[22-23]来实现,如图1所示.



(b) Lohmann II 型

图1 p 阶 FRFT 光学实现单元

f 是薄透镜焦距,其中图1(b)的2个薄透镜焦距相同. \tilde{f} 为标准焦距 d 是间距参数 P_1 是输入平面,坐标表示为 x_0 , P_4 是输出平面,坐标表示为 u_0 , P_2 和 P_3 是紧贴透镜表面的平面.根据上述光学实现单元,在波长为 λ 的单色平面光波照明下,在输入平面上复振幅分布为 $g(x_0)$ 的光学信号,经过光学单元的变换后,在输出面上得到的复振幅输出分布 $G(u_0)$ ^[22] 为

$$G(u_0) = C'_p \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0) \exp\{j\pi[(x_0^2 + u_0^2) \cot\varphi - 2x_0 u_0 \csc\varphi]/\lambda \tilde{f}\} dx_0, \quad (3)$$

其中 $\varphi = p\pi/2$, $C'_p = \exp[j2\pi \tilde{f} \tan\varphi/\lambda]/j\lambda \tilde{f} \sin\varphi$. 引入量纲归一化坐标^[22-23]

$$x = x_0/\sqrt{\lambda \tilde{f}}, \quad u = u_0/\sqrt{\lambda \tilde{f}}, \quad (4)$$

(3) 式变为

$$G(u) = C'_p \sqrt{\lambda \tilde{f}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp\{j\pi[(x^2 + u^2) \cot\varphi - 2xu \csc\varphi]\} dx = \mathcal{F}^p\{g(x)\}, \quad (5)$$

其中 $G(u) = G(u/\sqrt{\lambda \tilde{f}})$, $g(x) = g(x/\sqrt{\lambda \tilde{f}})$. 可以看到(5)式对比(1)式和(2)式,除了一个复常数不同外,它们都是计算的 p 阶 FRFT. 由此可知,函数 $g(x)$ 要利用图1的光学单元实现 p 阶分数傅里叶变换 $G(u) = \mathcal{F}^p\{g(x)\}$, 则必须按照尺度因子 $\sqrt{\lambda \tilde{f}}$ 进行坐标变换

$$x_0 = x \sqrt{\lambda \tilde{f}}, \quad u_0 = u \sqrt{\lambda \tilde{f}}. \quad (6)$$

根据图1,采用 Lohmann II 型光学单元可以用较小的计算量完成(3)式的计算,所以本文模拟 Lohmann II 型光学单元完成 FRFT 的快速计算.在1维的情况下 Lohmann II 型光学单元角谱衍射过程如下:对于薄透镜,可以认为平面 P_1 的坐标系统和平面 P_2 一致,平面 P_3 的坐标系统和平面 P_4 一致.设波长为 λ 的单位振幅单色平面光波照明平面 P_1 上复振幅透过率为 $g(x_0)$ 的物体,则各个平面上的复振幅和角谱分别为:平面 P_1 的复振幅分布 $g(x_0)$, 平面 P_2 的透镜相位变换后的复振幅分布

$$g_1(x_0) = g(x_0) \exp[-j\pi x_0^2/(\lambda f)], \quad (7)$$

相应的角谱为

$$A_1(\nu) = \mathcal{A}\{g_1(x_0)\}, \quad (8)$$

经过距离为 d 的衍射后,平面 P_3 的角谱为

$$A_2(\nu) = A_1(\nu) \exp[j2\pi d \sqrt{1 - (\lambda \nu)^2}/\lambda], \quad (9)$$

相应的复振幅分布为

$$g_2(u_0) = \mathcal{F}^{-1}\{A_2(\nu)\}, \quad (10)$$

透镜相位变换后平面 P_4 的复振幅分布为

$$G(u_0) = g_3(u_0) = g_2(u_0) \exp[-j\pi u_0^2/(\lambda f)], \quad (11)$$

从上面的分析可以看到,模拟 Lohmann II 型光学单元完成(3)式的计算需做2次傅里叶变换(Fourier Transform, FT).文献[8]详细论述了当采样点数为 N 的信号 $g(x)$ 按照(1)式进行 p 阶 FRFT

时, 时域和频域在坐标量纲归一化条件下的采样间隔关系满足

$$\Delta x = \Delta u = 1/\sqrt{N}, \quad (12)$$

而信号 $g(x)$ 利用 Lohmann II 型光学单元实现 p 阶 FRFT 时, 按照 (6) 式有

$$\Delta x_0 = \Delta x \sqrt{\lambda \tilde{f}} \Delta u_0 = \Delta u \sqrt{\lambda \tilde{f}}, \quad (13)$$

则 Lohmann II 型光学单元输入和输出平面上的采样间隔为

$$\Delta x_0 = \Delta u_0 = \sqrt{\lambda \tilde{f}/N}. \quad (14)$$

从 Lohmann II 型光学单元的角谱分析中可看到 (8) ~ (10) 式需要进行傅里叶变换和在傅里叶域进行计算, 在计算机中就是 FFT 计算. 由 DFT 的规律可知, FT 频域的采样间隔满足

$$\Delta \nu = 1/(N\Delta x_0) = 1/\sqrt{\lambda \tilde{f}N}. \quad (15)$$

在上述工作的基础上, 模拟 Lohmann II 型光学单元的 FRFT 算法部分如下:

(i) 根据分数阶 p 、波长 λ 和薄透镜的焦距 f 计算出族参数 \tilde{f} 、间距参数 d ; 根据计算出的族参数、输入信号 $g(x)$ 的采样点数 N 以及 (12) ~ (15) 式计算出各个光学平面的采样间隔 Δx_0 、 Δu_0 及傅里叶变换域的采样间隔 $\Delta \nu$;

(ii) 将各个平面的坐标 (包括傅里叶变换域坐标) 离散化 $x_0 = m\Delta x_0$ $u_0 = n\Delta u_0$ $\nu = k\Delta \nu$;

对于 N 为偶数的情况: $m, n, k = -N/2, -N/2 + 1, \dots, 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$; 对于 N 为奇数的情况: $m, n, k = -(N-1)/2, -(N-1)/2 + 1, \dots, 0, 1, 2, \dots, (N-1)/2$;

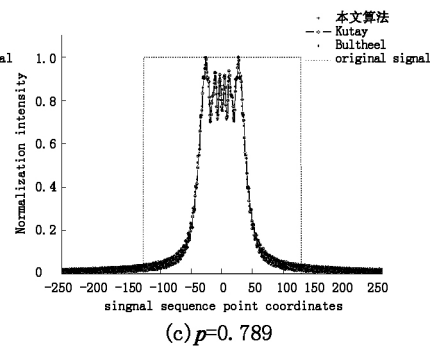
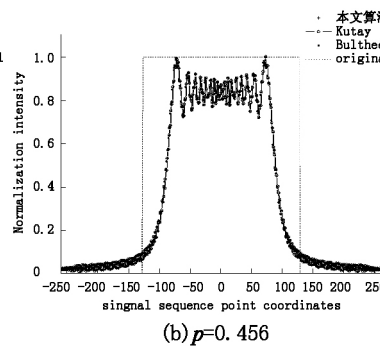
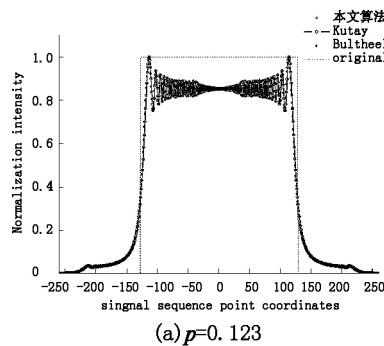


图 2 矩形函数信号的 FRFT 的强度分布曲线

在图 2 可以看到, 从小的分数阶 ($p = 0.123$) 到大的分数阶 ($p = 0.789$), 本文的算法与 Bultheel 的算法计算出的序列中的各点都在 Kutay 的算法计算出的曲线上, 且本文算法所计算出的结果序列点与 Kutay 的算法所计算出的结果序列点大致重合, 这表明本文提出的量纲归一化条件下 FRFT 算法的计算结果与用 H. M. Ozaktas 小组提出的分解型算法计算

(iii) 根据离散化的坐标计算 2 个透镜的离散化相位变换因子 $\exp[-j\pi(m\Delta x_0)^2/\lambda f]$ 和 $\exp[-j\pi(n\Delta u_0)^2/\lambda f]$ 以及角谱衍射的传递函数的离散化相位因子

$$\exp[j2\pi d \sqrt{1 - (\lambda k \Delta \nu)^2/\lambda}].$$

将信号 $g(x)$ 的离散序列按采样间隔 Δx_0 重采样后得到的信号 $g(m\Delta x_0)$ 作为输入信号, 按照 (7) ~ (11) 式的计算过程, 将步骤 (iii) 中的各个离散化的相位因子代入进行计算, 对于 (8) 式和 (10) 式的傅里叶变换则以 FFT 来完成, 这样即可计算出信号 $g(x)$ 的 p 阶 FRFT 的离散序列 $G(u)$.

2 数值模拟实验及性能分析

2.1 算法的有效性分析要求

为验证本文所提算法的有效性, 应用本文算法及分解型算法的 2 种实现方式^[12] 和计算矩形函数信号在同一个分数阶下的 FRFT^[13]. 所用矩形函数信号序列长度为 1 024 个点, 矩形脉冲宽为信号序列长度的 1/4, 强度为 1, 脉冲位于信号序列的中央, 信号序列的其余各点强度为 0, 计算采用的分数阶分别为 $p = 0.123$ 、 $p = 0.456$ 和 $p = 0.789$, 并假定所模拟的光学系统的光波长为 632.8 nm, 透镜的焦距为 300 mm. 计算结果的强度值按最大值归一化后, 取序列中央 500 个点的范围绘制的强度分布曲线如图 2 所示.

出的结果是相符的. 因而, 本文算法是有效的.

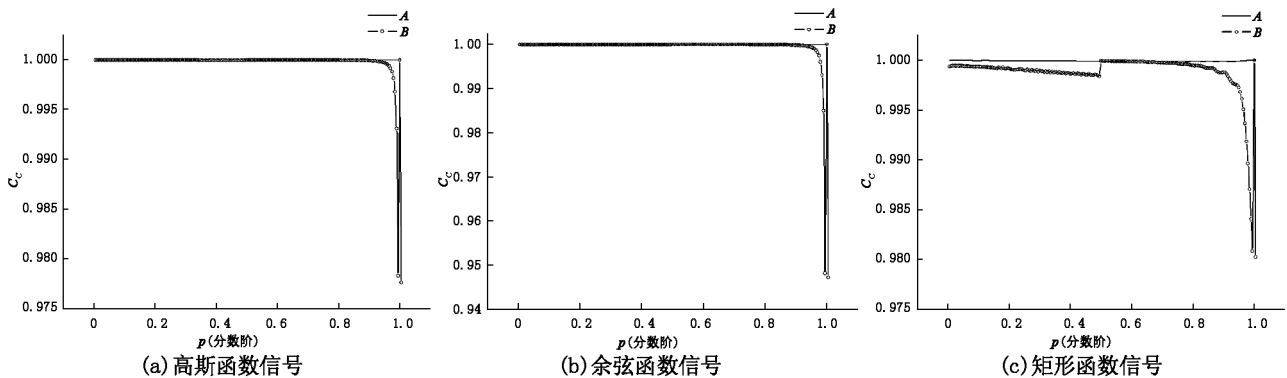
2.2 算法的准确性分析

引入相关系数来考察本文所提算法的计算准确性. 设 I_0 为参考序列, I_m ($m = 1, 2$) 为待考察序列, 其相关系数 (correlation coefficient C_c) 为

$$C_c = E\{[I_0 - E(I_0)][I_m - E(I_m)]\} / (\sqrt{E\{[I_0 - E(I_0)]^2\}} \sqrt{E\{[I_m - E(I_m)]^2\}}),$$

这里 $E\{ * \}$ 表示求期望值运算. 以 Kutay 算法的计算结果的强度值序列作为参考序列 I_0 , 本文所提算法的计算结果的强度值序列为 I_1 , Bultheel 算法的计算结果的强度值序列为 I_2 , 分别计算 I_1 与 I_0 、 I_2 与 I_0 的相关系数 C_c , C_c 最接近于 1 的算法的计算结果较另一算法的计算结果更准确. 为了更好研究本文所提算法的计算的准确性, 本文在分数阶为 $[0.005, 1.005]$ 的范围内, 采用上述 3 种算法分别计算矩形函数信号、高斯函数信号和余弦函数信号的 FRFT, 其中矩形函数采用与图 2 相同的信号, 高斯函数为 $f(x) = \exp(-x^2/2)$, 余弦函数为 $f(x) = \cos(x\pi/2)$, 所有的信号序列长度为 1 024 个点. 采用上述 3 种算法对其中一种信号施行某一分数阶的 FRFT 后, 其结果强度序列分别为 I_0 、 I_1 和 I_2 , 按照 (18) 式分别计算出 2 个相关系数; 当使分数阶从 0.005 开始, 以 0.005 的步长逐渐增加到 1.005 时, 就可以得到 2 个相关系数序列 A 和 B, 其中序列 A 为 I_1 与 I_0 的相关系数序列, 序列 B 为 I_2 与 I_0 的相关系数序列. 本文对上述 3 个函数信号序列分别计

算出 3 组相关系数序列, 据此作出相关系数随分数阶变化的曲线如图 3 所示. 从图 3(a) 和图 3(b) 中可以看到, 对于高斯函数信号和余弦函数信号的 FRFT 计算, 本文算法和 Bultheel 算法在 $[0.005, 0.95]$ 的分数阶范围内与 Kutay 算法的计算结果符合得好, 相关系数都在 0.999 9 以上; 而在 $(0.950, 1.005]$ 的分数阶范围内, 本文算法的计算结果产生的相关系数仍然能保持在 0.999 9 以上, Bultheel 算法的计算结果产生的相关系数除分数阶为 1 的点外, 其余各点数值均小于 0.999 9, 最小值小于 0.980 0. 对于矩形函数信号的 FRFT 计算(见图 3(c)), 本文算法在分数阶 $[0.005, 1.005]$ 范围内的计算结果产生的相关系数能保持在 0.998 0 以上, 而 Bultheel 算法仅在分数阶 $[0.500, 0.715]$ 的范围内和分数阶为 1 处能保持在 0.998 0 以上, 在其他分数阶处计算的相关系数都小于 0.998 0. 由此可知, 本文所提出的 FRFT 算法计算的准确性比 Bultheel 算法的计算结果更好.



注: 曲线 A 为本文算法与 Kutay 的算法的计算结果的强度相关系数, 曲线 B 为 Bultheel 的算法与 Kutay 的算法的计算结果的强度相关系数.

图 3 C_c 曲线

2.3 算法的快速性分析

在同一台计算机上研究上述 3 种算法的计算速度. 所用计算机配置为: CPU 采用 Intel 酷睿 i3 550, CPU 的频率为 3.2 GHz, 2G 的 DDR1600 内存, 显存为 1 GB、显示芯片为 ATI Radeon HD 5450 的独立显卡, 32 位 Win7 操作系统, 软件平台为 Matlab, 版本号为 7.8.0.347. 在上述软、硬件环境下研究采用 3 种算法分别计算同一个矩形函数信号序列在分数阶为 0.234 时的 FRFT 所耗费的时间. 矩形函数的矩形脉冲宽为信号序列长度的 1/4, 强度为 1, 脉冲位于信号序列的中央, 信号序列的其余各点强度为 0. 为了更好的对比研究各个算法的计算速度, 本文在保持矩形函数信号占空比的情况下, 分别计算了 4 个不同长度的信号序列, 其长度分别为 1 K、2 K、

4 K 和 8 K (1 K = 1 024 个点). 对于每一个长度序列信号, 在相同条件下用同一种算法分别独立计算 10 次, 所耗费时间的平均值作为相应算法的计算时间, 其结果如表 1 所示.

表 1 不同算法的计算时间比较					s
	信号长度				
	1 K	2 K	4 K	8 K	
Kutay	0.010 986	0.025 454	0.055 095	0.121 098	
Butheel	0.007 383	0.016 688	0.033 796	0.076 803	
本文算法	0.001 013	0.001 829	0.003 392	0.006 175	

从表 1 中可以看到, 在相同的条件下, 本文算法的计算时间明显比 Kutay 和 Bultheel 的算法的计算时间更短, 这表明本文算法的计算速度较 Kutay 和

Butheel 的算法更快; 并且从表 1 中可以看到, 在处理长序列信号时本文算法在计算时间上更有优势.

2.4 算法的稳定性分析

算法设计中光波波长 λ 和薄透镜焦距 f 是人为设定的, 这 2 个物理参数的变化, 对于计算结果有没有影响这是需要考虑的. 为此, 对于序列长度为 1 024 点的矩形函数信号 (矩形脉冲宽为信号序列长

度的 1/4, 强度为 1, 脉冲位于信号序列的中央, 信号序列的其余各点强度为 0), 先考察 $f = 300$ mm 保持不变, 而 λ 分别取值为 378、632.8 和 738 nm, 分数阶任意取值, 如 $p = 0.123$, 计算结果如图 4(a) 所示. 然后考察 $\lambda = 632.8$ nm 保持不变, 而 f 分别取值为 30、300 和 3 000 mm, 而分数阶任意取值, 如 $p = 0.789$ 的计算结果如图 4(b) 所示.

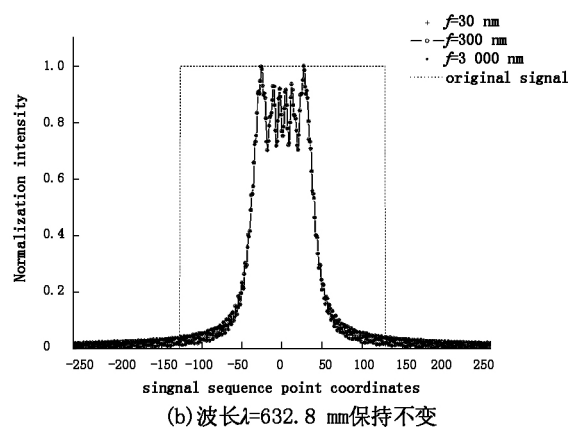
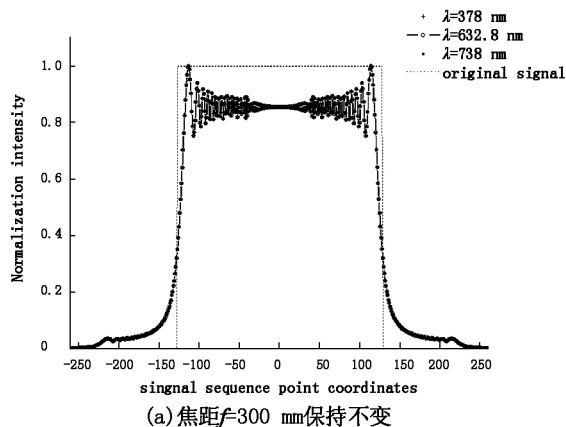


图4 算法稳定性实验结果

从实验结果可看到, 算法尽管有 2 个物理参数是人为设定, 但这 2 个物理参数的变化不会影响计算结果, 因而本文算法是稳定的.

3 结论

本文将量纲归一化的方法应用到 Lohmann II 型 FRFT 光学系统中, 严格推导出了进行 FRFT 计算时离散化的采样间隔, 在此基础上完成了 FRFT 的快速算法. 相应的仿真实验研究表明, 对于计算同一信号在相同分数阶下的 FRFT, 本文算法的计算结果的强度值与 Kutay 算法的计算结果是一致的, 其强度值计算结果较 Bultheel 算法的计算结果更准确; 而对于计算相同长度的信号序列的 FRFT, 在相同的分数阶的情况下, 本文算法的计算速度要快于 Kutay 和 Bultheel 的算法. 本文算法的稳定性实验表明, 由于采用了归一化的采样间隔, 算法对于人为设定的透镜间距和光波波长这 2 个参数是稳定的, 计算结果不会随这 2 个参数的变化而变化.

4 参考文献

- [1] Lohmann A W. Image rotation, wigner rotation, and the fractional fourier transform [J]. *Journal of the Optical Society America A*, 1993, 10(10): 2181-2186.
- [2] Fan Hongyi, Fan Yue. EPR entangled states and complex fractional Fourier transformation [J]. *European Physical*

- Journal D* 2002, 21(2): 233-238.
- [3] 陆大全, 胡巍. 椭圆响应强非局域非线性介质中的二维异步分数傅里叶变换及光束传输特性 [J]. *物理学报*, 2013, 62(8): 84211-84217.
- [4] 颜才杰, 金伟民. 利用全息透镜阵列实现多通道分数傅里叶变换 [J]. *激光与红外*, 2005, 35(10): 762-764.
- [5] Mei Lin, Zhang Qinyu, Sha Xuejun, et al. Digital computation of the weighted-type fractional Fourier transform [J]. *Science China Information Sciences*, 2013, 56(7): 1-12.
- [6] Sejdic E, Djurovic I, Stankovic L. Fractional Fourier transform as a signal processing tool: an overview of recent developments [J]. *Signal Process*, 2011, 91(6): 1351-1369.
- [7] 王鹏, 袁操, 王林, 李重光. 基于分数傅里叶变换的双彩色图像加密 [J]. *激光技术*, 2014, 38(4): 551-555.
- [8] Ozaktas H M, Ankan O, Kutay M A, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform [J]. *IEEE Transactions On Signal Processing*, 1996, 44(9): 2141-2150.
- [9] 赵兴浩, 邓兵, 陶然. 分数阶傅里叶变换数值计算中的量纲归一化 [J]. *北京理工大学学报*, 2005, 25(4): 360-364.
- [10] 刘锋, 徐会法, 陶然, 等. 分数阶 Fourier 域多分量 LFM 信号间的分辨研究 [J]. *中国科学: 信息科学*, 2012, 42(2): 138-150.
- [11] 刘锋, 徐会法, 陶然. 分数阶 Fourier 变换中量纲归一化因子的选取 [J]. *系统工程与电子技术*, 2011, 33(2): 237-241.
- [12] Kutay M A. fracF. m: Fast computation of the fractional fourier transform [EB/OL]. [2015-08-09]. <http://www.ee.bilkent.edu.tr/~haldun/fracF.m>.
- [13] Bultheel A. frft. m: Calculation of the fractional Fourier

- transform [EB/OL]. [2015-08-09]. <http://nalag.cs.kuleuven.be/research/software/FRFT/frft.m>.
- [14] Pellat-Finet P. Fresnel diffraction and the fractional-order Fourier transform [J]. *Optics Letters*, 1994, 19 (18) : 1388-1390.
- [15] Garcia J, Mas D, Dorsch R. Fractional-Fourier transform calculation through the fast-Fourier-transform algorithm [J]. *Applied Optics*, 1996, 35 (35) : 7013-7018.
- [16] Yang Xingpeng, Tan Qiaofeng. Improved fast fractional-Fourier-transform algorithm [J]. *Journal Optical Society America A*, 2004, 21 (9) : 1677-1681.
- [17] Marinho F J, Bernardo L M. Numerical calculation of fractional Fourier transforms with a single fast-Fourier-transform algorithm [J]. *Journal Optical Society America A*, 1998, 15 (8) : 2111-2116.
- [18] 陈文静, 苏显渝. 基于角谱分析的分数傅里叶变换数值模拟算法 [J]. *光电子: 激光*, 2002, 13 (4) : 401-404.
- [19] 冯迪, 严瑛白, 金国藩, 等. 求解分数傅里叶变换衍射积分的一种快速算法 [J]. *光子学报*, 2003, 32 (7) : 885-888.
- [20] 郭海燕, 于仕财, 关键, 等. 基于 FRFT 模最大值的 LFM 信号参数估计方法 [J]. *雷达科学与技术*, 2010, 8 (5) : 438-441.
- [21] 林睿, 刘启能, 张翠玲. 一种新的 gyrator 变换的快速算法 [J]. *激光技术*, 2012, 36 (1) : 50-53.
- [22] Bitran Y, Mendlovic D, Dorsch R, et al. Fractional Fourier transform: simulations and experimental results [J]. *Applied Optics*, 1995, 34 (8) : 1329-1332.
- [23] Sahin A, Ozaktas H M, Mendlovic D. Optical implementation of the two-dimensional fractional Fourier transform with different orders in the two dimensions [J]. *Optics Communications*, 1995, 120 (3) : 134-138.

An Improved Fast Algorithm for the Fractional Fourier Transform Based on the Method of the Dimensional Normalization

LIN Rui^{1 2 3}

(1. School of Computer Science and Information Engineering, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;

2. National Time Service Centre, Chinese Academy of Science, Xi'an Shanxi 710060, China;

3. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: An improved algorithm based on the method of the dimensional normalization for the fast calculation of the fractional Fourier transform is proposed. In the algorithm, the sampling intervals of the transform domains, such as spatial domain, Fourier domain and fractional Fourier domain, are strictly deduced out in the condition of dimensional normalization. Based on these sampling intervals, the fast algorithm for the fractional Fourier transform is implemented by simulating the optical fractional Fourier transform system. Numerical simulation experiments demonstrate that the calculated intensity results of this algorithm are consistent with that of Kutay's algorithm (in the Ozaktas group). Referring to the computed results of the Kutay's algorithm, the calculation accuracy of the algorithm proposed in this paper is better than that of Bultheel's algorithm. Compared with the Kutay's algorithm and the Bultheel's algorithm, the algorithm proposed in this paper calculates faster. Experiments also show that the computed results of the algorithm proposed in this paper do not vary with the variation of the two artificially determined parameters (such as wavelength and the focal length of the lens), which proves the robustness of the algorithm.

Key words: fractional Fourier transform; angle spectrum diffraction; dimensional normalization; sample interval; discretization

(责任编辑: 冉小晓)