第 40 卷 第 3 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 40 No. 3
2016 年 5 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) May 2016

文章编号:1000-5862(2016)03-0258-05

关于半模复形同调理论的若干研究

许 娣,黄福生*,李 扬,江小霞

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:在半模范畴中,针对半环和半模的加法都无逆运算,利用泛代数的思想,在同余的观点下定义了半模复形和复形链映射及复形同调函子,给出了一个半模复形为正合列的条件,并把环模上的连接同态定理在一定的条件下推广到了半模上,且得到了较弱的半模复形的长正合列定理.

关键词:半模正合列;复形;连接同态

中图分类号:O 153.3 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.03.08

0 引言及预备知识

关于序列复形同态的研究目前十分流行[1-5],关于半环半模内射性和投射性等相关性质的研究已经很多[6-17].在这些理论的基础上,本文沿用同余观点来定义半模复形,对半模同调理论进行研究.希望为研究和刻画半环半模提供一定的方法和有用结果.

关于半环及半模的定义及一些结果主要参见文献[11].单同态、满同态、同构分别指 injective、surjective 和 bijective 同态,用 ${}_R\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{M}_R$ 分别表示左 R-半模和右 R-半模范畴.

定义1 设 M 为左 R-半模,$a \in M$.若 $\forall b, c \in M$,由 $a+b=a+c$ 可推出 $b=c$,则称 a 为 M 中的可消元.若 M 中所有的元素都是可消的,则称 M 为可消半模.左 R-半模 M 的子半模 N 为 M 的可减子半模当且仅当 $m \in N$,且 $m+m' \in N \Rightarrow m' \in N$,对所有 $m, m' \in M$.

定义2 R 是半环,$M \in {}_R\mathscr{M}$,设 N 是 M 的1个子半模,则 M 上的1个同余关系 $\equiv_N = \{(a,b) \in M \times M \mid \exists n_1, n_2 \in N, a+n_1 = b+n_2\}$.

$\forall M, N \in {}_R\mathscr{M}$,若 $g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$,记
$\ker g = \{a \in M \mid g(a) = 0\}$,
$\rho_{\ker g} = \{(a,b) \mid a,b \in M, g(a) = g(b)\}$,
$g(M) = \{g(m) \mid m \in M\}$,$\equiv_{\ker g} = \{(a,b) \mid a, b \in M, \exists x_1, x_2 \in \ker g, a+x_1 = b+x_2\}$,
则 $\ker g \leqslant M$,$g(M) \leqslant N$,$\equiv_{\ker g}$ 和 $\rho_{\ker g}$ 均为 M 上的同余关系.

称序列 $P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} T$ 在 Q 处正合当且仅当 $\rho_{\ker g} = \equiv_{f(P)}$.处处正合的序列称为正合列.称序列 $0 \to P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} T \to 0$ 为短正合列当且仅当该序列正合且 g 为满同态.

命题1[14] 在 ${}_R\mathscr{M}$ 中,$f \in \mathrm{Hom}_R(P,Q)$,$g \in \mathrm{Hom}_R(Q,T)$,则 $\equiv_{f(P)} \subseteq \rho_{\ker g}$ 当且仅当 $gf = 0$.

命题2 序列 $0 \to P \xrightarrow{f} Q$ 在 P 点正合当且仅当 f 为单同态.

命题3 序列 $Q \xrightarrow{g} T \to 0$ 在 T 处正合且 $g(Q)$ 为 T 的可减子半模当且仅当 g 为满同态.

1 复形同调函子与连接同态

定义 3 在 ${}_R\mathscr{M}$ 中,若同态列 $A \equiv \cdots \to A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \to \cdots$,$n \in \mathbf{Z}$ 满足 $d_n d_{n+1} = 0$,$\forall n \in \mathbf{Z}$,则称 A 为1个(${}_R\mathscr{M}$)复形或链复形,记为 A 或 (A,d).称 d_n 为 A 的微分或边缘算子.若每个 d_n 均为 k-正则的,则称 A 为 k-正则复形.

由定义3知,复形不仅是正合列的推广(这里的条件 $d_n d_{n+1} = 0$ 等价于 $\equiv_{d_{n+1}(A_{n+1})} \subseteq \rho_{\ker d_n}$),而且也可看作是半模的推广,因为 $\forall M \in {}_R\mathscr{M}$ 可看作是复形 $\cdots \to 0 \to 0 \to \cdots \to 0 \to M \xrightarrow{I_M} M \to 0 \to \cdots$.

定义4 设 (A,d) 为(${}_R\mathscr{M}$)复形,称 $H_n(A) = \ker d_n / \equiv_{d_{n+1}(A_{n+1})} = \ker d_n / d_{n+1}(A_{n+1})$ 为 (A,d) 的第 n 个同调半模,有时也称为 n 维同调半模.

收稿日期:2015-12-23

基金项目:国家自然科学基金(11261021)资助项目.

通信作者:黄福生(1962-),男,江西抚州人,教授,主要从事半环和半模理论的研究.

称 $\ker d_n$ 的元素为此复形的 n-圈（闭链，循环），称 $d_{n+1}(A_{n+1})$ 的元素为此复形的 n-边缘，常记 $Z_n = Z_n(A) = \ker d_n$，$B_n = B_n(A) = d_{n+1}(A_{n+1})$，$H_n(A) = Z_n(A)/B_n(A)$，$H_n(A)$ 中的元素常记为 $[a] = a + B_n(A)$，称为 a 的同调类，$\forall a \in Z_n(A)$.

定义 5　设 (A,d)，(A',d') 为 $({}_R\mathscr{M})$ 复形，若有（左 R-半模）同态 $\{f_n\}$，其中 $f_n: A_n \to A_n'$（$\forall n \in \mathbf{Z}$）使图 1 成交换图，则称 $f = \{f_n\}$ 为复形 (A,d) 到复形 (A',d') 的链映射，记为 $f: A \to A'$，或 $A \xrightarrow{f} A'$，也称 f 为复形映（态）射.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A_{n+1}' \arrow[r, "d_{n+1}'"] & A_n' \arrow[r, "d_n'"] & A_{n-1}' \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

图 1　复形链映射交换图

用 ${}_R\mathscr{M}$ 中同态合成定义链映射的合成，则得到 1 个范畴，它以复形为对象，以链映射为态射，称为 ${}_R\mathscr{M}$ 上复形范畴，记为 C_{omp} 或 $C_{omp}({}_R\mathscr{M})$.

命题 4　复形 A 为正合列 $\Leftrightarrow H_n(A) = 0$ 且 d_n 是 k-正则，$\forall n \in \mathbf{Z}$.

证（必要性）　由复形为正合列知，$\equiv_{d_{n+1}(A_{n+1})} = \rho_{\ker d_n}$，因而 $\forall [a_n] \in H_n(A) \Rightarrow (a_n, 0) \in \rho_{\ker d_n} = \equiv_{d_{n+1}(A_{n+1})} \Rightarrow a_n \equiv_{d_{n+1}(A_{n+1})} 0 \Rightarrow [a_n] = [0] \Rightarrow H_n(A) = 0$，而 $\forall a_n, a_n' \in A_n$，满足 $d_n(a_n) = d_n(a_n')$，即 $(a_n, a_n') \in \rho_{\ker d_n} \equiv_{d_{n+1}(A_{n+1})} \Rightarrow a_n + d_{n+1}(a_{n+1}) = a_n' + d_{n+1}(a_{n+1}')$，其中 $d_{n+1}(a_{n+1}) \in \ker d_n$，$d_{n+1}(a_{n+1}') \in \ker d_n$，即 d_n 是 k-正则.

（充分性）　$\forall (a_n, a_n') \in \rho_{\ker d_n} \Rightarrow d_n(a_n) = d_n(a_n')$，由 d_n 是 k-正则知，$a_n + b_n = a_n' + b_n'$，其中 $b_n, b_n' \in \ker d_n$. 又 $H_n(A) = \ker d_n / d_{n+1}(A_{n+1}) = 0 \Rightarrow [b_n] = [b_n'] = [0] \Rightarrow b_n + d_{n+1}(c_1) = d_{n+1}(c_2)$，$b_n' + d_{n+1}(c_1') = d_{n+1}(c_2')$，其中 $c_1, c_2, c_1', c_2' \in A_{n+1}$，在 $a_n + b_n = a_n' + b_n'$ 两边同时加上 $d_{n+1}(c_1) + d_{n+1}(c_1')$ 得

$a_n + d_{n+1}(c_2) + d_{n+1}(c_1') = a_n' + d_{n+1}(c_2') + d_{n+1}(c_1) \Rightarrow a_n \equiv_{d_{n+1}(A_{n+1})} a_n' \Rightarrow \rho_{\ker d_n} \subseteq \equiv_{d_{n+1}(A_{n+1})}$，故复形 A 为正合列.

推论 1　k-正则复形 A 为正合列 $\Leftrightarrow H_n(A) = 0$（$\forall n \in \mathbf{Z}$）.

定义 6　设 (A,d) 为 $({}_R\mathscr{M})$ 复形，若 $H_n(A) = 0$，$\forall n \in \mathbf{Z}$，则称 (A,d) 为零调复形.

零调复形不一定是正合列，但当复形为正合列时，一定零调. 特别地，零调的 k-正则复形一定是正合列.

由定义 5 知，链映射 $f = \{f_n\}$ 为复形的同构 $\Leftrightarrow f_n$ 为同构，$\forall n \in \mathbf{Z}$.

在可消半模范畴中，任意半模 M 的可消内射分解 $E = 0 \to M \to E^0 \to E^1 \to E^2 \to \cdots \to E^n \to \cdots$（左边可无限地补“0”）是零调复形.

命题 5　设 (A,d) 为 $({}_R\mathscr{M})$ 复形，$F: {}_R\mathscr{M} \to {}_S\mathscr{M}$ 为加法共变函子（或者反变函子），则 $F(A) = \cdots \to F(A_{n+1}) \xrightarrow{Fd_{n+1}} F(A_n) \xrightarrow{Fd_n} F(A_{n-1}) \to \cdots$（当 F 共变时）（$F(A) = \cdots \to F(A_{n-1}) \xrightarrow{Fd_n} F(A_n) \xrightarrow{Fd_{n+1}} F(A_{n+1}) \to \cdots \equiv \cdots \to B^{-n+1} \xrightarrow{Fd_n} B^{-n} \xrightarrow{Fd_{n+1}} B^{-n-1} \to \cdots$（当 F 反变时），其中 $B^{-n} \equiv F(A_n)$）必是 ${}_S\mathscr{M}$ 复形，因此 $F: C_{omp}({}_R\mathscr{M}) \to C_{omp}({}_R\mathscr{M})$ 仍为加法共变（反变）函子（$C_{omp}({}_R\mathscr{M})$ 中零对象 $\cdots \to 0 \to 0 \to 0 \to \cdots$，零态射 $0 = \{0\}$）.

证　当 F 共变时，由 $Fd_jFd_{j+1} = F(d_jd_{j+1}) = F(0) = 0$ 即得. 当 F 反变时，由 $Fd_{j+1}Fd_j = F(d_jd_{j+1}) = F(0) = 0$ 即得.

定义 7　设 $f: A \to A'$ 为链映射，定义 $f_* \equiv H_n(f): H_n(A) \to H_n(A')$，$[a_n] \mapsto [f_n(a_n)]$，则 f_* 为 ${}_R\mathscr{M}$ 中同态，称之为由 f 诱导的同态（映射）.

2　主要结论

定理 1　对任意给定的 $n \in \mathbf{Z}$，$H_n: C_{omp}({}_R\mathscr{M}) \to {}_R\mathscr{M}$ 为加法共变函子，记 $H = \{H_n\}$，称之为同调函子.

证　只需证 f_* 为完全确定的. 事实上，由 $f: (A,d) \to (A',d')$ 为链映射知有交换图 2.

$$\begin{tikzcd}
A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "②"] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "①"] & A_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"'] \\
A_{n+1}' \arrow[r, "d_{n+1}'"] & A_n' \arrow[r, "d_n'"] & A_{n-1}'
\end{tikzcd}$$

图 2　链映射交换图

（i）先证 $f_n(Z_n(A)) \subseteq Z_n(A')$. $\forall a_n \in Z_n(A) = \ker d_n \Rightarrow d_n(a_n) = 0$，由图 2 中的 ① 可交换得 $d_n'f_n(a_n) = f_{n-1}d_n(a_n) = 0 \Rightarrow f_n(a_n) \in \ker d_n' = Z_n(A')$.

（ii）若 $[a_n] = [a_n'] \in H_n(A) \Rightarrow a_n \equiv_{d_{n+1}(A_{n+1})} a_n' \Rightarrow a_n + d_{n+1}(a_{n+1}) = a_n' + d_{n+1}(a_{n+1}')$，用 f_n 作用得 $f_n(a_n) + f_nd_{n+1}(a_{n+1}) = f_n(a_n') + f_nd_{n+1}(a_{n+1}')$，由图 2 中的 ② 可交换得

$f_n(a_n) + d_{n+1}'f_{n+1}(a_{n+1}) = f_n(a_n') + d_{n+1}'f_{n+1}(a_{n+1}') \Rightarrow$
$f_n(a_n) \equiv_{d_{n+1}'(A_{n+1}')} f_n(a_n') \Rightarrow [f_n(a_n)] = [f_n(a_n')]$.

定义8 设(A,d)为$({}_R\mathscr{M})$复形,(A',d')满足$A_n' < A_n$(即A_n'为A_n的子R-半模)且$d_n' = d_n|_{A_n'}$,则称(A',d')为(A,d)的子复形,记$(A',d') < (A,d)$. 设(A',d')为(A,d)的子复形,若A_n'是A_n的可减子半模,$\forall n \in \mathbf{Z}$,则称(A',d')为(A,d)的可减子复形. 称$A/A' = \cdots \to A_n/A_n' \xrightarrow{\bar{d}_n} A_{n-1}/A_{n-1}' \to \cdots$为$A_n$对于$A_n'$的商复形,其中$\bar{d}_n: a_n + A_n' \mapsto d_n(a_n) + A_{n-1}'$, $\forall a_n \in A_n$.

下面验证$\bar{d}_n$的合理性. $\forall [a_n] = [a_n'] \in A_n/A_n' \Rightarrow a_n + a_n'' = a_n' + a_n'''$, $\exists a_n'', a_n''' \in A_n' \Rightarrow d_n(a_n) + d_n(a_n'') = d_n(a_n') + d_n(a_n''')$, $d_n(a_n''), d_n(a_n''') \in A_{n-1}' \Rightarrow d_n(a_n) \equiv_{A_{n-1}'} d_n(a_n') \Rightarrow [d_n(a_n)] = [d_n(a_n')]$.

设$f: (A,d) \to (B,\partial)$为复形的链映射,记

$\ker f = \cdots \to \ker f_n \xrightarrow{d_n} \ker f_{n-1} \to \cdots (d_n = d_n|_{\ker f_n})$,

$f(A) = \cdots \to f_n(A_n) \xrightarrow{\partial_n} f_{n-1}(A_{n-1}) \to \cdots (\partial_n = \partial_n|_{f_n(A_n)})$,

$\mathrm{Coker}\ f = B/f(A) = \cdots \to B_n/f_n(A_n) \xrightarrow{\bar{\partial}_n} B_{n-1}/f_{n-1}(A_{n-1}) \to \cdots$($\bar{\partial}_n$由$\partial_n$诱导)

分别称为链映射f的核、象与上核.

若有复形链映射列$\cdots \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \cdots$使$\equiv_{f(A)} = \rho_{\ker g}$,则称此列在$B$处正合,处处正合的列称为复形正合列. 形如$O \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to O \cdots$($O$表零调复形,即$\cdots \to 0 \to 0 \to 0 \cdots$)的复形正合列且$g$为满同态,则称该正合列为复形短正合列.

定理2(连接同态定理) 设$O \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to O$为${}_R\mathscr{M}$中复形短正合列,且$i(A)$是$B$的可减子复形,则对一切$n$都有${}_R\mathscr{M}$的同态(即连接同态)$\partial_n$: $H_n(C) \to H_{n-1}(A)$, $[c_n] \mapsto [i_{n-1}^{(-1)} d_{B,n} p_n^{(-1)}(c_n)]$,其中$d_{B,n}$表示$B$的第$n$个边缘算子$d_{B,n}: B_n \to B_{n-1}$, $x^{(-1)}$表示沿同态x箭头相反方向的图追踪.

证 由已知得图3.

$$\begin{tikzcd}
 & & B_{n+1} \arrow[r, "p_{n+1}"] \arrow[d, "d_{B,n+1}"] \arrow[dr, phantom, "③"] & C_{n+1} \arrow[d, "d_{C,n+1}"] \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "d_{A,n}"] \arrow[dr, phantom, "②"] & B_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "d_{B,n}"] \arrow[dr, phantom, "①"] & C_n \arrow[d, "d_{C,n}"] \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "d_{A,n-1}"] \arrow[dr, phantom, "④"] & B_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}"] \arrow[d, "d_{B,n-1}"] & C_{n-1} \\
 & A_{n-2} \arrow[r, "i_{n-2}"] & B_{n-2} &
\end{tikzcd}$$

图3 行正合交换图

$\forall [c_n] \in H_n(C)$,其中$c_n \in \ker d_{C,n} < C_n$,由$p_n$为满同态,$\exists b_n \in B_n$, $p_n(b_n) = c_n$,用$d_{C,n}$作用得$d_{C,n}p_n(b_n) = d_{C,n}(c_n) = 0$,由图3中①的可交换得$p_{n-1}d_{B,n}(b_n) = d_{C,n}p_n(b_n) = 0 \Rightarrow (d_{B,n}(b_n), 0) \in \rho_{\ker p_{n-1}}$,且$B_{n-1}$处行正合,即$\rho_{\ker p_{n-1}} = \equiv_{i_{n-1}(A_{n-1})}$,则$(d_{B,n}(b_n), 0) \in \equiv_{i_{n-1}(A_{n-1})} \Rightarrow \exists a_{n-1}', a_{n-1}'' \in A_{n-1}$, $d_{B,n}(b_n) + i_{n-1}(a_{n-1}') = i_{n-1}(a_{n-1}'')$,又$i_{n-1}(A_{n-1})$是$B_{n-1}$的可减子半模,则$d_{B,n}(b_n) \in i_{n-1}(A_{n-1})$,而$i_{n-1}$为单同态,则存在唯一的$a_{n-1} \in A_{n-1}$, $i_{n-1}(a_{n-1}) = d_{B,n}(b_n)$.

下面需要证明:

(i) 上述的$a_{n-1} \in \ker d_{A,n-1}$,因而$[a_{n-1}] \in H_{n-1}(A)$. 事实上,由图3中④的可交换得$i_{n-2}d_{A,n-1}(a_{n-1}) = d_{B,n-1}i_{n-1}(a_{n-1}) = d_{B,n-1}d_{B,n}(b_n)$,又由$B$为复形得$i_{n-2}d_{A,n-1}(a_{n-1}) = d_{B,n-1}d_{B,n}(b_n) = 0$,而$i_{n-2}$为单同态,则$d_{A,n-1}(a_{n-1}) = 0$.

(ii) $c_n \mapsto a_{n-1}$是完全确定的(与b_n选取无关). 只需证当$[c_n] = [c_n']$时,$[i_{n-1}^{(-1)} d_{B,n} p_n^{(-1)}(c_n)] = [i_{n-1}^{(-1)} d_{B,n} p_n^{(-1)}(c_n')]$,其中$p_n(b_n) = c_n$, $p_n(b_n') = c_n'$, $i_{n-1}(a_{n-1}) = d_{B,n}(b_n)$, $i_{n-1}(a_{n-1}') = d_{B,n}(b_n')$.

事实上,$[c_n] = [c_n'] \Rightarrow \exists c_{n+1}, c_{n+1}' \in C_{n+1}$, $c_n + d_{C,n+1}(c_{n+1}) = c_n' + d_{C,n+1}(c_{n+1}')$. 由$p_{n+1}$为满同态知,$\exists b_{n+1}, b_{n+1}' \in B_{n+1}$, $p_n(b_n) + d_{C,n+1}p_{n+1}(b_{n+1}) = p_n(b_n') + d_{C,n+1}p_{n+1}(b_{n+1}')$. 由图3中③的可交换得$p_n(b_n) + p_n d_{B,n+1}(b_{n+1}) = p_n(b_n') + p_n d_{B,n+1}(b_{n+1}') \Rightarrow (b_n + d_{B,n+1}(b_{n+1}), b_n' + d_{B,n+1}(b_{n+1}')) \in \rho_{\ker p_n}$. 而$B_n$处行正合,即$\rho_{\ker p_n} = \equiv_{i_n(A_n)} \Rightarrow (b_n + d_{B,n+1}(b_{n+1}), b_n' + d_{B,n+1}(b_{n+1}')) \in \equiv_{i_n(A_n)} \Rightarrow \exists a_n', a_n'' \in A_n$, $b_n + d_{B,n+1}(b_{n+1}) + i_n(a_n') = b_n' + d_{B,n+1}(b_{n+1}') + i_n(a_n'')$,用$d_{B,n}$作用得$d_{B,n}(b_n) + d_{B,n}d_{B,n+1}(b_{n+1}) + d_{B,n}i_n(a_n') = d_{B,n}(b_n') + d_{B,n}d_{B,n+1}(b_{n+1}') + d_{B,n}i_n(a_n'')$. 又$B$为复形,即$d_{B,n}d_{B,n+1} = 0$,于是有$d_{B,n}(b_n) + d_{B,n}i_n(a_n') = d_{B,n}(b_n') + d_{B,n}i_n(a_n'')$. 由图3中②可交换得$i_{n-1}(a_{n-1}) + i_{n-1}d_{A,n}(a_n') = i_{n-1}(a_{n-1}') + i_{n-1}d_{A,n}(a_n'')$. 由$i_{n-1}$为单同态得$a_{n-1} + d_{A,n}(a_n') = a_{n-1}' + d_{A,n}(a_n'') \Rightarrow a_{n-1} \equiv_{d_{A,n}(A_n)} a_{n-1}' \Rightarrow [a_{n-1}] = [a_{n-1}']$.

定理3 设$O \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to O$为${}_R\mathscr{M}$中复形的短正合列,其中$B$为$k$-正则复形,且$i(A)$是$B$的可减子复形,则

(i) 有${}_R\mathscr{M}$中长复形$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{p_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \xrightarrow{p_*} H_{n-1}(C) \to \cdots$,其中$\partial$为连接同态(见图4),该复形在$H_n(C)$处正合.

$$\begin{tikzcd} H(A) \arrow[rr, "i_*"] & & H(B) \arrow[dl, "p_*"] \\ & H(C) \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

图 4　足码螺旋式下降的复形三角形

(ii) 连接同态 ∂ 是自然的,若有如图 5 所示的交换图,则有带复形行的 $_R\mathscr{M}$ 交换图(见图 6).

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "①"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "②"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & O \\ O \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "p'"] & C' \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

图 5　带正合行的复形交换图

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] \arrow[dr, phantom, "①"] & H_n(B) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "g_*"] \arrow[dr, phantom, "②"] & H_n(C) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h_*"] \arrow[dr, phantom, "③"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_n(A') \arrow[r, "i'_*"] & H_n(B') \arrow[r, "p'_*"] & H_n(C') \arrow[r, "\partial'"] & H_{n-1}(A') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

图 6　带复形行的 $_R\mathscr{M}$ 交换图

证　(i) 先证 $\equiv_{i_*(H_n(A))} \subseteq \rho_{\ker p_*}$. 事实上, $\forall([b_n],[b_n']) \in \equiv_{i_*(H_n(A))} \Rightarrow \exists [a_n],[a_n'] \in H_n(A)$, $[b_n] + i_*([a_n]) = [b_n'] + i_*([a_n'])$, 从而, $p_* i_*([a_n]) = [p_n i_n(a_n)] = [0] \Rightarrow p_*([b_n]) = p_*([b_n] + i_*([a_n])) = p_*([b_n'] + i_*([a_n'])) = p_*([b_n']) \Rightarrow ([b_n],[b_n']) \in \rho_{\ker p_*}$.

然后证 $\equiv_{p_*(H_n(B))} \subseteq \rho_{\ker \partial_n}$. 事实上, $\forall([c_n],[c_n']) \in \equiv_{p_*(H_n(B))} \Rightarrow \exists [b_n],[b_n'] \in H_n(B)$, $[c_n] + p_*([b_n]) = [c_n'] + p_*([b_n'])$, 而 $\partial_n p_*([b_n]) = \partial_n([p_n(b_n)]) = [i_{n-1}^{(-1)} d_{B,n} p_n^{(-1)} p_n(b_n)] = [i_{n-1}^{(-1)} \cdot d_{B,n}(b_n)] = [0]$ (由 $b_n \in \ker d_{B,n}$) $\Rightarrow \partial_n([c_n]) = \partial_n([c_n'])$.

再证 $\equiv_{\partial(H_n(C))} \subseteq \rho_{\ker i_*}$. 事实上, $\forall([a_{n-1}],[a_{n-1}']) \in \equiv_{\partial(H_n(C))} \Rightarrow \exists [c_n],[c_n'] \in H_n(C)$, $[a_{n-1}] + \partial([c_n]) = [a_{n-1}'] + \partial([c_n'])$, 而 $i_* \partial([c_n]) = [i_{n-1} i_{n-1}^{(-1)} d_{B,n} p_n^{(-1)}(c_n)] = [d_{B,n} p_n^{(-1)}(c_n)] = 0 \Rightarrow i_*([a_{n-1}]) = i_*([a_{n-1}']) \Rightarrow ([a_{n-1}],[a_{n-1}']) \in \rho_{\ker i_*}$.

最后证 $H_n(C)$ 处正合,即 $\equiv_{p_*(H_n(B))} = \rho_{\ker \partial_n}$. 只需再证 $\rho_{\ker \partial_n} \subseteq \equiv_{p_*(H_n(B))}$. 事实上, $\forall([c_n],[c_n']) \in \rho_{\ker \partial_n}$, $\partial_n([c_n]) = \partial_n([c_n']) \Rightarrow [i_{n-1}^{(-1)} d_{B,n} p_n^{(-1)}(c_n)] = [i_{n-1}^{(-1)} d_{B,n} p_n^{(-1)}(c_n')] \Rightarrow \exists a_n, a_n' \in A_n$, $i_{n-1}^{(-1)} d_{B,n} p_n^{(-1)}(c_n) + d_{A,n}(a_n) = i_{n-1}^{(-1)} d_{B,n} p_n^{(-1)}(c_n') + d_{A,n}(a_n') \Rightarrow d_{B,n} p_n^{(-1)}(c_n) + i_{n-1} d_{A,n}(a_n) = d_{B,n} p_n^{(-1)}(c_n') + i_{n-1} d_{A,n}(a_n')$. 由图 3 中 ② 可交换得 $d_{B,n} p_n^{(-1)}(c_n) + d_{B,n} i_n(a_n) = d_{B,n} p_n^{(-1)}(c_n') + d_{B,n} i_n(a_n')$, 又由 $d_{B,n}$ k-正则得 $p_n^{(-1)}(c_n) + i_n(a_n) + b_n = p_n^{(-1)}(c_n') + i_n(a_n') + b_n'$, 其中 $b_n, b_n' \in \ker d_{B,n}$. 用 p_n 作用得 $c_n + p_n i_n(a_n) + p_n(b_n) = c_n' + p_n i_n(a_n') + p_n(b_n') \Rightarrow c_n + p_n(b_n) = c_n' + p_n(b_n') \Rightarrow [c_n] + p_*[b_n] = [c_n'] + p_*[b_n'] \Rightarrow ([c_n],[c_n']) \in \equiv_{p_*(H_n(B))}$.

(ii) 图 5 中的 ①② 为交换图, H_n 为共变函子 $\Rightarrow$ 图 6 中的 ①② 为交换图. 下证图 6 中的 ③ 为交换图. 事实上, $\forall [c_n] \in H_n(C)$, 其中 $c_n \in \ker d_{C,n}$, 由 p_n 为满同态知, $\exists b_n \in B_n$, $p_n(b_n) = c_n$, $d_{B,n}(b_n) = i_{n-1}(a_{n-1})$. 用 h_n 作用及由图 5 中的 ② 可交换得

$$p_n' g_n(b_n) = h_n p_n(b_n) = h_n(c_n). \tag{1}$$

用 g_{n-1} 作用 $d_{B,n}(b_n) = i_{n-1}(a_{n-1})$ 得

$$i_{n-1}' f_{n-1}(a_{n-1}) = g_{n-1} i_{n-1}(a_{n-1}) = g_{n-1} d_{B,n}(b_n) = d_{B',n} g_n(b_n) \Rightarrow i_{n-1}' f_{n-1}(a_{n-1}) = d_{B',n} g_n(b_n). \tag{2}$$

由(1)式和(2)式得

$f_* \partial([c_n]) = f_*([a_{n-1}]) = [f_{n-1}(a_{n-1})]$,

$\partial' h_*([c_n]) = \partial'([h_n(c_n)]) = \partial'([p_n' g_n(b_n)]) = [i_{n-1}'^{(-1)} d_{B',n} g_n(b_n)] = [f_{n-1}(a_{n-1})]$,

故 $f_* \partial = \partial' h_*$.

推论 2　同构的复形必是同调的.

3　结论

环模上的同调理论和方法已经非常成熟,其研究成果也十分丰富,使得环模的研究达到了一个新的高度. 借鉴这一思想,在半模范畴中建立同调理论十分有意义和必要,而要建立同调理论,首先必须建立复形的连接同态和复形同调的长正合列定理,本文在一定的条件下给出了半模复形的连接同态并得到了半模复形同调长正合列定理,为建立半模范畴中的同调理论提供了有益的方法和基础.

4　参考文献

[1] Dao Hailong, Schweig J. Projective dimension, graph domination parameters, and independence complex homology [J]. Journal of Combinatorial Theory: Series A, 2013, 120(2): 453-469.

[2] Bagdasar O D, Larcombe P J. On the characterization of periodic complex horadam sequences [J]. The Fibonacci Quarterly, 2013, 51(1): 28-37.

[3] Patchkoria A. On exactness of long sequences of homology semimodules [J]. Journal of Homotopy and Related Structures, 2006, 1(1): 229-243.

[4] Chaudhari J N, Bonde D R. On subtractive extension of subsemimodules of semimodules [J]. Journal of the Chungcheong Mathematical Society, 2013, 26(1): 37-44.

[5] David W,Marianne J,Mark K. Exact rings and semirings [J]. Journal of Algebra,2013,388(4):324-337.
[6] Al-Thani H M J. Flat semimodules [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,2004(17):873-880.
[7] Al-Thani H M J. Characterizations of projective and K-projective semimodules [J]. Kobe J Math,2002,32(7):439-448.
[8] Katsov Y. On flat semimodules over semirings [J]. Algebra Univers,2004,51(2/3):287-299.
[9] Katsov Y. Tensor products and injective envelopes of semimodules over additively regular semirings [J]. Algebra Colloquium,1997,4(2):121-131.
[10] Bhambri S K,Dubey M K. Extensions of semimodules and injective semimodules [J]. Southeast Asian Bull Math,2010,34(1):25-41.
[11] Golan J S. The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science [M]. Exxes: Longman Scientific and Technical,1999.
[12] Tan Yijia. Bases in semimodules over commutative semirings [J]. Linear Algebra and its Applications,2014,443(1):139-152
[13] Briec W,Horvath C. On the separation of convex sets in some idempotent semimodules [J]. Linear Algebra and Its Applications,2011,435(7):1542-1548.
[14] 甘爱萍,黄福生,陈培慈. 半模短正合列 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2003,27(2):131-134.
[15] 陈培慈,周媛兰. 半模的张量积 [J]. 数学学报,2002,45(1):139-150.
[16] 王琦,王建文,黄福生. 可补半环上的内射半模与投射半模 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2006,30(5):466-469.
[17] 曾慧平,黄福生,肖贤民. 非零 i-内射半模的存在性 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2009,33(4):494-497.

Some Studies of Homology Theory on Semimodule Complex

XU Di,HUANG Fusheng*,LI Yang,JIANG Xiaoxia
(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: In the category of semimodules,the concept of semimodule complex and chain mapping and complex homology functor are defined in view of congruence using the idea of universal algebra,for the addition of the semiring and semimodule are no inverse operation,also a condition of complex to be exact sequences is given. The connecting homomorphism theorem is extended to the semimodules under certain conditions,and got the weakly long exact sequence theorem of semimodules complex.

Key words: the exact sequences of semimodules; complex; connecting homomorphism

(责任编辑:曾剑锋)