第 40 卷 第 4 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 40 No. 4
2016 年 7 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jul. 2016

文章编号:1000-5862(2016)04-0331-07

具 $[p,q]$-φ 级亚纯系数的 2 阶线性微分方程解的复振荡

罗丽琴,郑秀敏*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:运用亚纯函数的 Nevanlinna 值分布理论和方法,对具 $[p,q]$-φ 级亚纯系数的 2 阶线性微分方程的亚纯解的性质进行了研究,得到了亚纯解的增长级和(不同)零极点收敛指数与系数的增长级的关系,所得结果推广了前人的相应结论.

关键词:线性微分方程;亚纯系数;$[p,q]$-φ 级;$[p,q]$-φ 收敛指数

中图分类号:O 174.52 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.04.01

0 引言与结果

本文使用 Nevanlinna 值分布理论中的标准记号和基本结果[1-2].

首先,引入测度的定义如下[3]:集合 $E\subset[1,+\infty)$ 的线测度和对数测度分别定义为 $mE=\int_E \mathrm{d}t$ 和 $m_lE=\int_E \mathrm{d}t/t$;其次,对复平面上的亚纯函数引入以下与 $[p,q]$-φ 级相关的常用定义,其中 p,q 都是正整数且满足 $p\geqslant q\geqslant 1$.

定义 1 ~ 定义 3 见文献[4].

定义 1 设 $\varphi(r):[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 为非减无界函数,则亚纯函数 $f(z)$ 的 $[p,q]$-φ 级和 $[p,q]$-φ 下级分别定义为

$$\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_p T(r,f)/\log_q\varphi(r),$$

$$\mu_{[p,q]}(f,\varphi)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\log_p T(r,f)/\log_q\varphi(r).$$

定义 2 设 $\varphi(r):[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 为非减无界函数,则亚纯函数 $f(z)$ 的零点和不同零点的 $[p,q]$-φ 收敛指数分别定义为

$$\lambda_{[p,q]}(f,\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_p n(r,1/f)/\log_q\varphi(r),$$

$$\bar{\lambda}_{[p,q]}(f,\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_p \bar{n}(r,1/f)/\log_q\varphi(r).$$

定义 3 设 $\varphi(r):[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 为非减无界函数,则亚纯函数 $f(z)$ 的极点和不同极点的 $[p,q]$-φ 收敛指数分别定义为

$$\lambda_{[p,q]}(1/f,\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_p n(r,f)/\log_q\varphi(r),$$

$$\bar{\lambda}_{[p,q]}(1/f,\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_p \bar{n}(r,f)/\log_q\varphi(r).$$

在本文中,若无特殊说明,都设 $\varphi(r):[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 为非减无界函数,且满足如下 2 个条件:(i) $\lim_{r\to\infty}\log_p r/\log_q\varphi(r)=0$;(ii) 对某个 $\alpha>1$,$\lim_{r\to\infty}\log_q\varphi(\alpha r)/\log_q\varphi(r)=1$ 成立.

亚纯函数的 $[p,q]$-φ 级和 $[p,q]$-φ 收敛指数还具有以下性质[4-5].

性质 1 设 $f_1(z),f_2(z)$ 为亚纯函数且满足 $\sigma_{[p,q]}(f_1,\varphi)=a$,$\sigma_{[p,q]}(f_2,\varphi)=b$,则

(i) $\sigma_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi)\leqslant\max\{a,b\}$,
$\sigma_{[p,q]}(f_1f_2,\varphi)\leqslant\max\{a,b\}$;

(ii) 又若 $a\neq b$,则 $\sigma_{[p,q]}(f_1+f_2,\varphi)=\max\{a,b\}$,$\sigma_{[p,q]}(f_1f_2,\varphi)=\max\{a,b\}$.

性质 2 (i) 若 $f(z)$ 为亚纯函数,则

$$\lambda_{[p,q]}(f,\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p n(r,1/f)}{\log_q\varphi(r)}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p N(r,1/f)}{\log_q\varphi(r)},$$

$$\bar{\lambda}_{[p,q]}(f,\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p \bar{n}(r,1/f)}{\log_q\varphi(r)}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p \bar{N}(r,1/f)}{\log_q\varphi(r)};$$

(ii) 又若 $f(z)$ 为整函数,则

$$\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p T(r,f)}{\log_q\varphi(r)}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log_q\varphi(r)},$$

$$\mu_{[p,q]}(f,\varphi)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p T(r,f)}{\log_q\varphi(r)}=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log_q\varphi(r)}.$$

收稿日期:2016-03-21

基金项目:国家自然科学基金(11301233)和江西省自然科学基金(20151BAB201004)资助项目.

通信作者:郑秀敏(1980-),女,江西上饶人,副教授,博士,主要从事复分析方向的研究.

特别地,单位圆内亚纯函数的 $[p,q]$-φ 级和 $[p,q]$-φ 收敛指数也具有上述类似的性质[6-7].

下面回顾一下关于 2 阶齐次线性微分方程

$$f''+A(z)f=0 \tag{1}$$

的一些结果.

文献[3]中研究了方程(1),当系数为具迭代级的亚纯函数时,得到如下结果.

定理 A 设 $A(z)$ 为亚纯函数且满足 $0<i(A)=n<\infty$ 和 $\bar{\lambda}_n(A)<\sigma_n(A)\neq 0$. 若 $f(z)$ 为方程(1)的非零亚纯解,则 $\sigma_n(A)\leqslant\max\{\bar{\lambda}_n(f),\bar{\lambda}_n(1/f)\}$. 又若 $f(z)$ 满足 $\delta(\infty,f)>0$ 或 $f(z)$ 的极点重数一致有界,则 $\max\{\lambda_{n+1}(f),\lambda_{n+1}(1/f)\}\leqslant\sigma_n(A)\leqslant\max\{\bar{\lambda}_n(f),\bar{\lambda}_n(1/f)\}$.

定理 B 设 $A(z)$ 为亚纯函数且满足 $0<i(A)=n<\infty$, f_1 与 f_2 为方程(1)的 2 个线性无关亚纯解且满足 $\max\{\lambda_n(f_1),\lambda_n(f_2)\}<\sigma_n(A)$. 又设 $\Pi(z)$ 为非零亚纯函数且满足 $i(\Pi)<n$ 或 $\sigma_n(\Pi)<\sigma_n(A)$, g_1 与 g_2 为方程

$$g''+(A(z)+\Pi(z))g=0 \tag{2}$$

的 2 个线性无关亚纯解. 记 $F=f_1f_2$ 和 $E=g_1g_2$,若 F 和 E 满足 $\max\{i_\lambda(1/F),i_\lambda(1/E)\}<n$ 或 $\max\{\lambda_n(1/F),\lambda_n(1/E)\}<\sigma_n(A)$,则

$$\max\{\lambda_n(f_1),\lambda_n(f_2)\}\geqslant\sigma_n(A).$$

文献[4]中也研究了方程(1),当系数为具 $[p,q]$-φ 级的整函数时,得到如下结果.

定理 C 设 $A(z)$ 为整函数且满足 $\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)>0$,则方程(1)的任意非平凡解 $f(z)$ 满足

$$\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(A,\varphi).$$

定理 D 设 $A(z)$ 为整函数且满足 $\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)>0$, f_1 与 f_2 为方程(1)的 2 个线性无关解. 记 $F=f_1f_2$,则 $\max\{\lambda_{[p+1,q]}(f_1,\varphi),\lambda_{[p+1,q]}(f_2,\varphi)\}=\lambda_{[p+1,q]}(F,\varphi)=\sigma_{[p+1,q]}(F,\varphi)\leqslant\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$. 又若 $\sigma_{[p+1,q]}(F,\varphi)<\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$,则方程(1)所有形如 $f=c_1f_1+c_2f_2$(其中 $c_1c_2\neq 0$)的解 $f(z)$ 满足

$$\lambda_{[p+1,q]}(f,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(A,\varphi).$$

受上述结果启发,继续研究方程(1)和(2)的解的性质. 首先,考虑将定理 C 和定理 D 中的整函数系数推广至亚纯函数系数,得到定理 1 和定理 2.

定理 1 设 $A(z)$ 为亚纯函数且满足 $\lambda_{[p,q]}(1/A,\varphi)<\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$,若 $f(z)$ 为方程(1)的非零亚纯解且满足 $\lambda_{[p,q]}(1/f,\varphi)<\mu_{[p,q]}(f,\varphi)$,则 $\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$.

定理 2 设 $A(z)$ 为亚纯函数且满足 $\lambda_{[p,q]}(1/A,\varphi)<\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$, f_1 与 f_2 为方程(1)的 2 个线性无关解且满足 $\lambda_{[p,q]}(1/f_i,\varphi)<\mu_{[p,q]}(f_i,\varphi)$, $i=1,2$. 记 $F=f_1f_2$,则 $\bar{\lambda}_{[p+1,q]}(F,\varphi)=\lambda_{[p+1,q]}(F,\varphi)=\sigma_{[p+1,q]}(F,\varphi)\leqslant\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$.

其次,考虑将定理 A 和定理 B 中的迭代情形推广至 $[p,q]$-φ 情形,得到定理 3 和定理 4.

定理 3 设 $A(z)$ 为亚纯函数且满足 $\bar{\lambda}_{[p,q]}(A,\varphi)<\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$,若 $f(z)$ 为方程(1)的非零亚纯解,则 $\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)\leqslant\max\{\bar{\lambda}_{[p,q]}(f,\varphi),\bar{\lambda}_{[p,q]}(1/f,\varphi)\}$. 又若 $f(z)$ 还满足 $\lambda_{[p,q]}(1/f,\varphi)<\mu_{[p,q]}(f,\varphi)$,则

$$\max\{\lambda_{[p+1,q]}(f,\varphi),\lambda_{[p+1,q]}(1/f,\varphi)\}\leqslant$$
$$\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)\leqslant\max\{\bar{\lambda}_{[p,q]}(f,\varphi),\bar{\lambda}_{[p,q]}(1/f,\varphi)\}.$$

定理 4 设 $A(z)$ 为亚纯函数, f_1 与 f_2 为方程(1)的 2 个线性无关亚纯解且满足 $\max\{\lambda_{[p,q]}(f_1,\varphi),\lambda_{[p,q]}(f_2,\varphi)\}<\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$. 又设 $\Pi(z)$ 为非零亚纯函数且满足 $\sigma_{[p,q]}(\Pi,\varphi)<\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$, g_1 与 g_2 为方程(2)的 2 个线性无关亚纯解. 记 $F=f_1f_2$ 和 $E=g_1g_2$,若 F 和 E 满足 $\max\{\lambda_{[p,q]}(1/F,\varphi),\lambda_{[p,q]}(1/E,\varphi)\}<\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$,则

$$\max\{\lambda_{[p,q]}(g_1,\varphi),\lambda_{[p,q]}(g_2,\varphi)\}\geqslant\sigma_{[p,q]}(A,\varphi).$$

1 引理

引理 1[2] 设 $F(r)$ 与 $G(r)$ 为 $(0,+\infty)$ 中的非减函数. 如果(i) $F(r)\leqslant G(r)$, $r\notin E$, E 是线测度有限的集合,或(ii)当 $r\notin E\cup(0,1]$ 时, $F(r)\leqslant G(r)$,其中 $E\subset(1,+\infty)$ 是对数测度有限的集合,则对任给的常数 $\alpha>1$, $\exists r_0>0$,当 $r>r_0$ 时,有 $F(r)\leqslant G(\alpha r)$.

引理 2[4] 设 $f(z)$ 为整函数且满足 $\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=\sigma$ 和 $\mu_{[p,q]}(f,\varphi)=\mu$,记 $\nu_f(r)$ 为 $f(z)$ 的中心指标,则 $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log_p\nu_f(r)}{\log_q\varphi(r)}=\sigma$, $\varliminf\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log_p\nu_f(r)}{\log_q\varphi(r)}=\mu$.

引理 3[9] 设 $f(z)$ 为超越亚纯函数, $\Gamma=\{(k_1,j_1),\cdots,(k_q,j_q)\}$ 是不同整数对的有限集合,满足 $k_i>j_i\geqslant 0$, $i=1,\cdots,q$, $\alpha>1$ 是给定的实常数,则存在对数测度有限的集合 $E\subset(1,+\infty)$ 及仅依赖于 α 和 Γ 的常数 $B>0$,使得对所有满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E$ 的 z 及所有的 $(k,j)\in\Gamma$,有

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\leqslant B\left(\frac{T(\alpha r,f)}{r}\log^\alpha r\log T(\alpha r,f)\right)^{k-j}.$$

引理 4[4]　设 $f(z)$ 为超越亚纯函数且满足 $\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=\sigma$,$k$ 为任意正整数,则 $\forall\varepsilon>0$,存在线测度有限的集合 $E\subset(0,+\infty)$,使得对所有的 $r\notin E$,有

$$m(r,f^{(k)}/f)=O(\exp_{p-1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}).$$

引理 5[10]　设 $f(z)$ 为亚纯函数且不具有形式 $e^{\alpha z+\beta}$ 或 $(\alpha z+\beta)^{\lambda}$,其中 λ 为复数,则

$$T(r,f/f')\leqslant 3\bar{N}(r,f)+7\bar{N}(r,1/f)+4\bar{N}(r,1/f'')+S(r,f/f'),$$

其中 $S(r,f/f')=o(T(r,f/f'))$,$r\to\infty$ 且 $r\notin E$,$mE<\infty$.

引理 6[11]　设 $A(z)$ 在单连通区域 D 内亚纯,且方程(1)在 D 内有 2 个线性无关解 f_1 与 f_2. 记 $F=f_1f_2$,若 D 是整个复平面,则 F 满足如下估计

$$T(r,F)=O(\bar{N}(r,1/F)+T(r,A)+\log r),$$

其中 $r\notin E$,$mE<\infty$.

引理 7　设 $f(z)$ 为亚纯函数且满足 $\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)<\infty$,则 $\forall\varepsilon>0$,存在对数测度无限的集合 $E\subset(1,+\infty)$,使得对于所有的 $r\in E$,有

$$\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in E}}\log_p T(r,f)/\log_q\varphi(r).$$

证　采用类似于文献[12,引理 3.8]的证明方法. 由 $[p,q]$-φ 级定义可知,存在一个趋于无穷的点列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 同时满足 $(1+1/n)r_n<r_{n+1}$ 和 $\lim\limits_{r_n\to\infty}\log_p T(r_n,f)/\log_q\varphi(r_n)=\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)$. 从而,存在充分大的正整数 n_1,使得当 $n>n_1$,$r\in[r_n,(1+1/n)r_n]$ 时,有

$$\frac{\log_q\varphi(r_n)}{\log_q\varphi((1+1/n)r_n)}\frac{\log_p T(r_n,f)}{\log_q\varphi(r_n)}=\frac{\log_p T(r_n,f)}{\log_q\varphi((1+1/n)r_n)}\leqslant\frac{\log_p T(r,f)}{\log_q\varphi(r)}.\qquad(3)$$

令 $E=\bigcup\limits_{n=n_1}^{\infty}[r_n,(1+1/n)r_n]$,则由(3)式及 $\varphi(r)$ 满足的条件(ii)可知

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in E}}\frac{\log_p T(r,f)}{\log_q\varphi(r)}\geqslant\lim_{r_n\to\infty}\frac{\log_p T(r_n,f)}{\log_q\varphi(r_n)}=\sigma_{[p,q]}(f,\varphi).$$

又 $\varlimsup\limits_{\substack{r\to\infty\\ r\in E}}\log_p T(r,f)/\log_q\varphi(r)\leqslant\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)$,故 $\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ r\in E}}\log_p T(r,f)/\log_q\varphi(r)$,且 $m_lE=\sum\limits_{n=n_1}^{\infty}\int_{r_n}^{(1+1/n)r_n}\frac{dt}{t}=\sum\limits_{n=n_1}^{\infty}\log(1+1/n)=\infty$

引理 7 证毕.

引理 8[2,4,13]　设 $f(z)$ 为整函数且满足 $\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=\sigma<\infty$,则存在整函数 $U(z)$ 和 $g(z)$ 使得 $f(z)=U(z)e^{g(z)}$,且满足

$\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=\max\{\sigma_{[p,q]}(U,\varphi),\sigma_{[p,q]}(e^g,\varphi)\}$ 和 $\sigma_{[p,q]}(U,\varphi)=\varlimsup\limits_{r\to\infty}\log_p N(r,1/f)/\log_q\varphi(r)$.

此外,$\forall\varepsilon>0$,有

$$\log|U(z)|\geqslant-\exp_p\{(\sigma+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\},$$

其中 $|z|=r\notin E$,$mE<\infty$

引理9　设 $f(z)$ 为亚纯函数且满足 $\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=\sigma<\infty$,则存在整函数 $U(z)$,$V(z)$ 和 $g(z)$ 使得

$f(z)=U(z)e^{g(z)}/V(z)$,且满足 $\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=\max\{\sigma_{[p,q]}(U,\varphi),\sigma_{[p,q]}(V,\varphi),\sigma_{[p,q]}(e^g,\varphi)\}$ 和 $\lambda_{[p,q]}(f,\varphi)=\lambda_{[p,q]}(U,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(U,\varphi)$,$\lambda_{[p,q]}(1/f,\varphi)=\lambda_{[p,q]}(V,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(V,\varphi)$.

此外,$\forall\varepsilon>0$,有

$$\exp\{-\exp_p\{(\sigma+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}\}\leqslant|f(z)|\leqslant\exp_{p+1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\},\qquad(4)$$

其中 $|z|=r\notin E$,$mE<\infty$

证　采用类似于文献[12,引理 3.7]的证明方法证明(4)式,其余结论的证明同理于文献[2,4]. 令 $f(z)=U(z)e^{g(z)}/V(z)$,其中 $U(z)$,$V(z)$ 分别是 $f(z)$ 的非零零点和极点的典型乘积,则当 $|z|=r$ 充分大时,有

$$|U(z)|\leqslant\exp_{p+1}\{(\sigma+\varepsilon/3)\log_q\varphi(r)\},\qquad(5)$$

$$|V(z)|\leqslant\exp_{p+1}\{(\sigma+\varepsilon/3)\log_q\varphi(r)\},\qquad(6)$$

$$|e^{g(z)}|\leqslant\exp_{p+1}\{(\sigma+\varepsilon/3)\log_q\varphi(r)\}.\qquad(7)$$

另一方面,由引理 8 可知

$$|U(z)|\geqslant\exp\{-\exp_p\{(\sigma+\varepsilon/3)\log_q\varphi(r)\}\},\quad r\notin E_1,mE_1<\infty,\qquad(8)$$

$$|V(z)|\geqslant\exp\{-\exp_p\{(\sigma+\varepsilon/3)\log_q\varphi(r)\}\},\quad r\notin E_2,mE_2<\infty\qquad(9)$$

又因 $\sigma_{[p-1,q]}(g,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(e^g,\varphi)\leqslant\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=\sigma$,且 $|e^{g(z)}|\geqslant e^{-|g(z)|}$,故当 $|z|=r\notin E_1\cup E_2$ 且 r 充分大时,有

$$|e^{g(z)}|\geqslant e^{-|g(z)|}\geqslant\exp\{-\exp_p\{(\sigma+\varepsilon/3)\log_q\varphi(r)\}\}.\qquad(10)$$

记 $E=E_1\cup E_2$,则由(5)~(10)式可知(4)式成立. 引理 9 证毕.

引理 10　设 $f(z)$ 为亚纯函数且可表示为 $f(z)=g(z)/d(z)$,其中 $g(z)$ 和 $d(z)$ 均为整函数且满足 $\mu_{[p,q]}(g,\varphi)=\mu_{[p,q]}(f,\varphi)=\mu\leqslant\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(g,\varphi)<\infty$ 和 $\sigma_{[p,q]}(d,\varphi)=\rho<\mu$. 又设 z 为 $|z|=r$ 上满足 $|g(z)|=M(r,g)$ 的点,$\nu_g(r)$ 表示整

函数 $g(z)$ 的中心指标,则存在对数测度有限的集合 $E\subset(1,+\infty)$,使得当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E$ 时,有

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n(1+o(1)),\quad n\in\mathbf{N}.\tag{11}$$

证 采用类似于文献[14,引理3.5]的证明方法. 对 $f(z)=g(z)/d(z)$ 使用数学归纳法得到

$$f^{(n)}=\frac{g^{(n)}}{d}+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{g^{(j)}}{d}\sum_{j_1,\cdots,j_n}C_{j,j_1,\cdots,j_n}\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n},$$

其中 $C_{j,j_1,\cdots,j_n}$ 为常数,且 $j+j_1+\cdots+nj_n=n$. 因此,

$$\frac{f^{(n)}}{f}=\frac{g^{(n)}}{g}+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{g^{(j)}}{g}\sum_{j_1,\cdots,j_n}C_{j,j_1,\cdots,j_n}\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}.\tag{12}$$

由 Wiman-Valiron 理论,存在对数测度有限的集合 $E_1\subset(1,+\infty)$,使得当 z 满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$ 和 $|g(z)|=M(r,g)$ 时,有

$$\frac{g^{(j)}(z)}{g(z)}=\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j(1+o(1)),\quad j=1,\cdots,n.\tag{13}$$

结合(12)式和(13)式,得到

$$\frac{f^{(n)}}{f}=\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n(1+o(1))+\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^{j-n}(1+o(1))\sum_{j_1,\cdots,j_n}C_{j,j_1,\cdots,j_n}\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}).\tag{14}$$

又因 $\sigma_{[p,q]}(d,\varphi)=\rho<\mu$,故 $\forall\varepsilon(0<5\varepsilon<\mu-\rho)$ 及充分大的 r,有

$$T(\alpha_1 r,d)\leqslant\exp_p\{(\rho+\varepsilon)\log_q\varphi(\alpha_1 r)\},\tag{15}$$

其中 $1<\alpha_1<\alpha$. 由引理3及(15)式可知,存在对数测度有限的集合 $E_2\subset(1,+\infty)$,使得对满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_2$ 的所有 z,有

$$|d^{(m)}(z)/d(z)|\leqslant B(T(\alpha_1 r,d))^k\leqslant\exp_p\{(\rho+2\varepsilon)\log_q\varphi(\alpha_1 r)\},\quad m=1,\cdots,n.\tag{16}$$

又由引理2及 $\mu_{[p,q]}(g,\varphi)=\mu_{[p,q]}(f,\varphi)=\mu>\rho$ 可知,当 r 充分大时,有

$$\nu_g(r)>\exp_p\{(\mu-\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}.\tag{17}$$

从而,由(16)和(17)式得到,当 z 满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1\cup E_2$,$r\to\infty$ 和 $|g(z)|=M(r,g)$ 时,有

$$|(\nu_g(r)/z)^{j-n}\cdot(d'/d)^{j_1}\cdot\cdots\cdot(d^{(n)}/d)^{j_n}|\leqslant(r/\nu_g(r))^{n-j}\cdot\exp_p\{(\rho+3\varepsilon)\log_q\varphi(\alpha_1 r)\}\leqslant r^{n-j}\cdot\frac{\exp_p\{(\rho+3\varepsilon)\log_q\varphi(\alpha_1 r)\}}{\exp_p\{(\mu-2\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}}\to 0.\tag{18}$$

将(18)式代入(14)式立得(11)式. 引理10证毕.

引理11[11] 设 $A(z)$ 在单连通区域 D 内亚纯且方程(1)在 D 内有2个线性无关解 f_1 与 f_2,记 $F=f_1f_2$,$C=W(f_1,f_2)$,则 $A\equiv\langle F,C\rangle$,其中

$$\langle F,C\rangle=\frac{(F')^2-C^2-2FF''}{4F^2}.$$

2 定理的证明

定理1的证明 设 $f(z)$ 为方程(1)的非零亚纯解且满足 $\lambda_{[p,q]}(1/f,\varphi)<\mu_{[p,q]}(f,\varphi)$. 又记 $\sigma=\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$.

一方面,由 Hadamard 分解定理可将 $f(z)$ 表示为 $f(z)=g(z)/d(z)$,其中 $g(z)$ 和 $d(z)$ 均为整函数,$d(z)$ 为 $f(z)$ 的极点构成的典型乘积且满足 $\sigma_{[p,q]}(d,\varphi)=\lambda_{[p,q]}(1/f,\varphi)<\mu_{[p,q]}(f,\varphi)=\mu_{[p,q]}(g,\varphi)\leqslant\sigma_{[p,q]}(g,\varphi)=\sigma_{[p,q]}(f,\varphi)$. 根据引理10,取点 z 满足 $|z|=r$ 及 $|g(z)|=M(r,g)$,则存在对数测度有限的集合 $E_1\subset(1,+\infty)$,使得当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$ 时,有

$$f''(z)/f(z)=(\nu_g(r)/z)^2(1+o(1)).\tag{19}$$

根据引理9,$\forall\varepsilon>0$,存在线测度有限的集合 E_2,使得当 $|z|=r\notin E_2$ 时,有

$$|A(z)|\leqslant\exp_{p+1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}.\tag{20}$$

则由方程(1)或(19)和(20)式可得,当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1\cup E_2$ 且 $|g(z)|=M(r,g)$ 时,有

$$(\nu_g(r)/r)^2(1+o(1))=|A(z)|\leqslant\exp_{p+1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\},$$

即

$$\nu_g(r)\leqslant r\exp_{p+1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}.\tag{21}$$

由(21)式及引理1可知,$\forall\alpha_1(1<\alpha_1<\alpha)$,$\exists r_0>0$,当 $r>r_0$ 时,有

$$\nu_g(r)\leqslant\alpha_1 r\exp_{p+1}\{(\sigma+\varepsilon)\log_q\varphi(\alpha_1 r)\}.\tag{22}$$

又由(22)式和引理2及 $\varphi(r)$ 满足的条件(i)和(ii)可得

$$\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)=\sigma_{[p+1,q]}(g,\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_{p+1}\nu_g(r)/\log_q\varphi(r)\leqslant\sigma+\varepsilon.$$

再由 ε 的任意性可得 $\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)\leqslant\sigma$.

另一方面,由方程(1)及对数导数引理可得

$$m(r,A)=m(r,-f''/f)=O(\log rT(r,f)),\tag{23}$$

其中 $r\notin E_3$,$mE_3<\infty$. 又因 $\lambda_{[p,q]}(1/A,\varphi)<\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$,故 $\forall\varepsilon(0<2\varepsilon<\sigma-\lambda_{[p,q]}(1/A,\varphi))$ 及充分大的 r,有

$$N(r,A) \leqslant \exp_p\{(\lambda_{[p,q]}(1/A,\varphi)+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}. \tag{24}$$

由引理 7 可知,存在对数测度无限的集合 $E_4 \subset [1,+\infty)$,使得当 $r \in E_4$ 时,有

$$T(r,A) \geqslant \exp_p\{(\sigma-\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}. \tag{25}$$

结合(23) ~ (25) 式得到,当 $r \in E_4 \backslash E_3$ 且 r 充分大时,有

$$\exp_p\{(\sigma-\varepsilon)\log_q\varphi(r)\} \leqslant O(\log rT(r,f)) + \exp_p\{(\lambda_{[p,q]}(1/A,\varphi)+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}, \tag{26}$$

即$\exp_p\{(\sigma-\varepsilon)\log_q\varphi(r)\} \leqslant O(\log rT(r,f))$. 由(26) 式可知 $\sigma-2\varepsilon \leqslant \sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)$. 再由 ε 的任意性可得 $\sigma \leqslant \sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi)$. 因此

$$\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi) = \sigma = \sigma_{[p,q]}(A,\varphi).$$

定理 1 证毕.

定理2 的证明　记$\sigma = \sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$. 由定理1 得 $\sigma_{[p+1,q]}(f_1,\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(f_2,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(A,\varphi) = \sigma$. 又因$\bar\lambda_{[p+1,q]}(F,\varphi) \leqslant \lambda_{[p+1,q]}(F,\varphi) \leqslant \sigma_{[p+1,q]}(F,\varphi) \leqslant \max\{\sigma_{[p+1,q]}(f_1,\varphi),\sigma_{[p+1,q]}(f_2,\varphi)\} = \sigma$,故只需证$\bar\lambda_{[p+1,q]}(F,\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(F,\varphi)$ 即可.

反设$\bar\lambda_{[p+1,q]}(F,\varphi) < \sigma_{[p+1,q]}(F,\varphi)$. 由文献[4-15] 可知

$$F^2 = C^2\left(\left(\frac{F'}{F}\right)^2 - 2\frac{F''}{F} - 4A\right)^{-1}, \tag{27}$$

其中 C 为非零常数. 因此,由(27) 式得到

$$2T(r,F) \leqslant T(r,F''/F) + 2T(r,F'/F) + T(r,A) + O(1) \leqslant 2m(r,F'/F) + m(r,F''/F) + N(r,F'/F) + N(r,F''/F) + N(r,A) + m(r,A) + O(1) = O(m(r,F'/F) + m(r,F''/F) + \bar N(r,1/F) + \bar N(r,F) + N(r,A) + m(r,A)). \tag{28}$$

由 $[p,q]$ -φ 级的定义可知,当 r 充分大时,有

$$m(r,A) \leqslant T(r,A) \leqslant \exp_p\{(\sigma+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}. \tag{29}$$

由引理4 可知,存在线测度有限的集合 E_5,使得当 $r \notin E_5$ 时,有

$$m(r,F'/F) = O(\exp_p\{(\sigma+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}),$$
$$m(r,F''/F) = O(\exp_p\{(\sigma+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}). \tag{30}$$

又因$\lambda_{[p,q]}(1/A,\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A,\varphi) = \sigma$,故当 r 充分大时,有

$$N(r,A) \leqslant \exp_p\{(\lambda_{[p,q]}(1/A,\varphi)+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}. \tag{31}$$

因$\lambda_{[p,q]}(1/f_i,\varphi) < \mu_{[p,q]}(f_i,\varphi)$,$i=1,2$,故当 r 充分大时,有

$$\bar N(r,F) \leqslant \bar N(r,f_1) + \bar N(r,f_2) \leqslant \exp\{(\max\{\lambda_{[p,q]}(1/f_1,\varphi),\lambda_{[p,q]}(1/f_2,\varphi)\} + \varepsilon)\log_q\varphi(r)\}. \tag{32}$$

选取β 满足$\bar\lambda_{[p+1,q]}(F,\varphi) < \beta < \sigma_{[p+1,q]}(F,\varphi)$,则当 r 充分大时,有

$$\bar N(r,1/F) \leqslant \exp_{[p+1,q]}\{\beta\log_q\varphi(r)\}. \tag{33}$$

将(29) ~ (33) 式代入(28) 式可得,当 $r \notin E_5$ 且 r 充分大时,有 $T(r,F) = O(\exp_{p+1}\{\beta\log_q\varphi(r)\})$,即 $\sigma_{[p+1,q]}(F,\varphi) \leqslant \beta < \sigma_{[p+1,q]}(F,\varphi)$,矛盾. 因此,$\bar\lambda_{[p+1,q]}(F,\varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(F,\varphi) = \sigma_{[p+1,q]}(F,\varphi)$.

定理 2 证毕.

定理3 的证明　设$f(z)$ 为方程(1) 的非零亚纯解. 因$\sigma_{[p,q]}(A,\varphi) > 0$,故$f(z)$ 既不可能为有理函数也不可能具有形式 $e^{\alpha z+\beta}$ 或$(\alpha z+\beta)^\lambda$. 根据引理 5 得到

$$T(r,f/f') \leqslant O(\bar N(r,f) + \bar N(r,1/f) + \bar N(r,1/f'')),$$

其中 $r \notin E_6$,$mE_6 < \infty$ 又由方程(1) 可知 $\bar N(r,1/f'') \leqslant \bar N(r,1/f) + \bar N(r,1/A)$. 从而

$$T(r,f/f') \leqslant O(\bar N(r,f) + \bar N(r,1/f) + \bar N(r,1/A)),\quad r \notin E_6, mE_6 < \infty \tag{34}$$

反设 $\sigma_{[p,q]}(A,\varphi) > \max\{\bar\lambda_{[p,q]}(f,\varphi),\bar\lambda_{[p,q]}(1/f,\varphi)\}$,由已知$\bar\lambda_{[p,q]}(A,\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$ 及(34) 式可知

$$\sigma_{[p,q]}(f/f',\varphi) \leqslant \max\{\bar\lambda_{[p,q]}(f,\varphi),\bar\lambda_{[p,q]}(1/f,\varphi),\bar\lambda_{[p,q]}(A,\varphi)\} < \sigma_{[p,q]}(A,\varphi). \tag{35}$$

令$\eta = f'/f$,则由(35) 式和第一基本定理得到 $\sigma_{[p,q]}(\eta,\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$. 又由方程(1) 可知

$$T(r,A) = T(r,-(\eta'+\eta^2)) \leqslant T(r,\eta') + 2T(r,\eta) + O(1),$$

即$\sigma_{[p,q]}(A,\varphi) \leqslant \max\{\sigma_{[p,q]}(\eta,\varphi),\sigma_{[p,q]}(\eta',\varphi)\} = \sigma_{[p,q]}(\eta,\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$,矛盾. 因此

$$\sigma_{[p,q]}(A,\varphi) \leqslant \max\{\bar\lambda_{[p,q]}(f,\varphi),\bar\lambda_{[p,q]}(1/f,\varphi)\}.$$

又若$\lambda_{[p,q]}(1/f,\varphi) < \mu_{[p,q]}(f,\varphi)$,则由定理 1 的前半部分证明可知$\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi) \leqslant \sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$. 从而

$$\max\{\lambda_{[p+1,q]}(f,\varphi),\lambda_{[p+1,q]}(1/f,\varphi)\} \leqslant \sigma_{[p,q]}(A,\varphi) \leqslant \max\{\bar\lambda_{[p,q]}(f,\varphi),\bar\lambda_{[p,q]}(1/f,\varphi)\}.$$

定理 3 证毕.

定理4 的证明　因$E = g_1g_2$,故$\lambda_{[p,q]}(E,\varphi) \leqslant \max\{\lambda_{[p,q]}(g_1,\varphi),\lambda_{[p,q]}(g_2,\varphi)\}$,下面只需证

$\lambda_{[p,q]}(E,\varphi) \geq \sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$.

反设 $\lambda_{[p,q]}(E,\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$. 由已知得到 $\lambda_{[p,q]}(F,\varphi) \leq \max\{\lambda_{[p,q]}(f_1,\varphi),\lambda_{[p,q]}(f_2,\varphi)\} < \sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$,则 $\forall \varepsilon > 0$ 及充分大的 r,有

$$\overline{N}(r,1/F) \leq \exp_p\{(\lambda_{[p,q]}(F,\varphi)+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\} \tag{36}$$

和

$$T(r,A) \leq \exp_p\{(\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\}. \tag{37}$$

由引理 6 可知

$$T(r,F) = O(\overline{N}(r,1/F)+T(r,A)+\log r), \tag{38}$$

其中 $r \notin E_7$, $mE_7 < \infty$ 结合(36) ~ (38) 式得到

$$T(r,F) = O(\exp_p\{(\sigma_{[p,q]}(A,\varphi)+\varepsilon)\log_q\varphi(r)\} + \log r),$$

其中 $r \notin E_7$, $mE_7 < \infty$ 又由引理 1 及 $\varphi(r)$ 满足的条件(i) 和(ii) 可知 $\sigma_{[p,q]}(F,\varphi) \leq \sigma_{[p,q]}(A,\varphi)+\varepsilon$. 再由 ε 的任意性可得

$$\sigma_{[p,q]}(F,\varphi) \leq \sigma_{[p,q]}(A,\varphi). \tag{39}$$

由引理 11 可知

$$4A = \frac{(F')^2 - C_1^2 - 2FF''}{F^2} \equiv 4\langle F,C_1\rangle, \tag{40}$$

其中 $C_1 = W(f_1,f_2) \neq 0$. 由(40) 式可得

$$T(r,A) \leq 2T(r,F'/F)+T(r,F''/F)+2T(r,1/F)+O(1) \leq O(T(r,F)+T(r,F')+T(r,F'')). \tag{41}$$

由(41) 式可得 $\sigma_{[p,q]}(F,\varphi) \geq \sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$. 再结合(39) 式得到 $\sigma_{[p+1,q]}(f,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$.

同理可得

$$4(A+\Pi) = \frac{(E')^2 - C_2^2 - 2EE''}{E^2} \tag{42}$$

和

$$\sigma_{[p,q]}(E,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(A+\Pi,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(A,\varphi),$$

其中 $C_2 = W(g_1,g_2) \neq 0$.

由已知及引理 9 可将 F 和 E 表示成

$$F = Qe^P/U, E = Re^S/V, \tag{43}$$

其中 Q,U,R,V,P,S 均为整函数且满足

$$\lambda_{[p,q]}(Q,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(Q,\varphi) = \lambda_{[p,q]}(F,\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A,\varphi), \tag{44}$$

$$\sigma_{[p,q]}(R,\varphi) = \lambda_{[p,q]}(R,\varphi) = \lambda_{[p,q]}(E,\varphi) < \sigma_{[p,q]}(A,\varphi) \tag{45}$$

和

$$\max\{\lambda_{[p,q]}(1/F,\varphi),\lambda_{[p,q]}(1/E,\varphi)\} = \max\{\sigma_{[p,q]}(U,\varphi),\sigma_{[p,q]}(V,\varphi)\} < \sigma_{[p,q]}(A,\varphi). \tag{46}$$

因 $\sigma_{[p,q]}(F,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(E,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(A,\varphi)$,故由(44) ~ (46) 式及引理 9 可得

$$\sigma_{[p,q]}(e^P,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(e^S,\varphi) = \sigma_{[p,q]}(A,\varphi).$$

将(43) 式代入(40) 式,并应用文献[16] 的证明方法得

$$Ce^{2(P-S)} = -U^2R^2/V^2Q^2,$$

其中常数 $C \neq 0$. 因此,

$$\frac{F^2}{E^2} = \frac{V^2Q^2}{U^2R^2}\cdot e^{2(P-S)} = -\frac{1}{C}. \tag{47}$$

由(40),(42) 和(47) 式,得到

$$4\left(A+\Pi+\frac{C_2^2}{C_1^2}\frac{1}{C}A\right) = \left(\frac{E'}{E}\right)^2 - 2\frac{E''}{E} + \frac{C_2^2}{C_1^2}\frac{1}{C}\left(\frac{F'}{F}\right)^2 - \frac{C_2^2}{C_1^2}\frac{2}{C}\frac{F''}{F}.$$

从而

$$T\left(r,A+\Pi+\frac{C_2^2}{C_1^2}\frac{1}{C}A\right) = m\left(r,A+\Pi+\frac{C_2^2}{C_1^2}\frac{1}{C}A\right) + N\left(r,A+\Pi+\frac{C_2^2}{C_1^2}\frac{1}{C}A\right) =$$
$$O(m(r,F'/F)+m(r,F''/F)+m(r,E'/E)+m(r,E''/E)+\overline{N}(r,1/F)+\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,1/E)+\overline{N}(r,E)). \tag{48}$$

令 $\alpha = \max\{\lambda_{[p,q]}(F,\varphi),\lambda_{[p,q]}(E,\varphi),\lambda_{[p,q]}(1/F,\varphi),\lambda_{[p,q]}(1/E,\varphi)\}$,则由(44) ~ (46) 式可知

$$\alpha < \sigma_{[p,q]}(A,\varphi).$$

又由引理 4 和(48) 式可知,存在线测度有限的集合 $E_8 \subset (0,+\infty)$,使得对充分大的 $r \notin E_8$,有

$$T\left(r,A+\Pi+\frac{C_2^2}{C_1^2}\frac{1}{C}A\right) = O(\exp_p\{\alpha\log_q\varphi(r)\}).$$

再由引理 1 和 ε 的任意性可得

$$\sigma_{[p,q]}\left(A+\Pi+\frac{C_2^2}{C_1^2}\frac{1}{C}A,\varphi\right) \leq \alpha < \sigma_{[p,q]}(A,\varphi),$$

即 $C = -C_2^2/C_1^2$, $F^2 = C_1^2E^2/C_2^2$. 从而, $F'/F = E'/E$, $F''/F = E''/E$. 再由(40) 和(42) 式得到 $\Pi = 0$,矛盾. 因此

$$\max\{\lambda_{[p,q]}(g_1,\varphi),\lambda_{[p,q]}(g_2,\varphi)\} \geq \sigma_{[p,q]}(A,\varphi).$$

定理 4 证毕.

3 参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press,1964.

[2] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equa-

tions [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.

[3] Hayman W K. The local growth of power series: a survey of the Wiman-Valiron method [J]. Canad Math Bull, 1974, 17(3): 317-358.

[4] Shen Xia, Tu Jin, Xu Hongyan. Complex oscillation of a second-order linear differential equation with entire coefficients of $[p,q]$ -φ order [J]. Adv Difference Equ, 2014 (200): 1-14.

[5] 涂金,刘翠云,徐洪焱. 亚纯函数相对于 $\varphi(r)$ 的 $[p,q]$ 增长级 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版, 2012, 36(1): 47-50.

[6] 涂金,魏竞斯,徐洪焱. 单位圆内 $[p,q]$ -$\varphi(r)$ 级解析函数与亚纯函数的级与型 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版, 2015, 39(2): 207-214.

[7] 涂金,黄海霞,徐洪焱. 单位圆内亚纯函数与解析函数的级与型 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版, 2013, 37(5): 449-452.

[8] Cao Tingbin, Li Leimin. Oscillation results on meromorphic solutions of second order differential equations in the complex plane [J]. Electron J Qual Theory Differ Equ, 2010, 68: 1-13.

[9] Gundersen G G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates [J]. J London Math Soc, 1988, 37(2): 88-104.

[10] Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives [J]. Ann Math, 1959, 70(1): 9-42.

[11] Bank S, Laine I. On the zeros of meromorphic solutions of second-order linear differential equations [J]. Comment Math Helv, 1983, 58: 656-677.

[12] Tu Jin, Long Teng. Oscillation of complex high order linear differential equations with coefficients of finite iterated order [J]. Electron J Qual Theory Differ Equ, 2009(66): 1-13.

[13] Jank G, Volkmann L. Untersuchungen ganzer und meromorpher funktionen unendlicher ordnung [J]. Arch Math, 1982, 39: 32-45.

[14] Tu Jin, Chen Zongxuan. Growth of solutions of complex differential equations with coefficients of finite iterated order [J]. Southeast Asian Bull Math, 2009, 33: 153-164.

[15] Kinnunen L. Linear differential equations with solutions of finite iterated order [J]. Southeast Asian Bull Math, 1998, 22(4): 385-405.

[16] Bank S, Laine I, Langley J K. Oscillation results for solutions of linear differential equations in the complex domain [J]. Results Math, 1989, 16: 3-15.

The Complex Oscillation of a Second Order Linear Differential Equation with Meromorphic Coefficients of $[p,q]$ -φ Order

LUO Liqin, ZHENG Xiumin*

(Institute of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: Properties of meromorphic solutions of a second order linear differential equation with meromorphic coefficients of $[p,q]$ -φ order are investigated by using Nevanlinna's value distribution theory of meromorphic functions. And some results on the relations between the order of meromorphic solutions, the convergence exponent of (distinct) zeros and (distinct) poles of meromorphic solutions, and the order of the coefficients are obtained, which are improvements and extensions of the corresponding results of previous papers.

Key words: linear differential equation; meromorphic coefficient; $[p,q]$ -φ order; $[p,q]$ -φ convergence exponent

(责任编辑:王金莲)