文章编号:1000-5862(2016)03-0268-04

关于单叶限制值的正规定理

孙道椿[1],柴富杰[2]
(1. 华南师范大学数学科学学院,广东 广州 510631;2. 广州民航职业技术学院人文社科学院,广东 广州 510403)

摘要: 应用 Ahlfors 覆盖曲面理论,研究了涉及限制值的亚纯函数族的正规定理,得到涉及单叶岛的正规定理和涉及单叶限制值的正规定理,推广了著名的 Ahlfors 的五岛定理与 Nevanlinna 五单值定理.

关键词: 亚纯函数;正规族;覆盖曲面;岛;单叶限制值
中图分类号: O 174.52　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.03.10

0 引言和结果

本文所使用的符号和术语,除特别说明外均可参见文献[1-4].

设 V 是直径为 1 的 Riemann 球面,本文中认为扩充复平面 $\hat{\mathbf{C}}$ 与 V 是等同的,并且在使用的时候不加区分. 设 F 是 $\hat{\mathbf{C}}$ 的有限连通覆盖曲面,其边界 ∂F 由有限条解析 Jordan 曲线组成,∂F 的长度记为 L. 设区域 $D\subset\hat{\mathbf{C}}$ 是一个 Jordan 区域,用 $|D|$ 表示区域 D 的球面面积. 记 F 盖在 D 上的部分为 $F(D)$. 分别称

$$S=|F|/|V|=|F|/\pi,S(D)=|F(D)|/|D|$$

为 F 对 V 和 D 的平均覆盖次数. 设 $F(D)$ 由有限个连通曲面 $\{F_k(D)\}$ 组成. 若 $F_k(D)\in\{F_k(D)\}$ 没有对 D 的相对边界,则称之为岛,记为 $F_k^i(D)$;否则称之为半岛,记为 $F_k^p(D)$. 设 G 是复平面上区域 D 内的一族亚纯函数. 如果 G 中的任何一列函数都含有一个在 D 内按球面距离内闭一致收敛的子列,则称函数族 G 在区域 D 内正规. 极限函数或者是一亚纯函数,或者恒为无穷[5-7]. 关于单叶岛的正规定则,Ahlfors 曾得到如下著名的五岛定理.

定理 A[8]　设 $D_v,v=1,\cdots,5$ 是 Riemann 球面 $\hat{\mathbf{C}}$ 上的 5 个单连通区域,它们的边界由分段解析的曲线组成,并且它们的闭包互不相交. $U\subset\mathbf{C}$ 是一个平面区域,$G_A(U)=G_A(U,\{D_v\}_{v=1}^5)$ 表示所有定义在 U 上的并且在 D_v 上没有单叶岛的亚纯函数所组成的函数族,则 $G_A(U,\{D_v\}_{v=1}^5)$ 是正规的.

A. Bloch[9] 和 G. Valiron[10] 分别应用 Nevanlinna 理论[1,11] 得到了如下与 Ahlfors 五岛定理相应的 Nevanlinna 五单值定理.

定理 B　设 $a_v,v=1,\cdots,5$ 表示 Riemann 球面 $\hat{\mathbf{C}}$ 上的 5 个相互判别的点. $U\subset\mathbf{C}$ 是一个平面区域,$G_N(U)=G_N(U,\{a_v\}_{v=1}^5)$ 表示所有定义在 U 上的并且没有单叶 a_v-值点的亚纯函数所组成的函数族,则 $G_N(U,\{a_v\}_{v=1}^5)$ 是正规的.

根据文献[12-13]可知,定理 A 与定理 B 实际上是等价的. 本文推广了定理 A 与定理 B,得到了一个更为普遍的关于单叶岛的正规定理和一个关于单叶限制值正规定理.

定理 1　设 $D_v,v=1,\cdots,5$ 是 Riemann 球面 $\hat{\mathbf{C}}$ 上的 5 个圆盘,并且它们的闭包互不相交. $U\subset\mathbf{C}$ 是一个平面区域,G 是定义在 U 上的亚纯函数族. 如果 $\forall f\in G,f(U)$ 在 $\{D_v\}_{v=1}^5$ 上至多有 1 个单叶岛,则 G 在 U 上正规.

定理 2　若区域 U 上的亚纯函数族 G 存在 5 个不同的单叶限制值,则 G 在 U 上正规.

为了叙述的方便,先给出亚纯函数的单叶分担值和单叶限制值的定义.

定义 1　设 $G=\{f\}$ 是定义在 U 上的一个亚纯函数族,$a\in\mathbf{C}$ 是一个复数. 对于 $f\in G,\eta\geqslant0$,记离散集合

$$E(\eta,f=a):=\{z_0\in U_\eta;f(z_0)=a,f'(z_0)\neq0\},$$

$$E(\eta,G=a):=\bigcup_{f\in G}E(\eta,f=a).$$

若 $\forall f\in G$,恒有 $E(0,f=a)=E(0,G=a)$,则称 a 是 G 的一个单叶分担值. 若 $\forall\eta>0$,恒有 $\#E(\eta,G=a)<\infty$,则称 a 是 G 的一个单叶限制值(其中 $\#E$ 表示集合 E 中含有元素的个数).

由于 $\forall\eta>0,\forall a\in\hat{\mathbf{C}}$ 以及 $\forall f\in G$,在 $E(\eta,f=a)$ 中仅含有限个单叶复数,故 G 的单叶分担值必为 G 的单叶限制值. 由定理 1 立即得到如下推论.

收稿日期:2016-03-10
基金项目:国家自然科学基金(11171013,11371225,11301091)资助项目.
作者简介:孙道椿(1943-),男,江西南昌人,教授,博士生导师,主要从事复分析和随机级数研究.

推论 1　若在 U 上的亚纯函数族 G 存在 5 个不同的单叶分担值,则 G 在 U 上正规.

另外,由于单叶例外值,必是单叶分担值,从而也是单叶限制值,因此定理 B 也是定理 1 的直接推论.

1　Ahlfors 关于岛的不等式

设 $D_v, v = 1, \cdots, q$ 是 Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的 q 个圆盘,它们的闭包两两之间的距离不小于 $\delta \in (0, 1/2)$. 记 $F_0 = V - \bigcup_{v=1}^{q} D_v$,则 $\rho(F_0) = q - 2$. 先给出 Ahlfors 的 2 个基本不等式.

引理 1[14]　设 F 是 F_0 的一个有限覆盖曲面,则对任何区域 $D \subset F_0$,有

$$|S - S(D)| < \pi^2 L/(|D|\delta),$$

其中 L 是 F 的相对边界长度.

引理 2[14]　设 F 是 F_0 的一个有限覆盖曲面,则

$$\rho^+(F) > \rho(F_0)S - 2^5\pi^2 L/\delta^3.$$

为证明本文的主要结论,首先改进 Ahlfors 关于岛的不等式,得到引理 3.

引理 3　设 $D_v, v = 1, \cdots, q$ 是 Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的 q 个圆盘,并且它们的闭包两两之间的距离不小于 $\delta \in (0, 1/2)$. F 是 Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的有限单连通覆盖曲面,n_v 是岛集 $F(D_v)$ 中含单连通岛的个数,则有

$$\left(\sum_{v=1}^{q} n_v - 1\right)^+ > (q - 2)S - hL,$$

其中 h 是仅与 $F_0 = V - \sum_{v=1}^{q} D_v$ 有关的非负实常数,L 是 F 的相对边界长度.

证　当 $q \leqslant 2$ 时结论显然成立. 以下假定 $q \geqslant 3$.

设 F^p 是一个半岛. 先证明从曲面 F 上挖去 F^p 之后剩下的部分 $F - F^p$ 必定全是一些单连通的曲面. 设 X 是 $F - F^p$ 中的一个连通曲面. 在 X 中任取一条简单闭曲线 $L \subset X \subset F$,L 的内部记为 D_L. 由于 F 是单连通的,所以 $D_L \subset F$. 因此 D_L 中不会含有 F 的边界点,即 $D_L \cap \partial F = \varnothing$. 另一方面,由于半岛 F^p 含有相对边界,故在 L 的外部必含有 F^p 的点. 由 F^p 连通性可知半岛 F^p 全在 L 的外部,因此在 L 的内部也不含 F^p 的边界点,即 $D_L \cap F^p = \varnothing$. 由于 $\partial X \subset \partial F \cup \partial F^p$,因此在 L 的内部不含 X 的边界点,这就说明 X 是单连通的.

记从 F 中挖掉 $\{D_v\}_{v=1}^{q}$ 上所有的半岛 $\{F_j^p(D_v)\}$ 之后所剩下的部分为 F',则根据前面的讨论,可设 $F' = F - \sum_{v=1}^{q}\sum_{j} F_j^p(D_v)$ 是由 $N = N(F') \geqslant 1$ 个单连通曲面 $\{F'_t\}_{t=1}^{N}$ 组成. 它的 Euler 特征数为

$$\rho(F') = \sum_{t=1}^{N}\rho(F'_t) = -N(F').$$

再从每个单连通曲面 F'_t 中挖去岛 $\{F_j^i(D_v)\}$. 注意,如果一个岛 $F_j^i(D_v)$ 是单连通的,则 $\rho(F_j^i(D_v)) = -1 = \rho^+(F_j^i(D_v)) - 1$;若 $F_j^i(D_v)$ 是多连通的,则 $\rho(F_j^i(D_v)) = \rho^+(F_j^i(D_v))$. 记 $F_t^* = F'_t - \{F_j^i(D_v)\}$,则 F_t^* 是由若干连通曲面 $F_{t\mu}^*$ 组成. 设 $\{F_{t\mu}^*\}$ 中有 $N(F_t^*)$ 个连通曲面是单连通的. 由于岛不含 F'_t 的边界,因此从 F'_t 中挖去岛后的割口均是不接触边界的“环”. 用 n_v 表示 $F(D_v)$ 中单连通岛的个数,则它们的 Euler 特征数应满足

$$-N(F') = \left[\sum_{v=1}^{q}\sum_{j}\rho^+(F_j^i(D_v)) - \sum_{v=1}^{q} n_v\right] + \left[\sum_{t=1}^{N}\sum_{\mu}\rho^+(F_{t\mu}^*) - \sum_{t=1}^{N} N(F_t^*)\right].$$

由于 $\sum_{v=1}^{q}\sum_{j}\rho^+(F_j^i(D_v)) \geqslant 0$,故可得

$$\sum_{v=1}^{q} n_v \geqslant \sum_{t=1}^{N}\sum_{\mu}\rho^+(F_{t\mu}^*) + N(F') - \sum_{t=1}^{N} N(F_t^*). \tag{1}$$

下面估计 $\{F_{t\mu}^*\}$ 中的单连通曲面的个数 $N(F_t^*)$.

(i) 若每个曲面 F'_t 在 $\{D_v\}$ 上均没有岛,即 $\sum_{v=1}^{q} n_v = 0$,这时 $F'_t = F_t^* = F_{t\mu}^*$,于是

$$N(F') = \sum_{t=1}^{N} N(F_t^*) = N, \rho(F_{t\mu}^*) = -1,$$

$$\sum_{t=1}^{N}\sum_{\mu}\rho^+(F_{t\mu}^*) = 0.$$

(ii) 若至少有一个曲面 F'_t 在 $\{D_v\}$ 上有岛,则对任何一个有岛的曲面 F'_t,由于 F'_t 是单连通的,其边界 $\partial F'_t$ 是连通的,所以 $F_t^* = \{F_{t\mu}^*\}$ 中,仅有一曲面 $A \in \{F_{t\mu}^*\}$ 的边界 ∂A 包含 $\partial F'_t$,而 A 上因挖走了岛必然有“洞”,故 A 不是单连通的. 其余的曲面 $B \in \{F_{t\mu}^*\} - A$ 的边界 ∂B 与 $\partial F'_t$ 无公共点. 因此 B 对 F_0 的相对边界长 $L(F_0) = 0$. 由引理 2 可知 $\rho^+(B) \geqslant (q - 2)S(F_0) > 0$. 所以这些曲面都不是单连通的. 因此对任何一个有岛的曲面 F'_t,在 $\{F_{t\mu}^*\}$ 中没有单连通曲面. 这样在挖掉所有的岛之后,F' 中至少减少了一个单连通曲面,于是 $N(F') \geqslant \sum_{t=1}^{N} N(F_t^*) + 1$. 再结合(1)式便得到

$$\sum_{v=1}^{q} n_v - 1 \geqslant \sum_{t=1}^{N}\sum_{\mu}\rho^+(F_{t\mu}^*).$$

对每个曲面 $F_{t\mu}^*$ 应用引理 2,然后求和

$$\sum_{t=1}^{N}\sum_{\mu}\rho^+(F_{t\mu}^*) > (q - 2)\sum_{t=1}^{N}\sum_{\mu} S_{t\mu}(F_0) - \frac{2^5\pi^2}{\delta^3}\sum_{t=1}^{N}\sum_{\mu} L_{t\mu}(F_0) = (q - 2)S(F_0) - \frac{2^5\pi^2}{\delta^3}L(F_0), \tag{2}$$

其中

$$S_{t\mu}(F_0)=|F_{t\mu}^*|/|F_0|,$$

$$S(F_0)=\sum_{t=1}^{N}|F_t^*|/|F_0|=\sum_{t=1}^{N}\sum_{\mu}S_{t\mu}(F_0),$$

$L_{t\mu}(F_0)$ 是 $F_{t\mu}^*$ 对 F_0 的相对边界长,$L(F_0)=\sum_{t=1}^{N}\sum_{\mu}L_{t\mu}(F_0)$ 是 F 对 F_0 的相对边界长. 结合(2)式及引理1,并注意 $q(\delta/2)^2<|F_0|$ 便得到

$$\sum_{t=1}^{N}\sum_{\mu}\rho^+(F_{t\mu}^*)>(q-2)(S-\frac{\pi^2}{\delta|F_0|}L)-\frac{2^5\pi^2}{\delta^3}L>$$

$$(q-2)S-(\frac{q\pi^2}{\delta|F_0|}L+\frac{2^5\pi^2}{\delta^3})L>$$

$$(q-2)S-\frac{2^6\pi^2}{\delta^3}L.$$

结合(i)有

$$(q-2)S-\frac{2^6\pi^2}{\delta^3}L<0. \tag{3}$$

结合(ii)有

$$\sum_{v=1}^{q}n_v-1>(q-2)S-\frac{2^6\pi^2}{\delta^3}L. \tag{4}$$

在(4)式中取 $\sum_{v=1}^{q}n_v=1$,再结合(3)式即得引理3.

引理4 在引理3的条件下,令 n_v' 表示岛集 $F(D_v)$ 中的单叶单连通岛的个数,则有

$$(\sum_{v=1}^{q}n_v'-1)^+\geqslant(q-4)S-h_0L.$$

证 设 n_v'' 表示 $F(D_v)$ 中所含多叶单连通岛的个数,于是有

$$n_v=n_v'+n_v''=2n_v-n_v'.$$

由于对区域 D_v 的平均覆盖次数 $S(D_v)$ 必定满足

$$S(D_v)\geqslant n_v'+2n_v'',$$

所以根据引理1可以得到

$$S+hL\geqslant S(D_v)\geqslant 2n_v-n_v',$$

也即是

$$S+hL+n_v'\geqslant 2n_v.$$

对所有的 v 求和得到

$$qS+qhL+\sum_{v=1}^{q}n_v'\geqslant 2\sum_{v=1}^{q}n_v. \tag{5}$$

下面再应用引理3于(5)式,当 $\sum_{v=1}^{q}n_v\geqslant 1$ 时,

$$qS+qhL+\sum_{v=1}^{q}n_v'-2\geqslant$$

$$2(\sum_{v=1}^{q}n_v-1)\geqslant 2(q-2)S-hL,$$

整理后有

$$\sum_{v=1}^{q}n_v'\geqslant(q-4)S-h_1L. \tag{6}$$

当 $\sum_{v=1}^{q}n_v=0$ 时,有 $\sum_{v=1}^{q}n_v'=0$,于是

$$qS+qhL\geqslant 2(q-2)S-hL.$$

整理后有

$$(q-4)S-h_2L\leqslant 0. \tag{7}$$

结合(6)~(7)式,即得引理4.

引理5 设 $f=f(z)$ 为 $U:=\{z:|z|<R\}$ 内的亚纯函数,$D_v,v=1,2,\cdots,q(q\geqslant 3)$ 为球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的 q 个不同的单连通区域,其中 $n_v=n_v(R,D_v)$ 表示 $f(U)$ 盖成 D_v 上的单叶单连通岛的个数,则 $\forall r\in(0,R)$,有

$$(q-4)S(r,f)\leqslant(\sum_{j=1}^{v}n_v-1)^++\frac{2\pi^2h_0^2}{\ln R-\ln r}.$$

证 圆盘 $D_r:=\{z:|z|\leqslant r\}$ 的Euler特征数为

$$\rho(D_r)=-1.$$

从球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上挖去 q 个区域 $D_1,D_2,\cdots,D_q$,记剩下的部分为 F_0,则 $\rho(F_0)=q-2$. 从 D_r 上挖去区域 $D_1,D_2,\cdots,D_q$ 上所有的单叶单连通岛,记剩下的部分为 D_r^-,则 $F_r:=(D_r^-,f)$ 是 F_0 的有限覆盖,其Euler特征数

$$\rho(F_r)=\rho(D_r^-)=-1+\sum_{v=1}^{q}n_v(r,D_v)\leqslant -1+\sum_{v=1}^{q}n_v(R,D_v):=N.$$

由引理4得 $N^+\geqslant(q-4)S(r)-h_0L(r)$,也即是

$$L(r)\geqslant[(q-4)S(r)-N^+]h_0^{-1}.$$

下面分情况讨论.

(i) 若 $\forall t\in(r,R)$,恒有

$$(q-4)S(t)-N^+>0,$$

则将上式两边分别平方并应用Schwarz不等式得到

$$[(q-4)S(r)-N^+]^2h_0^{-2}\leqslant L^2(r)\leqslant 2\pi^2r\frac{\mathrm{d}S(r)}{\mathrm{d}r}.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}r}{r}\leqslant\frac{2\pi^2h_0^2}{(q-4)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}S(r)}{[S(r)-\frac{N^+}{q-4}]^2}.$$

两边分别从 r 到 R 求积分得到

$$\ln R-\ln r\leqslant\frac{2\pi^2h_0^2}{(q-4)^2}\int_r^R\frac{\mathrm{d}S(t)}{[S(t)-\frac{N^+}{q-4}]^2}=$$

$$\frac{2\pi^2h_0^2}{(q-4)^2}\left(\frac{1}{S(r)-\frac{N^+}{q-4}}-\frac{1}{S(R)-\frac{N^+}{q-4}}\right)\leqslant$$

$$\frac{2\pi^2h_0^2}{(q-4)S(r)-N^+}.$$

整理得

$$(q-4)S(r)<N^++\frac{2\pi^2h_0^2}{\ln R-\ln r}\leqslant$$

$$[\sum_{j=1}^{q} n_v(R,D_j) - 1]^+ + \frac{2\pi^2 h_0^2}{\ln R - \ln r}. \quad (8)$$

(ii) 若 $\exists t \in (r,R)$,使 $(q-4)S(t) - N^+ \leqslant 0$,则 $(q-4)S(r) \leqslant (q-4)S(t) \leqslant N^+$.

这时(8)式也成立. 这样就证明了引理 5.

引理 6[15]　设 G 是在平面区域 U 上的一亚纯函数族,则 G 在 U 内正规的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0$, $\forall z \in D$,都 $\exists r > 0$,使对所有的 $f \in G$ 都有

$$S(z,r,f) < \varepsilon.$$

2　定理的证明

定理 1 的证明　由于正规性是局部性质,所以不妨设 $U = \{z: |z| < R\}$. $\forall f \in G$,由引理 5 可知

$$(q-4)S(r,f) \leqslant (\sum_{j=1}^{v} n_v - 1)^+ + \frac{2\pi^2 h_0^2}{\ln R - \ln r}.$$

因为 $f(U)$ 在 $\{D_v\}_{v=1}^5$ 上至多有 1 个单叶岛,所以

$$(\sum_{j=1}^{v} n_v - 1)^+ = 0.$$

于是

$$S(r,f) = (5-4)S(r,f) \leqslant \frac{2\pi^2 h_0^2}{\ln R - \ln r}.$$

$\forall \varepsilon > 0$,当 $r < R\exp(-2\pi^2 h_0^2/\varepsilon)$ 时,有

$$S(r,f) \leqslant \frac{2\pi^2 h_0^2}{\ln R - \ln r} < \varepsilon$$

成立,从而由引理 6 可知 G 在 U 内正规.

定理 2 的证明　设 $a_v, v = 1,\cdots,5$ 是 G 的 5 个相互判别的单叶限制值,则存在充分小的 $\delta_v > 0$,使得 $|z - a_v| \leqslant \delta_v$ 互不相交. 于是 $\forall f \in G, f(U)$ 在 $\{D_v\}_{v=1}^5$ 上至多有 1 个单叶岛. 从而由定理 1 知道 G 在 U 内正规.

3　参考文献

[1] Hayman W. Meromorphic function [M]. London: Oxford, 1964.

[2] Tsuji M. Potential theory in modern function theory [M]. Tokyo: Maruzen, 1959.

[3] Yang Le. Value distribution theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[4] Schiff J. Normal families [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[5] 顾永兴,庞学诚,方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社,2007.

[6] 孙道椿,高宗升. 代数体函数的值分布[M]. 北京: 科学出版社,2014.

[7] 陈雪,田宏根,袁文俊,等. 涉及分担值的 Lahiri 型正规定理[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2014,38(1): 37-41.

[8] Alhfors L V. Zur theorie der Überlagerungsflächen [J]. Acta Math, 1935, 65(3): 157-194.

[9] Bloch A. Les fonctions holomorphes et meromorphes dans le cercle-unite [M]. Paris: Gauthiers-Villars, 1926.

[10] Valiron G. Familles normales et quasi-normales de fonctions meromorphes [M]. Paris: Gauthiers-Villars, 1929.

[11] Liao Liangwen. The new developments in the research of nonlinear complex differential equations [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2015, 39(4): 331-339.

[12] Bergweiler W. A new proof of the Ahlfors five islands theorem [J]. J Analyse Math, 1998, 76(1): 337-347.

[13] Bergweiler W. The role of the Ahlfors five islands theorem in complex dynamics [J]. Conform Geom Dyn, 2000, 4(1): 22-34.

[14] Sun Daochun. Main theorem on covering surfaces [J]. Acta Math Sci, 1994, 14(2): 213-225.

[15] Sun Daochun, Liu Huifang. Normal criteria on the family of meromorphic functions with shared set [J]. Isr J Math, 2011, 184(1): 403-412.

The Normal Theory Concerning the Univalent Restricted Values

SUN Daochun[1], CHAI Fujie[2]

(1. School of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou Guandong 510631, China;
2. School of Humanities and Social Sciences, Guangzhou Civil Aviation College, Guangzhou Guandong 510403, China)

Abstract: By using the Ahlfors′ covering theorem, the normality criteria for a family of meromorphic functions concerning the restricted values is investigated. Some normal theorems concerning the univalent islands and the univalent restricted values are obtained, which extend the famous Ahlfors′ five islands theorem and the Nevanlinna′s five univalent-valued theorem.

Key words: meromorphic function; normal families; covering surface; island; univalent restricted value

(责任编辑: 王金莲)