文章编号:1000-5862(2016)03-0280-05

带有 Poisson 跳的固定资产模型解的全局稳定性

乔　楠,张启敏*
(宁夏大学数学统计学院,宁夏 银川　750021)

摘要: 讨论了带有 Poisson 跳的固定资产模型解的全局稳定性,并给出了固定资产模型稳定性判断准则,该方法的优点是在弱于全局 Lipschitz 的条件下,讨论了模型解的渐近性质. 最后通过数值算例对结论进行了验证.

关键词: 固定资产模型; Poisson 跳; 全局渐近稳定性; 全局稳定性
中图分类号: O 175　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.03.13

0　引言

考虑固定资产模型[1]

$$\begin{cases} \partial K(a,t)/\partial t+\partial K(a,t)/\partial a=-\mu(a,t)K(a,t)+ \\ f(t,K(a,t))+g(t,K(a,t))\mathrm{d}W_t/\mathrm{d}t+ \\ h(t,K(a,t))\mathrm{d}N_t/\mathrm{d}t,(a,t)\text{ 在 } Q \text{ 中}, \\ K(0,t)=\varphi(t)=\gamma(t)A(t)\cdot \\ F\left(L(t),\int_0^A K(a,t)\mathrm{d}a\right),t\in[0,T], \\ K(a,0)=K_0(a),a\in[0,A], \\ N(t)=\int_0^A K(a,t)\mathrm{d}a,t\in[0,T], \end{cases} \tag{1}$$

其中 $Q=(0,A]\times(0,T],t\in[0,T]$ 表示时间,$a\in[0,A]$,A 表示最大年龄,$K(a,t)$ 为时刻 t 和年龄 a 的资本密度函数,$N(t)$ 为资本总量,$\mu(a,t)$ 为资本折旧率,$\gamma(t)$ 为资本积累率,$0<\gamma(t)<1$,$A(t)$ 是在 t 时刻的进步系数,$N(t)=\int_0^A K(a,t)\mathrm{d}a$ 是在 t 时刻的资本总数. 现实生活中总存在一些不确定性、不连续的突然扰动. 如技术的革新、新产品的引进、新政策的变化等. 这些因素的变化使得资产是包含有风险的资产. 由于资本市场是复杂多变的,而且资产是不连续和不可预期的,所以考虑随机扰动,用

$$f(t,K(a,t))+g(t,K(a,t))\frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t}+h(t,K(a,t))\frac{\mathrm{d}N_t}{\mathrm{d}t}$$

表示外部环境对资本系统的影响,其依赖于时间 t 和资本密度函数 $K(a,t)$. W_t 是白噪声,$h(t,K(a,t))$ 表示跳跃系数,N_t 是强度为 λ 的 Poisson 过程. $N_t=\overline{N_t}-\lambda t$ 是一个补偿的 Poisson 过程.

由于随机固定资产模型的精确解很难求出,因此研究数值解及其解的相关性质就显得尤为重要. 目前随机固定资产模型的数值解已有很多研究成果[2-4],如文献[2]利用显式 Euler 法在局部 Lipschitz 条件下讨论了带 Markovian 调制的随机固定资产模型数值解的强收敛性; 文献[3]在 Lipschitz 条件下,讨论了带有随机的固定资产模型数值解的收敛性; 文献[4]在 Lipschitz 条件下,利用 split-step θ 方法研究了带有 Poisson 跳的年龄结构种群模型解的收敛性. 上述文献都是在 Lipschitz 条件下讨论稳定性,然而这个条件并不是对任何情况都满足,这使得随机固定资产模型在研究解的性质上受到了极大的约束限制. 本文的主要目的是在不满足全局 Lipschitz 条件下证明系统(1)解的全局渐进稳定的充分条件,在弱于全局 Lipschitz 条件下,讨论了带有 Poisson 跳的固定资产模型解的全局稳定性.

1　预备知识

$V=H^1([0,A])\equiv\{\varphi\mid\varphi\in L^2([0,A]),\partial\varphi/\partial a\in L^2([0,A])\}$,其中 $\partial\varphi/\partial a$ 是广义偏导数. V 是 1 个 Sobolev 空间. $H=L^2([0,A])$,满足 $V\to H\equiv H'\to V'$. V' 是 V 的对偶空间. 定义 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 分别为 V 和 V' 上的范数 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 V 与 V' 空间的内积,$(\cdot,\cdot)$ 表示 H 空间上的数量积,S 是完备的 Hilbert 空间. 存

收稿日期:2015-12-28
基金项目:国家自然科学基金(11461053,11261043)和宁夏大学研究生院课题(GIP201624)资助项目.
通信作者:张启敏(1964-),女,宁夏银川人,教授,博士生导师,主要从事生物数学和计算方法的研究.

在常数 m 满足

$$|x| \leqslant m \| x \|, \forall x \in V. \tag{2}$$

W_t 是定义在完备的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上且取值在可分的 Hilbert 空间 S 上的 Wiener 过程,具有增量协方差算子 G,$B \in L(S,H)$ 是所有从 S 到 H 的有界线性算子空间,$\| B \|_2$ 表示 Hilbert-Schmidt 范数[2],即 $\| B \|_2^2 = \mathrm{tr}(BGB^{\mathrm{T}})$.

用 K_t 表示随机过程 $K(a,t)$,$\mathbf{R}^+$ 表示所有非负实数集,$\mathbf{Z}^+$ 表示所有正整数集. $C(V,\mathbf{R}^+)$ 表示由 $V \to \mathbf{R}^+$ 所有连续函数集,$C^i(V,\mathbf{R}^+)$ 表示由 $V \to \mathbf{R}^+$ 具有 i 阶连续可导函数集,$C_b^i(V,\mathbf{R})$ 表示由 $V \to \mathbf{R}$ 具有 i 阶连续有界可导函数集. 假设 Poisson 过程 N_t 是独立的 Wiener 过程 W_t. a. s. 表示在概率意义下几乎处处成立.

考虑带有 Poisson 跳的固定资产模型

$$\mathrm{d}_t K_t = -\frac{\partial K_t}{\partial a}\mathrm{d}t - \mu(a,t) K_t \mathrm{d}t + f(t,K_t)\,\mathrm{d}t + g(t,K_t)\,\mathrm{d}W_t + h(t,K_t)\,\mathrm{d}N_t,$$

其中 $\mathrm{d}_t tK_t$ 表示 K 关于 t 的微分,即 $\mathrm{d}_t K_t = \mathrm{d}_t K(a,t) = (\partial K(a,t)/\partial t)\,\mathrm{d}t$.

定义 1　$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是完备的概率空间,K_t 是在取值可分的 Hilbert 空间 S 上的连续适应过程,并满足滤波$\{\mathscr{F}_t\}$ 的通常条件,且 $P\{W_{t_0} = 0\} = 1$,$P\{N_{t_0} = 0\} = 1$,这样初始条件 K_0 的分布可以给出,对于 $t \in [t_0,\tau_{+\infty})$,如果有

$$K_t = K_0 + \int_0^t (-\partial K(a,s)/\partial a - \mu(a,s) K(a,s) + f(t,K(a,s)))\,\mathrm{d}s + \int_0^t g(t,K(a,s))\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t h(t,K(a,s))\,\mathrm{d}N_s \text{ a. s.},$$

则称 K_t 为系统(1) 的弱解,其中得到了 1 组元素 $(K_t,\Omega,\{\mathscr{F}\},P,\{\mathscr{F}_t\},W_t,N_t)$,$\tau_{+\infty}$ 是 K_t 的爆破时间,即 $\tau_{+\infty} = \liminf\limits_{\varepsilon \to +\infty} \{t \geqslant t_0 | \| K_t \geqslant \varepsilon \|\}$.

特别地,当$\{\mathscr{F}_t\}$ 是 Wiener 过程 W_t、Poisson 过程 N_t 和初始条件 K_0 所生成的滤波[5] 时,称 K_t 为系统(1) 的强解.

引理 1[5]　若平方可积函数 $f(t,K(a,s))$,$g(t,K(a,t))$,$h(t,K(a,t))$ 是连续的,则在可测空间 $(V,L^2(V))$ 上,对任意初始分布 μ,系统(1) 存在关于初始分布 μ 的弱解 K_t,即 $\forall V \in L^2(V)$ 有 $P\{K_0 \in V\} = \mu(V)$ 成立.

注 1　引理 1 说明在充分的条件下系统(1) 存在弱解.

2　主要结论

先介绍在概率意义下全局稳定性和全局渐近稳定性的相关定义,从而为研究在不满足全局 Lipschitz 条件下,带有 Poisson 跳的固定资产模型解的稳定性提供依据.

定义 2　系统(1) 零解的稳定性,

(i) $\forall \varepsilon \in (0,1)$,存在 $\mathscr{K}$ 函数 α,$\forall K_0 \in V$,若系统(1) 的每个弱解 K_t 都满足

$$P\{\sup_{t \geqslant t_0} |K_t| < \alpha(|K_0|)\} \geqslant 1 - \varepsilon,$$

则系统(1) 的零解在概率意义下是全局稳定的;

(ii) 若 $\forall K_0 \in V$,且系统(1) 的零解在概率意义下是全局稳定的,若每个弱解 K_t 都满足

$$P\{\lim_{t \to \infty} K_t = 0\} = 1,$$

则系统(1) 的零解在概率意义下是全局渐近稳定的.

为了证明本文的主要结论,给出以下假设条件:

(H1) $\mu(a,t)$ 非负可测,$\gamma(t)$ 和 $A(t)$ 非负连续,且

$$\begin{cases} 0 \leqslant \mu_0(a,t) \leqslant \mu(a,t) < \infty, (a,t) \text{ 在 } Q \text{ 中}, \\ \gamma(t) A(t) \leqslant \eta, \eta \geqslant 0, \quad t \text{ 在 } [0,T] \text{ 中}, \end{cases}$$

其中 $\int_0^A \mu(a,t)\,\mathrm{d}t = +\infty$;

(H2) $f(t,0) = 0$,$g(t,0) = 0$,$t \in [0,T]$;

(H3) $\begin{cases} F(L,N) \geqslant 0 (F(L,0) = 0), \partial F/\partial L > 0, \\ 0 < \partial F/\partial N < F_1, \end{cases}$

其中 F_1 是大于 0 的常数;

(H4) 存在常数 $\bar{\alpha} > 0$,$\beta \in \mathbf{R}$,$t \in [0,T]$,使得

$$2\langle f(t,K_t),K_t\rangle + \| g(t,K_t) \|_2^2 + \lambda |h(t,K_t)|^2 \leqslant -\bar{\alpha} \| K_t \|^2 + \beta |K_t|^2, (a,t) \in Q, \text{a. e. t.}.$$

定理 1　若系统(1) 满足条件(H1) ~ (H4),并且存在函数 $V \in C^2(V,\mathbf{R}^+)$,使得

(i) $AF_1^2\eta^2 - 2\mu_0 - \bar{\alpha}/m + \beta \leqslant 0$;

(ii) 对于 $K_{0,a} = K_0$ 的分布和 K_0 的其他分布,系统(1) 的零解满足$\{K_t \in V | \mathscr{L}|K_t|^2 = 0\}$ a. s.,

则系统(1) 的零解在概率意义下是全局渐近稳定的.

证　由引理 1 知在任意确定初始条件下,系统(1) 有 1 个弱解 K_t.

先证明系统(1) 的每一个弱解都定义在 $t \in [0,\infty)$ a. s.. 利用反证法,假设对于弱解 K_t,有 $P\{\sigma_\infty < +\infty\} > 0$ 成立,其中 $\sigma_\infty = \lim\limits_{r \to +\infty} \sigma_r$,$\sigma_r$ 是停时,即 $\sigma_r = \inf\{t = 0 | \| K_t \| \geqslant r\}$,则存在常数 $\varepsilon > 0$ 和 $T > 0$,使得 $P\{\sigma_\infty \leqslant T\} > 2\varepsilon$. 而且存在充分大的常数 $N > 0$,使得

$$P\{\sigma_r \leqslant T\} \geqslant \varepsilon, \forall r \geqslant N. \tag{3}$$

根据弱解的连续性可得

$$E(|K_t|^2_{t\wedge\sigma_r}) \geqslant E(I_{\{\sigma_r\leqslant t\}}|K_t|^2_{\sigma_r}) \geqslant P\{\sigma_r\leqslant t\}r^2,\forall t\geqslant 0. \qquad (4)$$

对 $|K_t|^2$ 利用 Itô 公式得到

$$\mathrm{d}|K_t|^2 = -2\langle K_t,\partial K_t/\partial a\rangle\mathrm{d}t - 2\langle K_t,\mu(a,t)K_t\rangle\mathrm{d}t + 2\langle K_t,f(t,K_t)\rangle\mathrm{d}t + \|g(t,K_t)\|_2^2\mathrm{d}t + \lambda|h(t,K_t)|^2\mathrm{d}t + 2\langle K_t,g(t,K_t)\rangle\mathrm{d}W_t + 2\langle K_t,h(t,K_t)\rangle\mathrm{d}N_t.$$

在系统(1)和假设条件(H1)~(H4)下可得

$$\mathscr{L}|K_t|^2 = -2\langle K_t,\partial K_t/\partial a\rangle - 2\langle K_t,\mu(a,t)K_t\rangle + 2\langle K_t,f(t,K_t)\rangle + \|g(t,K_t)\|_2^2 + \lambda|h(t,K_t)|^2 \leqslant -2\langle K_t,\partial K_t/\partial a\rangle - 2\mu_0(a,t)\langle K_t,K_t\rangle + 2\langle K_t,f(t,K_t)\rangle + \|g(t,K_t)\|_2^2 + \lambda|h(t,K_t)|^2,$$

其中

$$-\langle K_t,\partial K_t/\partial a\rangle = -\int_0^A K_t\mathrm{d}_aK_t = -\frac{1}{2}\int_0^A\mathrm{d}_aK_t^2 = \frac{1}{2}\gamma(t)^2A(t)^2\left[F\left(L(t),\int_0^A K_t\mathrm{d}a\right)-F(L(t),0)\right]^2 \leqslant \frac{1}{2}\eta^2(\partial F(L,N)/\partial N|_y)^2\left(\int_0^A K_t\mathrm{d}a\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}AF_1^2\eta^2|K_t|^2,$$

这里 $y\in(0,\int_0^A K_t\mathrm{d}a)$.

结合(2)式可得

$$-2\langle K_t,\partial K_t/\partial a\rangle - 2\langle K_t,\mu(a,t)K_t\rangle + 2\langle K_t,f(t,K_t)\rangle + \|g(t,K_t)\|_2^2 + \lambda|h(t,K_t)|^2 \leqslant AF_1^2\eta^2|K_t|^2 - 2\mu_0(a,t)|K_t|^2 - \bar{\alpha}\|K_t\|^2 + \beta|K_t|^2 \leqslant AF_1^2\eta^2|K_t|^2 - 2\mu_0(a,t)|K_t|^2 - \bar{\alpha}|K_t|^2/m + \beta|K_t|^2 = |K_t|^2(AF_1^2\eta^2 - 2\mu_0(a,t) - \bar{\alpha}/m + \beta) < 0,$$

所以

$$|K_{t\wedge\sigma_r}|^2 = |K_0|^2 + \int_0^{t\wedge\sigma_r}\mathscr{L}|K_s|^2\mathrm{d}s + 2\int_0^{t\wedge\sigma_r}\langle K_s,g(s,K_s)\mathrm{d}W_s\rangle + 2\int_0^{t\wedge\sigma_r}\langle K_s,h(s,K_s)\mathrm{d}N_s\rangle.$$

故

$$E(|K_{t\wedge\sigma_r}|^2) = E(|K_0|^2). \qquad (5)$$

由(3)~(5)式可得

$$\varepsilon r^2 \leqslant P\{\sigma_r\leqslant T\}r^2 \leqslant |K_0|^2,\forall r\geqslant N.$$

由于 $r^2\in\mathscr{K}_\infty$,所以 $+\infty = \lim\limits_{r\to+\infty}\varepsilon r^2 \leqslant |K_0|^2 < +\infty$,显然,这与提出的假设 $P\{\sigma_\infty<+\infty\}>0$ 矛盾. 因此 $P\{\sigma_\infty\leqslant+\infty\}=0$,故系统(1)的任意一个弱解都定义在 $t\in[0,\infty)$ a.s..

下面分情况证明系统(1)的零解在概率意义下是全局稳定的.

在 $K_0\neq 0$ 的情况下,$\forall\varepsilon\in(0,1)$,$r>0$ 和系统(1)的每个弱解 K_t,结合(4)式和(5)式,对于所有 $t\geqslant 0$,$P\{\sigma_r\leqslant t\}r^2\leqslant E(|K_{t\wedge\sigma_r}|^2)\leqslant|K_0|^2$. 根据上式,令 $t\to+\infty$,得到 $P\{\sigma_r\leqslant+\infty\}\leqslant|K_0|^2/r^2$. 因此

$$P\{\sup_{t\geqslant 0}|K_t|\leqslant r\} \geqslant 1-\varepsilon, \qquad (6)$$

其中 $r=\sqrt{|K_0|^2/\varepsilon}$ 显然是 1 个 $\mathscr{K}$ 函数.

在 $K_0=0$ 的情况下,结合(5)式,对于所有 $t\geqslant 0$,有 $E(|K_{t\wedge\sigma_r}|^2)=0$. 因为 $|K_t|^2\geqslant 0$,可得对于所有 $t\geqslant 0$ a.s.,有 $|K_{t\wedge\sigma_r}|^2=0$,即对于所有 $t\geqslant 0$ a.s.,有 $K_{t\wedge\sigma_r}=0$. 令 $r\to+\infty$ 得到 $K_t\equiv 0$ a.s.. 所以,在 $K_0=0$ 的情况下,$\forall\varepsilon\in(0,1)$,(6)式成立. 因此,系统(1)的零解在概率意义下是全局稳定的.

下面的证明过程为了说明系统(1)的每一个弱解 K_t 满足

$$P\{\lim_{t\to\infty}K_t=0\}=1. \qquad (7)$$

事实上,$|K_t|^2(AF_1^2\eta^2-2\mu_0(a,t)-\bar{\alpha}/m+\beta)\leqslant 0$,$|K_t|^2\geqslant 0$,由弱解的连续性和引理 1 知,$\forall r=1,2,\cdots$,$\{|K_{t\wedge\sigma_r}|^2\}_{t\geqslant 0}$ 是非负连续上鞅. 即 $\forall r=1,2,\cdots$,有 $E(|K_{t\wedge\sigma_r}|^2|\mathscr{F}_s)\leqslant|K_{s\wedge\sigma_r}|^2$ a.s.,结合 $\lim\limits_{r\to+\infty}\sigma_r=+\infty$ a.s. 和 Fatou 引理,$\forall t>s\geqslant 0$,有

$$E(|K_t|^2|\mathscr{F}_s) = E(\liminf_{r\to+\infty}|K_{t\wedge\sigma_r}|^2|\mathscr{F}_s) \leqslant \liminf_{r\to+\infty}E(|K_{t\wedge\sigma_r}|^2|\mathscr{F}_s) \leqslant \liminf_{r\to+\infty}|K_{s\wedge\sigma_r}|^2 = |K_s|^2\ \text{a.s.}.$$

因此,$\{|K_t|^2\}_{t\geqslant 0}$ 是连续上鞅. 又 $|K_\infty|^2=\lim\limits_{t\to+\infty}|K_t|^2$ 存在且有界 a.s.,$E(|K_\infty|^2)=\lim\limits_{t\to+\infty}E(|K_t|^2)$ 是有界非负的[8]. 结合文献[7]可知 $\{|K_t|^2\}_{t\geqslant 0}$ 是一致可积的.

接下来证明 $E(|K_\infty|^2)=0$. 利用反证法,假设 $E(|K_\infty|^2)>0$. 选定 1 个递增时间序列 $\{t_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 且满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=+\infty$. 记 $Q_t^n=K(t+t_n,a)$,$\forall t\geqslant 0$,$\forall n\in\mathbf{Z}^+$. 根据弱解的连续性,$\forall n\in\mathbf{Z}^+$,Q_t^n 连续. 并且 Q_t^n 满足

$$Q_t^n = Q_0^n + \int_0^t -\partial Q_s^n/\partial a - \mu(a,s)Q_s^n + f(s,Q_s^n)\mathrm{d}s + \int_0^t g(s,Q_s^n))\mathrm{d}W_s^n + \int_0^t h(s,Q_s^n))\mathrm{d}N_s^n,\forall t\geqslant 0, \qquad (8)$$

其中 $W_s^n=W(s+t_n)-W(t_n)$ 是 Wiener 过程,Q_t^n 和 W_t^n 被定义在相同概率空间上.

根据上鞅的性质可得

$$E(|Q_t^n|^2) = E(|K_{t+t_n}|^2) \leqslant |K_0|^2,\forall t\geqslant 0,\forall n\in\mathbf{Z}^+.$$

由上鞅不等式[8],$\forall T\geqslant 0$ 和 $m\geqslant 0$ 得

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}^+}P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Q_t^n|\geqslant m\} \leqslant \sup_{n\in\mathbf{Z}^+}P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|K_{t+t_n}|^2\geqslant m^2\} \leqslant |K_0|^2/m^2. \qquad (9)$$

由 $m^2\in\mathscr{K}_\infty$ 得

$$\lim_{m\to+\infty}\sup_{n\in\mathbf{Z}^+}P\{|Q_0^n|\geqslant m\} = 0. \qquad (10)$$

根据(8)式和(9)式,$\forall T\geqslant 0$ 和 $\varepsilon>0$ 可证明下式成立[5]:

$$\lim_{\delta\to 0^+}\sup_{n\in\mathbf{Z}^+}P\{\max_{|t-s|\leqslant\delta t,s\in[0,T]}|Q_t^n-Q_s^n|>\varepsilon\} = 0. \qquad (11)$$

由(10)式,(11)式和文献[9]知,存在 1 个 $\{Q_t^n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 的子序列 $\{Q_t^{n_j}\}_{j\in\mathbf{Z}^+}$,概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$,$\hat{K}_t^{n_j}(j\in\mathbf{Z}^+)$ 被定义在该空间上. n 维连续过程 $\hat{K}_t$,当 $j\to+\infty$ a. s. ,$\hat{K}_t^{n_j}$ 收敛于 $\hat{K}_t$,$\hat{K}_t^{n_j}$ 和 $Q_t^{n_j}$ 是同分布,可写成

$$\hat{K}_t^{n_j}\overset{\mathscr{D}}{=}Q_t^{n_j},\forall j\in\mathbf{Z}^+.\tag{12}$$

由(8)式可以类似地证明[9],对于每一个 $h\in C_b^2(V,\mathbf{R})$ 和 $l\in\mathbf{Z}^+$,$M(t):=h(\hat{K}_{t\wedge\hat{\sigma}_l})-h(\hat{K}_0)-\int_0^{t\wedge\hat{\sigma}_l}\mathscr{L}h(\hat{K}_s)\,\mathrm{d}s$ 是鞅,其中 $\hat{\sigma}_l=\inf\{t\geqslant0\,|\,|\hat{K}_t|\geqslant l\}$. 由文献[9]知,$\hat{K}_0$ 在特定分布下,$\hat{K}_t$ 是系统(1)的弱解.

由于 $Q_0^{n_j}=K_{t_{n_j}},j\in\mathbf{Z}^+,\{|K_t|^2\geqslant l\}_{t\geqslant0}$ 是一致可积的,从而 $\{|Q_0^{n_j}|\}_{j\in\mathbf{Z}^+}$ 是一致可积的. 由(12)式得 $\{|\hat{K}_t^{n_j}|\}_{j\in\mathbf{Z}^+}$ 也是一致可积的. 由文献[10]得

$$E(|K_\infty|^2)=E(\lim_{j\to+\infty}|Q_0^{n_j}|^2)=\lim_{j\to+\infty}E(|Q_0^{n_j}|^2),$$

$$\hat{E}(|\hat{K}_0|^2)=\hat{E}(\lim_{j\to+\infty}|\hat{K}_0^{n_j}|^2)=\lim_{j\to+\infty}\hat{E}(|\hat{K}_0^{n_j}|^2),$$

结合(12)式可得 $\hat{E}(|\hat{K}_0|^2)=E(|K_\infty|^2)>0$. 所以 $\hat{K}_t$ 是 1 个非零弱解.

$\forall t\geqslant0$,由于 $Q_t^{n_j}=K_{t+t_{n_j}},j\in\mathbf{Z}^+,\{|K_t|^2\geqslant l\}_{t\geqslant0}$ 是一致可积的,从而 $\{|Q_t^{n_j}|\}_{j\in\mathbf{Z}^+}$ 是一致可积的. 由(12)式得 $\{|\hat{K}_t^{n_j}|\}_{j\in\mathbf{Z}^+}$ 也是一致可积的. 由文献[10]得

$$E(|K_\infty|^2)=E(\lim_{j\to+\infty}|Q_t^{n_j}|^2)=\lim_{j\to+\infty}E(|Q_t^{n_j}|^2),$$

$$\hat{E}(|\hat{K}_t|^2)=\hat{E}(\lim_{j\to+\infty}|K_t^{n_j}|^2)=\lim_{j\to+\infty}\hat{E}(|K_t^{n_j}|^2),$$

结合(12)式得,对于所有 $t\geqslant0$,有 $\hat{E}(|\hat{K}_t|^2)=E(|K_\infty|^2)>0$. 这意味着 $\mathscr{L}|\hat{K}|_t^2\equiv0$ a. s. ,这与定理 1 中假设条件(ii)矛盾. 故 $E(|K_\infty|^2)=0$. 又因为 $|K_\infty|^2\geqslant0$ a. s. ,$E(|K_\infty|^2)=0$,有 $|K_\infty|^2=0$ a. s. ,即 $\lim_{t\to+\infty}|K_t|^2=0$ a. s. ,故(7)式成立.

3　数值算例

通过例子对给出的结论进行验证(见图 1).

$$\begin{cases}\dfrac{\partial K(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial K(a,t)}{\partial a}=-\dfrac{2}{(1-a)^2}K(a,t)+\\ f(t,K(a,t))+g(t,K(a,t))\,\mathrm{d}W_t/\mathrm{d}t+\\ h(t,K(a,t))\,\mathrm{d}N_t/\mathrm{d}t,(a,t)\in[0,0.8]\times[0,8],\\ K(0,t)=\varphi(t)=\gamma(t)A(t)L(t)N(t),t\in[0,8],\\ K(a,0)=\exp[-1/(1-a)],a\in[0,0.8],\\ N(t)=\int_0^{0.8}K(a,t)\,\mathrm{d}a,t\in[0,8],\end{cases}$$

其中

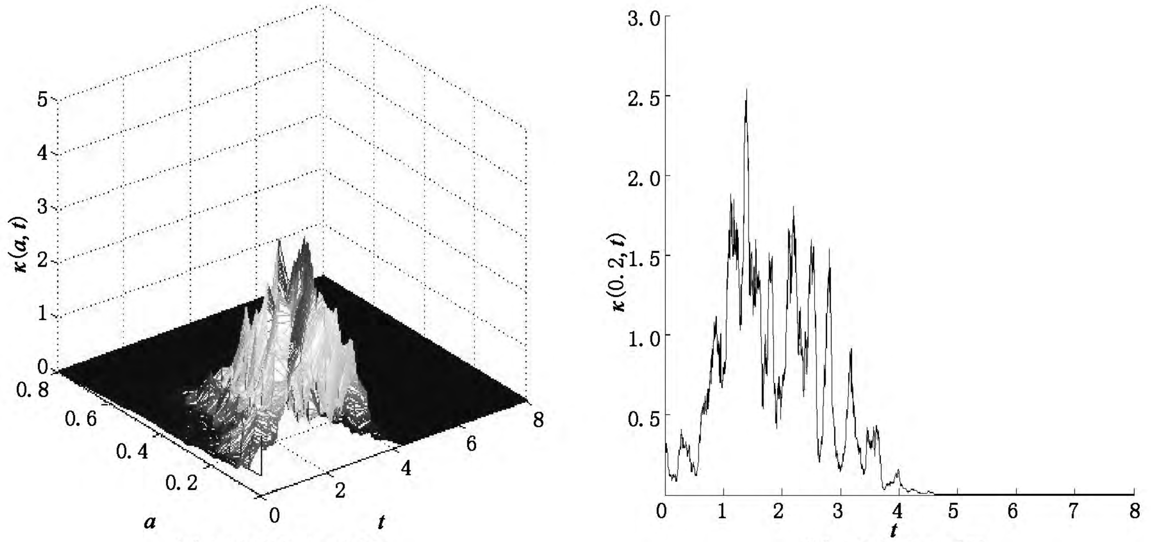
$\mu(a,t)=2/(1-a)^2,f(t,K(a,t))=-2K(a,t)$,$g(t,K(a,t))=K(a,t),h(t,K(a,t))=\sin K(a,t)$,$\gamma(t)A(t)=1,F\left(L(t),\int_0^A K(a,t)\,\mathrm{d}a\right)=(8-t)\int_0^A K(a,t)\,\mathrm{d}a,L(t)=8-t$.

易得

$$\begin{cases}2=\mu_0(a,t)\leqslant\mu(a,t)<\infty,(a,t)\ \text{在}\ Q\ \text{中},\\ \gamma(t)A(t)\leqslant\eta=1,\eta\geqslant0,\ t\ \text{在}\ [0,8]\ \text{中},\end{cases}$$

$$2\langle f(t,K_t),K_t\rangle+\|g(t,K_t)\|_2^2+\lambda|h(t,K_t)|^2\leqslant-\bar{\alpha}\|K_t\|^2+\beta|K_t|^2,(a,t)\in Q,\text{a. e. t.},$$

其中 $\lambda=0.8,\bar{\alpha}=3,\beta=0.8$,并且有 $f(t,0)=0$,$g(t,0)=0,A=0.8,F_1=8,m=1$.



(a) Δt=0.005, Δa=0.05　　(b) a=0.2, Δt=0.005

图 1　随机固定资产模型的数值模拟

故可以验证系统(1)满足假设条件(H1)~(H4),且满足$AF_1^2\eta^2-2\mu_0-\bar{\alpha}/m+\beta\leqslant 0$. 由此可知系统(1)满足定义2和定理1的条件,故系统(1)的解是全局渐进稳定的. 图1给出了当$\Delta t=0.005$,$\Delta a=0.05$时固定步长的数值解模拟. 图1(b)为图1(a)中当$a=0.2$时的图形,它是为了更直观地描述带有Poisson跳的固定资产模型解的稳定性.

4 结论

通常情况下,讨论数值解的稳定性采用的方法是构造Lyapunov函数,本文克服了构造Lyapunov函数的困难,直接给出了假设条件$|K_t|^2(AF_1^2\eta^2-2\mu_0(a,t)-\bar{\alpha}/m+\beta)\leqslant 0$,该方法更为简单有效. 文献[8]要求$\mathscr{L}V$是负定的,因此,定理1将应用于更广泛的条件. 另外,若定理1中$\{K_t\in V|\mathscr{L}V=0\}=\{0\}$成立,则将直接推导出文献[11]中在概率意义下的全局渐近稳定性的判定定理.

由定理1中的条件(i)和(ii)可以看出,随机噪声强度以及资本折旧率等变化都会对资本密度函数产生影响. 当资本折旧率$\mu>AF_1^2\eta^2/2-\bar{\alpha}/(2m)+\beta/2$时,资本密度函数$K(a,t)$趋于0,即该家公司的资本趋于0,这说明该公司破产. 数值模拟直观地表现出在一定条件的作用下资本密度函数$K(a,t)$的变化.

5 参考文献

[1] Zhang Qimi,Pang Wankai,Leung Pingkei. Exponential stability of numerical solutions for a class of stochastic age-dependent capital system with Poisson jumps[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2011,235(12):3369-3377.

[2] Zhang Qimi,Liu Yating,Li Xining. Strong convergence of split-step backward Euler method for stochastic age-dependent capital system with Markovian switching[J]. Applied Mathematics and Computation,2014,235(25):439-453.

[3] Zhang Qimin,Rathinasamy A. Convergence of numerical solutions for a class of stochastic age-dependent capital system with random jump magnitudes[J]. Applied Mathematics and Computation,2013,219(14):7297-7305.

[4] Tan Jianguo,Rathinasamy A,Pei Yongzhen. Convergence of the split-step θ-method for stochastic age-dependent population equations with Poisson jumps[J]. Applied Mathematics and Computation,2015,254:305-317.

[5] Li Fengzhong,Liu Yungang. Global stability and stabilization of more general stochastic nonlinear systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2014,413(2):841-855.

[6] Khalil'minskii R Z. Stochastic stability of differential equations[M]. Netherlands: Sijithoff and Noordhoff International Publishers,1980.

[7] Chow Y S,Teicher H. Probability theory: Independence,interchangeability,martingales[M]. New York: Springer-Verlag,1997.

[8] Mao Xuerong. Stochastic differential equations and their applications[M]. Chichester: Horwood Publishing. 1997.

[9] Ikdea N,Watanabe S. Stochastic differential equationsand diffusion processes[M]. Amsterdam: North-Holl and Publishing,1989.

[10] Liptser R S,Shiryaev A N. Statistics of random processes[M]. New York: Springer-Verlag,2001.

[11] Zhang Jian,Liu Yungang. Nonsmooth adaptive control design for a large class of uncertain high-order stochastic nonlinear systems[J]. Math Probl Eng,2012,2012(1):219-300.

The Global Stability of Stochastic Age-Dependent Capital System with Poisson Jumps

QIAO Nan,ZHANG Qimin*

(School of Mathematics and Statistics,Ningxia University,Yinchuan Ningxia 750021,China)

Abstract: The global stability of stochastic age-dependent capital system with Poisson jumps is discussed. And the criterion for judging the stability of the solution of the model is given. The advantage of this method is that the properties of the model of solutions are discussed in the lack of global Lipschitz condition. In the last section,the conclusion is proved by numerical examples.

Key words: stochastic age-dependent capital system; Poisson jumps; global asymptotically stable; global stability

(责任编辑: 曾剑锋)