文章编号: 1000-5862(2016)03-0272-04

高阶线性微分方程亚纯解的增长性

曾娟娟，刘慧芳*

(江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌 330022)

摘要: 利用亚纯函数值分布理论，研究了亚纯系数高阶线性微分方程 $f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_0(z)f=0$ 解的增长性，证明了如果 $A_0(z)$ 以 ∞ 为亏值，$A_j(z)$ $(1\leqslant j\leqslant k-1)$ 满足某些条件，则上述方程的每个非零亚纯解都为无穷级，得到解的超级的下界估计.

关键词: 微分方程; 亚纯函数; 亏值; 级; 超级

中图分类号: O 174.52　　**文献标志码**: A　　**DOI**: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.03.11

0　引言和结果

设 f，α 为复平面上的亚纯函数，用 $\mu(f)$ 和 $\sigma(f)$ 表示 f 的下级和级，$\sigma_2(f)$ 表示其超级，$S(r,f)$ 代表任意满足 $S(r,f)=o(T(r,f))$ $(r\to\infty,r\notin E)$ 的量，其中 E 是一线测度有限的集合，如果 $T(r,\alpha)=S(r,f)$，则称 α 为 f 的小函数. 本文假定读者熟悉 Nevanlinna 理论[1-2].

考虑 2 阶线性微分方程

$$f''+A(z)f'+B(z)f=0. \tag{1}$$

当 $A(z)$，$B(z)$ 为整函数时，方程(1)的每个非零解都为整函数，且当 $\sigma(A)<\sigma(B)<\infty$ 或 $\sigma(B)<\sigma(A)\leqslant 1/2$ 时，方程(1)的每一个非零解都为无穷级[3-4]. 但当 $A(z)$，$B(z)$ 为亚纯函数时，即使有 $\sigma(A)<\sigma(B)<\infty$，方程(1)都可能存在有限级亚纯解. 例如，方程 $f''-2f'-2\tan^2 zf=0$ 有一个有限级亚纯解 $f(z)=e^z/\cos z$. 自然地，考虑当 $A(z)$，$B(z)$ 为亚纯函数时，在什么条件下方程(1)的每一个非零亚纯解都为无穷级. 陈宗煊[5]证明了如下结果.

定理 A　设 $A_0(z)$，$A_1(z)$，$\cdots$，$A_{k-1}(z)$ 是亚纯函数，满足

$\max\{\lambda(1/A_0),\sigma(A_j):j=1,\cdots,k-1\}<\mu(A_0)\leqslant\sigma(A_0)<+\infty$.

如果方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_0(z)f=0 \tag{2}$$

有亚纯解，则每一个非零亚纯解 f 满足

$$\sigma_2(f)=\sigma(A_0).$$

近年来，许多研究者将亚纯函数的亏值理论引入微分方程解的性质的研究中，得到了一系列重要结果[6-11]. 特别地，文献[8]得到下述结果.

定理 B　设 $A(z)$，$B(z)$ 是亚纯函数，其中 $B(z)$ 以 ∞ 为亏值，$H_1(z)$ 是一分式线性变换. 若 $\sigma(A)<\sigma(B)$，则方程

$$f''+(H_1\circ A)(z)f'+B(z)f=0$$

的每一个非零亚纯解都是无穷级.

定理 C　设 $A(z)$ 是超越亚纯函数，且满足 $\mu(A)<1/2$，$\delta(\infty,A)=1$，则方程

$$f''+A(z)f=0$$

的每一个非零亚纯解都是无穷级.

注意到定理 B 中的分式线性变换 $H_1(w)$ 的系数为常数. 本文考虑更广泛一类的分式线性变换

$$H(w)=\frac{a(z)w+b(z)}{c(z)w+d(z)},$$

其中 $a(z)$，$b(z)$，$c(z)$，$d(z)$ 为亚纯函数，且满足 $a(z)d(z)-b(z)c(z)\neq 0$. 同时继续运用亚纯函数的亏值对微分方程(2)的解的增长性进行研究，得到下述结果.

定理 1　设 $A_0(z)(\neq 0)$，$A_1(z)$，$\cdots$，$A_{k-1}(z)$，$B(z)(\neq 0)$ 为亚纯函数，且 $A_0(z)$ 以 ∞ 为亏值. 若存在某个 $d\in\{1,\cdots,k-1\}$，使得 $A_d(z)=(H\circ B)(z)$，且 $\max\{\sigma(A_j),\sigma(B):j\neq 0,d\}<\sigma(A_0)<+\infty$，其中 $a(z)$，$b(z)$，$c(z)$，$d(z)$ 为 $B(z)$ 的小亚纯函数，则方程(2)的每一个非零亚纯解 f 满足 $\sigma(f)=\infty$ 和 $\sigma_2(f)\geqslant\sigma(A_0)$.

收稿日期: 2015-10-20

基金项目: 国家自然科学基金(11201195)和江西省自然科学基金(20122BAB201012)资助项目.

通信作者: 刘慧芳(1973-)，女，江西丰城人，教授，博士，主要从事复分析研究.

从定理1的证明过程中，可以得到下述更一般性的结果，即推论1.

推论1　设$A_0(z)(\neq 0),A_1(z),\cdots,A_{k-1}(z)$为亚纯函数，且$A_0(z)$以$\infty$为亏值. 若$\max\{\sigma(A_j):j=1,\cdots,k-1\}<\sigma(A_0)<+\infty$，则方程(2)的每一个非零亚纯解$f$满足$\sigma(f)=\infty$和$\sigma_2(f)\geq\sigma(A_0)$.

定理2　设$A_0(z)(\neq 0),A_1(z),\cdots,A_{k-1}(z)$为亚纯函数，满足$\delta(\infty,A_0)=1$，$\max\{\sigma(A_j):j=1,\cdots,k-1\}<\mu(A_0)<1/2$，则方程(2)的每一个非零亚纯解$f$满足$\sigma(f)=\infty$和$\sigma_2(f)\geq\mu(A_0)$.

注1　定理1所得的解的超级的下界估计是精确的.

例1　设$p(z)$是有限级超越整函数且$\sigma(p)>2$，则$f(z)=e^{p(z)}$为方程

$$f''+\frac{e^{z^2}+z}{e^{z^2}-z}f'+\left(-p''-(p')^2-\frac{e^{z^2}+z}{e^{z^2}-z}p'\right)f=0$$

的解. 令$B(z)=e^{z^2}$，$H(w)=(w+z)/(w-z)$，$A_0(z)=-p''-(p')^2-(e^{z^2}+z)p'/(e^{z^2}-z)$，$A_1(z)=(e^{z^2}+z)/(e^{z^2}-z)$.

显然$A_1(z)=(H\circ B)(z)$，$2=\sigma(B)<\sigma(A_0)=\sigma(p)$，此时可得$\sigma(f)=\infty$，$\sigma_2(f)=\sigma(p)=\sigma(A_0)$.

注2　当$k=2$时，在推论1的条件下，文献[8]也证明了方程(2)的每一个非零亚纯解都为无穷级.

注3　注意到当$\lambda(1/A_0)<\mu(A_0)$时，必有$\delta(\infty,A_0)=1$. 因此推论1和定理2是定理A的推广.

1　引理

引理1[12]　设$f(z)$为有限级超越亚纯函数，则$\forall\varepsilon>0$，

(i) 存在集合$E_1\subset[0,2\pi)$，其线测度为0，使得若$\theta_0\in[0,2\pi)\setminus E_1$，则存在常数$R_0=R_0(\theta_0)>0$，使得对所有满足$\arg z=\theta_0$及$|z|\geq R_0$的$z$和所有$k>j$，有$|f^{(k)}(z)/f^{(j)}(z)|\leq|z|^{(k-j)(\sigma(f)-1+\varepsilon)}$；

(ii) 存在对数测度为有限的集合$E_2\subset(1,+\infty)$，使得对所有满足$|z|=r\notin[0,1]\cup E_2$的z及$(k,j)\in\Gamma$，上式成立.

引理2[13]　设$f(z)$是超越亚纯函数，满足$\mu(f)<\alpha<1$. 定义集合$E=\{r>1:\log L(r,f)>\gamma(\cos(\pi\alpha)+\delta(\infty,f)-1)T(r,f)\}$，其中$L(r,f)=\min\{|f(z)|:|z|=r\}$，$\gamma=\pi\alpha/\sin(\pi\alpha)$，则$\overline{\mathrm{logdens}}E\geq 1-\mu(f)/\alpha$.

引理3[14]　设$g(z)$为有限级亚纯函数，则$\forall\varepsilon>0$，存在一个线测度和对数测度都为有穷的集合$E\subset(1,+\infty)$，使得当$|z|=r\notin[0,1]\cup E$，$r\to+\infty$时，有$|g(z)|\leq\exp\{r^{\sigma(g)+\varepsilon}\}$.

引理4[15]　设$f(z)$是一非常数亚纯函数，$g(z)=[a(z)f(z)+b(z)]/[c(z)f(z)+d(z)]$，其中$a(z)$，$b(z)$，$c(z)$，$d(z)$均为$f(z)$的小亚纯函数且$a(z)d(z)-b(z)c(z)\neq 0$，则

$$T(r,g)=T(r,f)+S(r,f).$$

引理5[12]　设$f(z)$为超越亚纯函数，$\Gamma=\{(k_1,j_1),\cdots,(k_m,j_m)\}$为满足$k_i>j_i\geq 0$的整数对组成的集合，则对任意给定的常数$\alpha>1$，存在对数测度有限的集合$E\subset(1,+\infty)$和仅依赖于$\alpha$和$\Gamma$的常数$B>0$，当$z$满足$|z|=r\notin[0,1]\cup E$和$(j,i)\in\Gamma$时，有

$$|f^{(j)}(z)/f^{(i)}(z)|\leq B[T(\alpha r,f)\log^{\alpha}r\log T(\alpha r,f)/r]^{j-i}.$$

2　定理的证明

定理1的证明　设f为方程(2)的一个非零亚纯解，由方程(2)得

$$A_0=-f^{(k)}/f-A_{k-1}f^{(k-1)}/f-\cdots-A_1f'/f.\tag{3}$$

由(3)式，引理4和对数导数引理得

$$m(r,A_0)\leq\sum_{j=1}^{k-1}m(r,A_j)+O(\log rT(r,f))\leq\sum_{\substack{j=1\\j\neq d}}^{k-1}T(r,A_j)+T(r,B)+o(T(r,B))+O(\log rT(r,f))\ (r\to\infty,r\notin E),\tag{4}$$

其中E为线测度有限的集合.

由级的定义知，存在序列$\{r_n'\}(r_n'\to\infty)$满足

$$\lim_{r_n'\to\infty}\log T(r_n',A_0)/\log r_n'=\sigma(A_0).$$

令$mE=\delta$，则存在点$r_n\in[r_n',r_n'+\delta+1]-E$，由于

$$\frac{\log T(r_n,A_0)}{\log r_n}\geq\frac{\log T(r_n',A_0)}{\log(r_n'+\delta+1)}=\frac{\log T(r_n',A_0)}{\log r_n'+\log(1+(\delta+1)/r_n')},$$

所以

$$\lim_{r_n\to\infty}\frac{\log T(r_n,A_0)}{\log r_n}\geq\lim_{r_n'\to\infty}\frac{\log T(r_n',A_0)}{\log r_n'+\log(1+(\delta+1)/r_n')}=\sigma(A_0).$$

于是存在序列$\{r_n\}(r_n\to\infty)$满足

$$\lim_{r_n\to\infty}\log T(r_n,A_0)/\log r_n=\sigma(A_0).\tag{5}$$

令$\rho=\max\{\sigma(A_j),\sigma(B):j\neq 0,d\}$，则对任意给定常数$\varepsilon(0<2\varepsilon<\sigma(A_0)-\rho)$，$\exists R_0>0$，使得

当 $r_n > R_0$ 时,有

$$T(r_n, B) < r_n^{\rho+\varepsilon}, T(r_n, A_j) < r_n^{\rho+\varepsilon} (j = 1, \cdots, k-1, j \neq d), \tag{6}$$

$$T(r_n, A_0) > r_n^{\sigma(A_0)-\varepsilon}. \tag{7}$$

由亏值定义知 $\delta(\infty, A_0) = \delta > 0$,从而,$\exists R_1 > 0$,使得当 $r_n > R_1$ 时,有

$$m(r_n, A_0) > \delta T(r_n, A_0)/2. \tag{8}$$

从而由(4)~(8)式可得,当 r_n 充分大时,有

$$\delta r_n^{\sigma(A_0)-\varepsilon}/2 \leqslant (k+1) r_n^{\rho+\varepsilon} + O(\log rT(r,f)).$$

故 $\sigma(f) = \infty$ 且 $\sigma_2(f) \geqslant \sigma(A_0)$. 定理 1 得证.

定理 2 的证明 设 f 为方程(2)的任一个非零亚纯解,假设 $\sigma(f) < \infty$,由方程(2)得

$$|A_0| \leqslant \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + |A_{k-1}| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \cdots + |A_1| \left|\frac{f'}{f}\right|. \tag{9}$$

由引理 1,存在对数测度为有限的集合 $E_1 \subset (1, +\infty)$,使得对所有满足 $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$ 的 z,有

$$|f^{(j)}(z)/f(z)| \leqslant |z|^{j\sigma(f)} (j = 1, \cdots, k). \tag{10}$$

令 $\tau = \max\{\sigma(A_j): 1 \leqslant j \leqslant k-1\}$,由引理 3,对任意给定常数 $\varepsilon(0 < 2\varepsilon < \mu(A_0) - \tau)$,存在一对数测度有限的集合 $E_2 \subset (1, +\infty)$,使得当 $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2$ 时,有

$$|A_j(z)| \leqslant \exp\{r^{\tau+\varepsilon}\}. \tag{11}$$

由引理 2,取 $\alpha_0 = (\mu(A_0) + 1/2)/2$,则存在集合 E_3 满足 $\overline{\log\mathrm{dens}} E_3 \geqslant 1 - \mu(A_0)/\alpha_0$,且当 $|z| = r \in E_3$ 时,有

$$\log|A_0(z)| \geqslant \frac{\pi\alpha_0}{\sin(\pi\alpha_0)} \cos(\pi\alpha_0) \cdot T(r, A_0). \tag{12}$$

又由 $\mu(A_0)$ 的定义知,对上述 $\varepsilon > 0$,$\exists r_0 > 1$,使得当 $r > r_0$ 时,有

$$T(r, A_0) > r^{\mu(A_0)-\varepsilon/2}. \tag{13}$$

由于

$$\frac{\frac{\pi\alpha_0}{\sin(\pi\alpha_0)} \cos(\pi\alpha_0) \cdot r^{\mu(A_0)-\varepsilon/2}}{r^{\mu(A_0)-\varepsilon}} \to +\infty (r \to +\infty). \tag{14}$$

所以由(12)~(14)式得,$\exists r_1 (\geqslant r_0)$,使得当 $|z| = r \in E_3 \setminus [0, r_1]$ 时,有

$$|A_0(z)| \geqslant \exp\{r^{\mu(A_0)-\varepsilon}\}. \tag{15}$$

故由(9)~(11)式和(15)得,当 $|z| = r \in E_3 \setminus [0, r_1] \cup E_1 \cup E_2$ 时,有

$$\exp\{r^{\mu(A_0)-\varepsilon}\} \leqslant |A_0(z)| \leqslant k|z|^{k\sigma(f)} \exp\{r^{\tau+\varepsilon}\}. \tag{16}$$

由于 $\tau < \mu(A_0)$,所以(16)式不可能成立. 因此方程(2)的每一非零亚纯解 f 满足 $\sigma(f) = \infty$.

下证 $\sigma_2(f) \geqslant \mu(A_0)$. 由于 $\sigma(f) = \infty$,所以方程(2)的每一非零亚纯解 f 都为超越亚纯函数. 从而由引理 5,存在一对数测度有穷的集合 E_4 和常数 $B > 0$,使得对所有满足 $|z| = r \notin [0,1] \cup E_4$ 的 z,有

$$|f^{(j)}(z)/f(z)| \leqslant B[T(2r, f)]^{j+1} (j = 1, \cdots, k-1). \tag{17}$$

从而由(9),(11),(15)和(17)式得,当 $|z| = r \in E_3 \setminus [0, r_1] \cup E_2 \cup E_4$ 时,有

$$\exp\{r^{\mu(A_0)-\varepsilon}\} \leqslant |A_0(z)| \leqslant kB\exp\{r^{\tau+\varepsilon}\} [T(2r, f)]^{j+1}. \tag{18}$$

由(18)式得 $\sigma_2(f) \geqslant \mu(A_0)$.

综上定理 2 得证.

3 参考文献

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] Hayman W. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[3] Gundersen G. Finite order solutions of second order linear differential equations [J]. Trans Amer Math Soc, 1988, 305(1): 415-429.

[4] Hellerstein S, Miles J, Rossi J. On the growth of solutions of $f'' + gf' + hf = 0$ [J]. Trans Amer Math Soc, 1991, 324: 693-706.

[5] 陈宗煊. 关于高阶线性微分方程亚纯解的增长率[J]. 数学学报, 1999, 42(3): 551-558.

[6] Wu Pengcheng, Zhu Jun. On the growth of solutions to the complex differential equation $f'' + Af' + Bf = 0$ [J]. Science in China: Ser A, 2011, 54(5): 939-947.

[7] 朱军, 伍鹏程. 关于复微分方程 $f'' + Af' + Bf = 0$ 解的增长性[J]. 数学年刊, 2011, 32A(5): 531-538.

[8] 龙见仁, 伍鹏程. 2 阶线性微分方程亚纯解的增长性[J]. 山东大学学报: 理学版, 2012, 47(8): 31-33.

[9] 刘旭强, 易才凤. 关于 2 阶线性微分方程 $f'' + Af' + Bf = 0$ 解的增长性[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2013, 37(2): 171-174.

[10] Long Jianren, Wu Pengcheng. On the hyper-order of solutions of second order linear differential equations [J]. Advance in Math, 2013, 42(3): 320-326.

[11] 艾丽娟, 易才凤. 一类亚纯系数高阶线性微分方程解的增长性[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2012, 36(5): 477-481.

[12] Gundersen G G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates [J]. J London Math Soc, 1988, 37(1): 88-104.

[13] Goldberg A A, Sokolovskaya O P. Some relations for meromorphic functions of order or lower order less than one [J]. Izv Vyssh Uchebn Zaved Math, 1987, 31(6): 26-31.

[14] 陈宗煊. 二阶亚纯系数微分方程亚纯解的零点 [J]. 数学物理学报,1996,16(3):276-283.

[15] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数唯一性理论 [M]. 北京: 科学出版社,1995.

On the Growth of Meromorphic Solutions of Higher Order Linear Differential Equations

ZENG Juanjuan,LIU Huifang*

(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: The growth of solutions of higher order linear differential equations $f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_0(z)f=0$ is investigated by using the value distributions theory of meromorphic functions,where $A_j(z)$ $(0\leqslant j\leqslant k-1)$ are meromorphic functions. It is shown that every nonzero meromorphic solution of such equations has infinite order,provided that $A_0(z)$ has a deficient value ∞ and $A_j(z)$ $(1\leqslant j\leqslant k-1)$ satisfying certain conditions. The lower bound of hyper order of meromorphic solutions of such equations is also estimated.

Key words: differential equation; meromorphic functions; deficient value; order; hyper order

(责任编辑: 王金莲)

(上接第 267 页)

[15] Mas M,Mayor G,Torrens J. The distributivity condition for uninorms and t-operators [J]. Fuzzy Sets Syst,2002,126(2):207-218.

[16] Czogala E,Drewniak J. Associative monotonic operations in fuzzy set theory [J]. Fuzzy Sets Syst,1984,12(3):249-269.

[17] Calvo T. On some solutions of the distributivity equation [J]. Fuzzy Sets Syst,1999,104(1):85-96.

[18] Drygas P. Discussion of the structure of uninorms [J]. Kybernetika,2005,41(2):213-226.

The Distributivity for Semi-Nullnorms over 2-Uninorms

MIN Youmei,QIN Feng*

(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: Considering a 2-uninorm covering both a uninorm and a nullnorm and a semi-uninorm being generalization of uninorms by omitting commutativity and as sociativity. For special cases,distributivity for semi-nullnorms over 2-uninorms is investigated and the sufficient and necessary conditions of this equation are given out when the semi-nullnorm has the continuously underlying operator.

Key words: distributivity equations; 2-uninorms; semi-nullnorms; semi-t-norms; semi-t-conorms

(责任编辑: 曾剑锋)