第 40 卷 第 3 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 40 No. 3
2016 年 5 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) May 2016

文章编号:1000-5862(2016)03-0276-04

# Taylor-Hadamard 乘积的 $q$-级和 $q$-型

汤文菊,崔永琴,徐会清,徐洪焱*

(景德镇陶瓷大学信息工程学院,江西 景德镇 333403)

**摘要:** 通过构造 Taylor-Hadamard 乘积,讨论了泰勒级数的增长性,获得了此 Taylor-Hadamard 乘积与原泰勒级数关于 $q$-级和 $q$-型的几个关系定理,并给出相应的例子说明了结果的正确性.

**关键词:** 泰勒级数; Taylor-Hadamard 乘积; $q$-级; $q$-型

**中图分类号:** O 174.52 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.03.12

## 0 引言及主要结果

考虑具有如下形式的 Taylor 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots, \qquad (1)$$

其中$\{a_n\}$是复数列,$n \in \mathbf{N}$,$z = x + \mathrm{i}y$($x,y$ 为实数).当(1)式满足

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \text{ 或者} \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| / |a_n| = 0 \qquad (2)$$

时,则其和函数$f(z)$在全平面内处处解析,即为整函数[1].记 $D$ 为级数(1)满足条件(2)的整函数$f(z)$的全体集合.

**定义 1**[2] 若$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in D$,则$f(z)$的$q$-级$\rho_q$定义为

$$\rho_q = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log^{[q]} M(r,f)}{\log r}, q = 2,3,4,5,\cdots, \qquad (3)$$

当$0 < \rho_q < +\infty$时,其$q$-型$\tau_q$定义为

$$\tau_q = \limsup_{r\to+\infty} \log^{[q-1]} M(r,f) / r^{\rho_q}, q = 2,3,4,5,\cdots.$$

其中$M(r,f) = \max\limits_{|z|\leqslant r} |f(z)|$为$f(z)$的最大模.当$q = 2$时,其$q$-级$\rho_q$和$q$-型$\tau_q$分别被称为$f(z)$的级和型.

对于级数的增长性,余家荣等[3-16]作了大量的研究.2002 年,关于 Taylor 级数的增长性,K. A. M. Sayyed 等[17-18]通过研究 Taylor 级数确定的整函数的级与其系数之间的关系,得到如下结果.

**定理 A** 若$f(z) \in D$,则

$$\rho_q = \limsup_{n\to+\infty} \frac{n \log^{[q-1]} n}{\log(1/|a_n|)}, q = 2,3,4,5,\cdots, \qquad (4)$$

当$0 < \rho_q < +\infty$时,则

$$\tau_q = \limsup_{n\to+\infty} (|a_n|^{\rho_q/n}) \log^{[q-2]} \frac{n}{e\rho_q}, q = 2,3,4,5,\cdots.$$

本文给出一种 Taylor-Hadamard 乘积定义,并讨论 Taylor-Hadamard 乘积的增长性与原 Taylor 级数的增长性之间的关系问题.

**定义 2** 设$f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,$f_2(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$,且$f_1(z)$,$f_2(z) \in D$,若$\alpha,\beta$为实常数,满足$0 < \alpha$,$\beta < +\infty$,构造它们的 Taylor-Hadamard 乘积为

$$F(z) = (f_1 \Delta f_2)(u,v,\alpha,\beta;z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{(\alpha+\beta)n},$$

$$c_n = a_n^u b_n^v,$$

其中 $u,v$ 是正实数;$\{a_n\}$,$\{b_n\}$是复数列.

本文讨论了定义 2 中$F(z)$的增长性,得到了如下结果.

**定理 1** 设$f_1(z)$,$f_2(z) \in D$具有$q$-级$\rho_1$,$\rho_2$和$q$-型$\tau_1$,$\tau_2$,则 Taylor-Hadamard 乘积$F(z)$的$q$-级$\rho$满足

$$\rho \leqslant (\alpha+\beta)\rho_1\rho_2 / (u\rho_2 + v\rho_1), \qquad (5)$$

当(5)式等号成立时,$F(z)$型$q$-型$\tau$满足

$$\tau \leqslant \begin{cases} \dfrac{\alpha+\beta}{\rho}\left[(\rho_1\tau_1)^{u/\rho_1}(\rho_2\tau_2)^{v/\rho_2}\right]^{\rho/(\alpha+\beta)}, & q = 2, \\ \left[(\tau_1)^{u/\rho_1}(\tau_2)^{v/\rho_2}\right]^{\rho/(\alpha+\beta)}, & q \geqslant 3. \end{cases}$$

**定理 2** 设$f_1(z)$,$f_2(z) \in D$具有级$\rho_1$,$\rho_2$,型$\tau_1$,$\tau_2$以及 Taylor-Hadamard 乘积$F(z)$的级$\rho$和型$\tau$,则$F(kz+z_0)$($k \neq 0$为实数,$z_0$为复常数)的级$\rho'$和型$\tau'$满足$\rho' = \rho$,$\tau' = |k|^{\rho}\tau$.

## 1 引理及证明

**引理 1** 设$f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in D$,具有$q$-级$\rho_q$

收稿日期:2015-12-10

基金项目:国家自然科学基金(11561033),江西省自然科学基金(20151BAB201008)和大学生创新创业(201510408006)资助项目.

通信作者:徐洪焱(1980-),男,江西乐平人,副教授,主要从事复分析研究.

和 $q$-型 $\tau_q$，令 $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\alpha n} (\alpha \in \mathbf{R}^+)$，其具有 $q$-级 $\rho_q'$ 和 $q$-型 $\tau_q'$，则 $\rho_q' = \alpha\rho_q$，$\tau_q' = \tau_q (q \geqslant 2)$.

证　$\rho_q' = \limsup\limits_{r\to+\infty} \log^{[q]} M(r, g_1) / \log r = \limsup\limits_{r\to+\infty} \log^{[q]} M(r^\alpha, f_1) / \log r = \limsup\limits_{r\to+\infty} \log^{[q]} M(r^\alpha, f_1) / \log r^\alpha \cdot \log r^\alpha / \log r = \alpha\rho_q$.

当 $\rho_q' = \alpha\rho_q$ 时，$\tau_q' = \limsup\limits_{r\to+\infty} \log^{[q-1]} M(r, g_1) / r^{\rho_q'} =$

$\limsup\limits_{r\to+\infty} \log M^{[q-1]}(r^\alpha, f_1) / r^{\rho_q'} =$

$\limsup\limits_{r\to+\infty} \log M^{[q-1]}(r^\alpha, f_1) / (r^\alpha)^{\rho_q/\alpha} \underline{\underline{\rho_q = \alpha\rho_q}}$

$\limsup\limits_{r\to+\infty} \log M(r^\alpha, f_1) / (r^\alpha)^{\rho_1} = \tau_q$.

注　因为 $\limsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha n \log^{[q-1]} n}{\log(1/|a_n|)} = \alpha\rho_q = \rho_q'$，

$\limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\rho_q'/(\alpha n)} \log^{[q-2]} \dfrac{\alpha n}{e\rho_q'} = \tau_q = \tau_q'$，于是有

$$\rho_q' = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log^{[q]} M(r, g_1)}{\log r} \Leftrightarrow \rho_q' = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha n \log^{[q-1]} n}{\log(1/|a_n|)},$$

$$\tau_q' = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log^{[q-1]} M(r, g_1)}{r^{\rho_q}} \Leftrightarrow$$

$$\tau_q' = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\rho_q'/(\alpha n)} \log^{[q-2]} \frac{\alpha n}{e\rho_q'}.$$

引理 2　设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in D$ 具有级 $\rho$ 和型 $\tau$，对于复常数 $a$，令 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + a)^{\alpha n}$ 的级 $\rho'$ 和型 $\tau'$，则 $\rho' = \alpha\rho$，$\tau' = \tau$.

证　令 $|z + a| = \lambda$，$|a| = r_0$，显然，$r - r_0 \leqslant \lambda \leqslant r + r_0$，当 $r \to \infty$ 时，$\log r \sim \log \lambda$，

$$\rho' = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r, g)}{\log r} = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(\lambda^\alpha, f)}{\log r} \cdot \frac{\log \lambda^\alpha}{\log \lambda^\alpha} = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(\lambda^\alpha, f)}{\log \lambda^\alpha} \frac{\log \lambda^\alpha}{\log r} = \alpha\rho,$$

$$\tau' = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log M(r, g)}{r^{\rho'}} = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log M(\lambda^\alpha, f)}{r^{\rho'}} =$$

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log M(\lambda^\alpha, f_1)}{(\lambda^\alpha)^\rho} \cdot \frac{(\lambda^\alpha)^\rho}{r^{\rho'}} \underline{\underline{\rho' = \alpha\rho}}$$

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log M(\lambda^\alpha, f_1)}{(\lambda^\alpha)^\rho} \cdot \limsup_{r\to+\infty} \frac{(\lambda^\alpha)^\rho}{r^{(\alpha\rho)}} = \tau.$$

## 2　定理的证明

定理 1 证明　$\forall \varepsilon > 0$，存在 2 个正整数 $N_1, N_2$，当 $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时，有

$$|a_n| < \exp\left\{\frac{-n \log^{[q-1]} n}{\rho_1 + \varepsilon}\right\}, |b_n| < \exp\left\{\frac{-n \log^{[q-1]} n}{\rho_2 + \varepsilon}\right\},$$

则 $\log \dfrac{1}{|c_n|} > n\left[\dfrac{u}{\rho_1 + \varepsilon} + \dfrac{v}{\rho_2 + \varepsilon}\right] \log^{[q-1]} n$，

由引理 1，有

$$\rho = \limsup_{n\to+\infty} \frac{(\alpha + \beta) n \log^{[q-1]} n}{\log(1/|c_n|)} \leqslant$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{(\alpha + \beta) n \log^{[q-1]} n}{n\left[\frac{u}{\rho_1 + \varepsilon} + \frac{v}{\rho_2 + \varepsilon}\right] \log^{[q-1]} n}.$$

由 $\varepsilon$ 的任意性，得

$$\rho \leqslant \frac{(\alpha + \beta)}{u/\rho_1 + v/\rho_2} = \frac{(\alpha + \beta)\rho_1\rho_2}{u\rho_2 + v\rho_1}.$$

当 $\rho = \dfrac{(\alpha + \beta)\rho_1\rho_2}{u\rho_2 + v\rho_1}$ 时，$\forall \varepsilon > 0$，存在 2 个正整数 $N_1, N_2$，当 $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时，有

$$|a_n| < \left(\frac{\tau_1 + \varepsilon}{\log^{[q-2]} \frac{n}{e\rho_1}}\right)^{n/\rho_1}, |b_n| < \left(\frac{\tau_2 + \varepsilon}{\log^{[q-2]} \frac{n}{e\rho_2}}\right)^{n/\rho_2},$$

$$|c_n| < \left(\frac{\tau_1 + \varepsilon}{\log^{[q-2]} \frac{n}{e\rho_1}}\right)^{un/\rho_1} \left(\frac{\tau_2 + \varepsilon}{\log^{[q-2]} \frac{n}{e\rho_2}}\right)^{vn/\rho_2}.$$

由引理 1，有

$$\tau = \limsup_{n\to+\infty} |c_n|^{\frac{\rho}{(\alpha+\beta)n}} \log^{[q-2]} \frac{(\alpha + \beta) n}{e\rho} \leqslant$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| \left(\frac{\tau_1 + \varepsilon}{\log^{[q-2]} \frac{n}{e\rho_1}}\right)^{un/\rho_1} \left(\frac{\tau_2 + \varepsilon}{\log^{[q-2]} \frac{n}{e\rho_2}}\right)^{vn/\rho_2} \right|^{\rho/(\alpha+\beta)n} \cdot$$

$$\log^{[q-2]} \frac{(\alpha + \beta) n}{e\rho}.$$

当 $q = 2$ 时，由 $\varepsilon$ 的任意性，得

$$\tau \leqslant \frac{\alpha + \beta}{\rho} \left[(\rho_1\tau_1)^{u/\rho_1} (\rho_2\tau_2)^{v/\rho_2}\right]^{\rho/(\alpha+\beta)}.$$

当 $q \geqslant 3$，$n \to +\infty$ 时，

$$\log^{[q-2]} \frac{(\alpha + \beta) n}{e\rho} \sim \log^{[q-2]} \frac{n}{e\rho_1} \sim \log^{[q-2]} \frac{n}{e\rho_2},$$

再由 $\varepsilon$ 的任意性，得 $\tau \leqslant [(\tau_1)^{u/\rho_1} (\tau_2)^{v/\rho_2}]^{\rho/(\alpha+\beta)}$.

综上定理 1 得证.

定理 2 的证明　因为

$$F(kz + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^u b_n^v (kz + z_0)^{(\alpha+\beta)n} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^u b_n^v k^{(\alpha+\beta)n} (z + z_0/k)^{(\alpha+\beta)n}.$$

令 $G(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n$ 的型为 $\rho_G$ 和 $\tau_G$，其中 $c_n = a_n^u b_n^v k^{(\alpha+\beta)n}$. 由(4)式知 $\forall \varepsilon > 0$，存在 2 个正整数 $N_1$，$N_2$，当 $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时，有

$$|a_n| < n^{-n/(\rho_1+\varepsilon)}, |b_n| < n^{-n/(\rho_2+\varepsilon)},$$

则

$$|a_n^u b_n^v k^{(\alpha+\beta)n}| < n^{-n[u/(\rho_1+\varepsilon)+v/(\rho_2+\varepsilon)]} k^{(\alpha+\beta)n},$$

$$\log \frac{1}{|a_n^u b_n^v k^{(\alpha+\beta)n}|} > n\left[\frac{u}{\rho_1 + \varepsilon} + \frac{v}{\rho_2 + \varepsilon}\right] \log n - (\alpha +$$

$\beta)n\log k$.

因此

$$\rho_G \leqslant \limsup_{n\to+\infty}\{n\log n/[n(u/(\rho_1+\varepsilon)+v/(\rho_2+\varepsilon))\log n-(\alpha+\beta)n\log k]\}.$$

由 $\varepsilon$ 的任意性,得 $\rho_G \leqslant \rho_1\rho_2/(u\rho_2+v\rho_1)$.

当 $\rho_G=\rho_1\rho_2/(u\rho_2+v\rho_1)$ 时,$\forall\varepsilon>0$,存在 2 个正整数 $N_1,N_2$,当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$ 时,有

$|a_n|<(e\rho_1(\tau_1+\varepsilon)/n)^{n/\rho_1}$,

$|b_n|<(e\rho_2(\tau_2+\varepsilon)/n)^{n/\rho_2}$,

$|c_n|=|a_n^u b_n^v k^{(\alpha+\beta)n}|<[e\rho_1(\tau_1+\varepsilon)/n]^{un/\rho_1}\cdot[e\rho_2(\tau_2+\varepsilon)/n]^{vn/\rho_2}k^{(\alpha+\beta)n}$,

则 $\tau_G=\dfrac{1}{e\rho_G}\limsup\limits_{n\to+\infty}n(|c_n|^{\rho_G/n})\leqslant$

$$\frac{1}{e\rho_G}\limsup_{n\to+\infty}n\left|[e\rho_1(\tau_1+\varepsilon)/n]^{un/\rho_1}\cdot[e\rho_2(\tau_2+\varepsilon)/n]^{vn/\rho_2}k^{(\alpha+\beta)n}\right|^{\rho_G/n},$$

由 $\varepsilon$ 的任意性,得

$$\tau_G\leqslant\frac{1}{\rho_G}[(\rho_1\tau_1)^{u/\rho_1}(\rho_2\tau_2)^{v/\rho_1}]^{\rho_G}k^{(\alpha+\beta)\rho_G},$$

再由引理 2 知

$$\rho'=(\alpha+\beta)\rho_G\leqslant(\alpha+\beta)\rho_1\rho_2/(u\rho_2+v\rho_1).$$

令 $\rho_G=\rho'/(\alpha+\beta)$,则

$$\tau'=\tau_G\leqslant\frac{\alpha+\beta}{\rho'}[(\rho_1\tau_1)^{u/\rho_1}(\rho_2\tau_2)^{v/\rho_1}]^{\rho'/(\alpha+\beta)}k^{\rho'},$$

由定理 1 知,定理 2 成立.

## 3 相关例子

**例 1** 令 $f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}z^n$,$a_n=\dfrac{2^n}{n!}$,于是 $f_1(z)$ 满足(2)式,$f_2(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}z^n$,$b_n=\dfrac{1}{n^n}$,$f_2(z)$ 满足(3)式,所以 $f_1(z),f_2(z)\in D$,并且

$$\rho_1=\limsup_{n\to+\infty}\frac{n\log n}{\log(n!/2^n)}=1,$$

$$\rho_2=\limsup_{n\to+\infty}\frac{n\log n}{\log(n^n)}=1,$$

$$\tau_1=\frac{1}{e\rho_1}\limsup_{n\to+\infty}n|a_n|^{\rho_1/n}=\frac{1}{e}\limsup_{n\to+\infty}2n(e/n)=2,\tau_2=\frac{1}{e\rho_2}\limsup_{n\to+\infty}n|b_n|^{\rho_2/n}=\frac{1}{e}\limsup_{n\to+\infty}n\left|\frac{1}{n^n}\right|^{1/n}=\frac{1}{e}.$$

若令 $u=5$,$v=4$,$\alpha+\beta=5$,即

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right)^5\left(\frac{1}{n^n}\right)^4z^{5n},$$

则由定理 1 有

$$\rho\leqslant5\rho_1\rho_2/(5\rho_2+4\rho_1)=5/9,$$

$$\tau\leqslant\frac{\alpha+\beta}{\rho}[(\rho_1\tau_1)^{u/\rho_1}(\rho_2\tau_2)^{v/\rho_2}]^{\frac{\rho}{\alpha+\beta}}=9\left(\frac{2^5}{e^4}\right)^{1/9}.$$

又由引理 1,有

$$\rho=\limsup_{n\to+\infty}\frac{5n\log n}{-5\log\dfrac{2^n}{n!}+4\log n^n}=\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{-\dfrac{5\log2}{5\log n}+\dfrac{5\log n!}{5n\log n}+\dfrac{4}{5}}=\frac{5}{9},$$

$$\tau=\frac{9}{e}\limsup_{n\to+\infty}5n\left[\left(\frac{2^n}{n!}\right)^5\left(\frac{1}{n^n}\right)\right]^{4(1/9n)}=9\left(\frac{2^5}{e^4}\right)^{1/9}.$$

因此该例说明当 $q=2$ 时定理 1 是成立的.

**例 2** $f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$,$f_2(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$,其中 $a_n=\left(\dfrac{1}{\log^{[q-2]}n}\right)^n$,$b_n=\left(\dfrac{1}{\log^{[q-2]}n}\right)^{n!}$. 令 $f_1(z)$,$f_2(z)$ 的 $q$-级分别为 $\rho_1,\rho_2$ 和 $q$-型分别为 $\tau_1,\tau_2$,则

$$\rho_1=\limsup_{n\to+\infty}\frac{n\log^{[q-1]}n}{\log(\log^{[q-2]}n)^n}=1,$$

$$\rho_2=\limsup_{n\to+\infty}\frac{n\log^{[q-1]}n}{\log(\log^{[q-2]}n)^{\sqrt[n]{n!}}}=\limsup_{n\to+\infty}\frac{n\log^{[q-1]}n}{\sqrt[n]{n!}\log^{[q-1]}n}=e,$$

$$\tau_1=\limsup_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{\log^{[q-2]}n}\right)^n\right]^{\rho_i/n}\log^{[q-2]}n=1,$$

$$\tau_2=\limsup_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{\log^{[q-2]}n}\right)^{\sqrt[n]{n!}}\right]^{\rho_i/n}\log^{[q-2]}n=1.$$

取 $u=3$,$v=4$,$\alpha+\beta=5$,即 $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^3b_n^4z^{5n}$,则由定理 1 有

$$\rho_q\leqslant(\alpha+\beta)\rho_1\rho_2/(u\rho_2+v\rho_1)=5e/(3e+4),$$

当上式等号成立时,由定理 1 可得

$$\tau_q\leqslant[(\tau_1)^{u/\rho_1}(\tau_2)^{v/\rho_2}]^{\rho_q/(\alpha+\beta)}=1.$$

又由引理 1,有

$$\rho_q=\limsup_{n\to+\infty}\frac{(\alpha+\beta)n\log^{[q-1]}n}{\log(1/|c_n|)}=\limsup_{n\to+\infty}\frac{5n\log^{[q-1]}n}{3\log\dfrac{1}{|a_n|}+4\log\dfrac{1}{|b_n|}}\leqslant$$

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{5}{\dfrac{3\log(\log^{[q-2]}n)^n}{n\log^{[q-1]}n}+\dfrac{4\log(\log^{[q-2]}n)^{\sqrt[n]{n!}}}{n\log^{[q-1]}n}}=$$

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{5}{\dfrac{3n\log(\log^{[q-2]}n)}{n\log^{[q-1]}n}+\dfrac{4\sqrt[n]{n!}\log(\log^{[q-2]}n)}{n\log^{[q-1]}n}}=\frac{5e}{3e+4}.$$

$$\tau_q = \limsup_{n\to+\infty} |c_n|^{\frac{\rho_q}{(\alpha+\beta)n}} \log^{[q-2]} n \leqslant$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| \left(\frac{1}{\log^{[q-2]} n}\right)^{3n} \left(\frac{1}{\log^{[q-2]} n}\right)^{4\sqrt[q]{n!}} \right|^{\frac{e}{(3e+4)n}} \log^{[q-2]} n = 1.$$

因此,此例说明了当 $q \geqslant 3$ 时定理 1 也成立.

例 3　若 $f_1(z)$,$f_2(z)$,$u$,$v$,$\alpha$,$\beta$ 均由例 1 给出以及 $k = 3$,$z_0 = 6$,则

$$F(kz + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n!}\right)^5 \left(\frac{1}{n^n}\right)^4 (3z + 6)^{5n} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n!}\right)^5 \left(\frac{1}{n^n}\right)^4 3^{5n} (z + 2)^{5n}.$$

令 $G(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n!}\right)^5 \left(\frac{1}{n^n}\right)^4 3^{5n} \xi^n$,这里 $\xi = z + 2$,则 $G(\xi)$ 的级 $\rho_G$ 与型 $\tau_G$ 有

$$\rho_G = \limsup_{n\to+\infty} \frac{n\log n}{-\log[(2^n/n!)^5(1/n^n)^4 3^{5n}]} =$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{n\log n}{-5n\log 2 + 5\log(n!) + 4n\log n + 5n\log 3} = \frac{1}{9},$$

$$\tau_G = \frac{1}{e\rho_G} \limsup_{n\to+\infty} n\left(|(2^n/n!)^5(1/n^n)^4 3^{5n}|^{\rho_q/n}\right) =$$

$$\frac{9}{e} \limsup_{n\to+\infty} n\left(\left|\left(\frac{2^n}{n!}\right)^5 \left(\frac{1}{n^n}\right)^4 3^{5n}\right|^{\frac{1}{9n}}\right) = 3^{5/9}[9(2^{5/9}e^{-4/9})].$$

又由引理 2 知 $F(2z+6)$ 的级 $\rho' = 5\rho_G = 5/9 = \rho$,型 $\tau' = \tau_G = 3^{5/9}[9(2^{5/9}e^{-4/9})] = 3^{\rho}\tau$.

至此,例 3 说明了定理 2 的结论成立.

## 4　参考文献


[1] 马尔库什维奇. 整函数[M]. 张顺燕,译. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012.

[2] Sato D. On the rate of growth of entire functions of fast growth[J]. Bull Amer Math Soc,1963,69(3):411-414.

[3] 余家荣,丁晓庆,田范基. Dirichlet 级数与随机 Dirichlet 级数的值分布[M]. 武汉:武汉大学出版社,2004.

[4] 高宗升. Dirichlet 级数表示的整函数的增长性[J]. 数学学报,1999,42(4):741-748.

[5] 高宗升,孙道椿. 无限级随机 Dirichlet 级数的值分布[J]. 数学年刊,1993,14(6):677-685.

[6] 古振东,孙道椿. Dirichlet 级数在全平面上的正规增长性[J]. 数学物理学报,2011,31(4):991-997.

[7] 孔荫莹. Dirichlet-Hadamard 乘积的 $q$-级与 $q$-型[J]. 数学学报,2009,52(6):1165-1172.

[8] 孔荫莹,邓冠铁. Dirichlet 级数的 Dirichlet-Hadamard 乘积[J]. 数学年刊,2014,35(2):145-152.

[9] 宁菊红,易才凤,黄文平. 广义 Dirichlet 级数的正规增长性[J]. 数学物理学报,2012,32(2):379-386.

[10] 徐洪焱,易才凤. 半平面上有限级 Dirichlet 级数的逼近[J]. 数学学报,2010,53(3):617-624.

[11] 徐洪焱,易才凤. 无限级 Dirichlet 级数的增长性与逼近[J]. 数学进展,2013,42(1):81-88.

[12] 贺隆贞. 关于狄里克莱级数确定的整函数的($p$,$q$)(R)型和下($p$,$q$)(R)型[J]. 武汉大学学报:自然科学版,1985(4):17-26.

[13] 贺隆贞. 关于狄里克莱级数确定的整函数的($p$,$q$)(R)级和下($p$,$q$)(R)级[J]. 武汉大学学报:自然科学版,1983(3):73-89.

[14] 崔永琴,汤文菊,徐洪焱. Dirichlet 级数及其新型 Dirichlet-Hadamard 乘积的增长性[J]. 数学的实践与认识,2015(22):267-273.

[15] 王金莲,陆万春. 半平面上解析的 Laplace-Stieltjes 变换的对数精确级[J]. 东北师大学报:自然科学版,2015,47(4):7-10.

[16] 吴世玕. 右半平面上 Dirichlet 级数的 $p$-级准确型[J]. 山东大学学报:理学版,2016,51(2):58-63.

[17] Valiron G. Lectures on the general theory of integral functions[M]. New York:Chelsea Reprint,1949.

[18] Sayyed K A M,Metwally M S,Mohamed M T. Some orders and types of generalized Hadamard product of entire functions[J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics,2003,26(1):121-132.


# On Some $q$-Order and $q$-Type of Taylor-Hadamard Product Function


TANG Wenju,CUI Yongqin,XU Huiqing,XU Hongyan*

(Department of Informatics and Engineering,Jingdezhen Ceramic Institute,Jingdezhen Jiangxi 333403,China)



**Abstract:** The purpose of this paper is to investigate the growth of entire functions represented by Taylor series,and some relationship theorems about $q$-order and $q$-type between Taylor series and its Taylor-Hadamard product are obtained,by constructing a Taylor-Hadamard product of Taylor series. Some examples show that our results had given.



**Key words:** Taylor series;Taylor-Hadamard product;$q$-order;$q$-type

(责任编辑:王金莲)