第 40 卷 第 5 期
2016 年 9 月
江西师范大学学报(自然科学版)
Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)
Vol. 40 No. 5
Sep. 2016

文章编号:1000-5862(2016)05-0492-05

余 Frame 中余 Frame 同余关系及其应用

马 军[1],王勇兵[2*]

(1. 河北民族师范学院数学与计算机系,河北 承德 067000;2. 河北师范大学民族学院,河北 石家庄 050091)

摘要:在余 Frame 中或余 Frame 之间引入了余 Frame 同余关系和余 Frame 同态的概念,并对相关性质及应用进行了研究. 得到主要结论:余 Frame 关于余 Frame 同余关系的商集仍是余 Frame;余 Frame 同余关系关于余 Frame 同态的逆仍是余 Frame 同余关系;余 Frame 同态的相关性质.

关键词:格论;余 Frame 同态;同余关系;平行同态
中图分类号:O 153.1;O 141.1 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.05.09

0 引言

在一般拓扑学中拓扑闭集格与拓扑开集格是既相对独立又相互联系的 2 个对偶概念[1]. 虽然一般拓扑学的研究是以开集格为主体的,但是随着数理逻辑、计算机科学、拓扑学、代数学等领域的研究需要,闭集格及其相关理论的研究逐渐得到了高度重视. 如在 L-fuzzy 拓扑空间中以闭集概念为支柱建立的远域概念是建立 L-fuzzy 拓扑理论的基础概念,其在 L-fuzzy 拓扑理论中的作用是不能以开集概念为支柱而建立的邻域概念所取代的[2],文献[3]根据数理逻辑研究的需要建立的闭包系统的概念是一般拓扑学中闭集概念和闭包公理的推广,其在数理逻辑理论研究的作用是不能通过开集系统代替的;还有文献[4]建立的推理闭包空间、文献[5]建立的闭包算子等概念均是一般拓扑学中闭集概念或闭包公理的推广.

余 Frame 结构(满足第 2 无限分配律的完备格)是建立于 Boole 幂集格中的闭集格概念在完备格中的直接推广,并且余 Frame 和 Frame 在结构方面是相互对偶的,因此对余 Frame 结构的研究在数理逻辑、计算机科学、拓扑学、domain 理论等[6-17]研究和应用中占有十分重要的地位. 目前,关于余 Frame 的研究工作已经取得了一些进展,文献[18]在余 Frame 范畴中讨论了余 Frame 族的逆极限和定向极限的相关性质,文献[19]在强并半格结构中给出了余 Frame 的 C-滤子表示形式,文献[20]分别在强并半格范畴和余 Frame 范畴中给出了余 Frame 族的余积结构等. 本文的目的是对余 Frame 中的一种余 Frame 同余关系及其诱导的商代数的性质进行讨论,并利用商余 Frame 代数对具有相同论域和余论域的 2 个平行余 Frame 同态的相关性质进行讨论.

本文涉及但未介绍的基本概念和性质请参见文献[6].

1 相关概念与基本性质

定义 1 设 P 是集合,$R \subset P \times P$,若 R 满足

(i) 自反性:$\forall x \in p$,$(x,x) \in R$;

(ii) 反对称性:$\forall x,y \in P$,若 $(x,y) \in R$,且 $(y,x) \in R$,则 $x = y$;

(iii) 传递性:$\forall x,y,z \in P$,若 $(x,y) \in R$,且 $(y,z) \in R$,则 $(x,z) \in R$,

则称 R 是 P 上的偏序关系,并称 (P,R) 是偏序集. 简称 P 是偏序集.

当 R 是 P 上的偏序关系时,$\forall x,y \in P$,将 $(x,y) \in R$ 记作 $x \leqslant y$.

定义 2 设 P 是偏序集,$S \subseteq P$,

(i) $\exists a \in P$,使得 $\forall x \in S, x \leqslant a$,且若 $\exists b \in P$,使得 $\forall x \in S, x \leqslant b$,则 $a \leqslant b$,称 a 是 S 在 P 中的上确界,记作 $\vee S$,即 $\vee S = \sup\{s \mid s \in S\}$;若 P 中任意子集 S 的上确界都存在,则称 P 是完备并半格;

(ii) $\exists a \in P$,使得 $\forall x \in S, a \leqslant x$,且若 $\exists b \in P$,使得 $\forall x \in S, b \leqslant x$,则 $b \leqslant a$,称 a 是 S 在 P 中的下确界,记作 $\wedge S$,即 $\wedge S = \inf\{s \mid s \in S\}$;若 P 中

收稿日期:2016-05-15
基金项目:河北省教育厅科研计划(QN2014108)和河北师范大学科研基金(L2013Q10)资助项目.
通信作者:王勇兵(1981-),男,湖北黄梅人,副教授,主要从事模糊逻辑、数论和密码学方面的研究.

任意子集 S 的下确界都存在，则称 P 是完备交半格；

(iii) 若 P 中任意子集的上确界和下确界都存在，则称 P 是完备格.

引理 1[6]　完备交半格是完备格.

定义 3[17]　设 P 是偏序集，称 P 是余 Frame，如果 P 满足

(i) P 是完备交半格；

(ii) 余 Frame 分配律成立，即 $\forall x \in A$，$Y \subseteq A$，$x \vee (\wedge Y) = \wedge(x \vee Y)$，这里 $x \vee Y = \{x \vee y \mid y \in Y\}$.

注 1[1]　拓扑空间中的全体闭集族关于集合的任意交集运算和有限并集运算是封闭的，从而余 Frame 分配律即为集合并集运算对任意交集运算的分配律，因而是成立的，从而拓扑闭集族是一个余 Frame 结构.

事实上，余 Frame 结构正是拓扑空间的全体闭集族特征在完备格上的推广.

定义 4　设 A，B 是余 Frame，称映射 $f: A \to B$ 是余 Frame 同态，如果映射 $f: A \to B$ 保有限并和任意交，即对于 A 的任意有限子集 V，A 的任意子集 U，$f(\vee V) = \vee f(V)$，$f(\wedge U) = \wedge f(U)$. 这里 $f(U) = \{f(x) \mid x \in U\}$.

注 2　设 A，B 是余 Frame，$f: A \to B$ 是余 Frame 同态，则

(i) 当 $V = \{a, b\}$ 时，$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$；

(ii) $f: A \to B$ 保持余 Frame 分配律，即 $\forall x \in A$，$U \subseteq A$，$f(x \vee (\wedge U)) = f(x) \vee (\wedge f(U))$.

引理 2　设 A_1，A_2，A_3，A_4 是余 Frame，$f_1: A_1 \to A_2$，$f_2: A_2 \to A_3$，$f_3: A_3 \to A_4$ 是余 Frame 同态，定义余 Frame 同态复合 $f_2 \circ f_1: A_1 \to A_3$，$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$ $(\forall x \in A_1)$，则

(i) 余 Frame 同态复合 $f_2 \circ f_1: A_1 \to A_3$ 是余 Frame 同态；

(ii) 恒同映射 $id_{A_1}: A_1 \to A_1$ 是余 Frame 同态，且 $id_{A_1} \circ f_1 = f_1 \circ id_{A_1}$；

(iii) $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$.

证　以(i)为例，由定义 2 验证之. 对于 A_1 的任意有限子集 V，A_1 的任意子集 U，由于 $\vee V$，$\wedge U \in A_1$，因此，

$(f_2 \circ f_1)(\vee V) = f_2(\vee f_1(V)) = \vee f_2(f_1(V)) = \vee (f_2 \circ f_1)(V)$，

$(f_2 \circ f_1)(\wedge U) = f_2(\wedge f_1(U)) = \wedge f_2(f_1(U)) = \wedge (f_2 \circ f_1)(U)$.

故余 Frame 同态复合 $f_2 \circ f_1: A_1 \to A_3$ 是余 Frame 同态.

2　余 Frame 同余关系及其相关性质

定义 5　设 A 是余 Frame，$R \subseteq A \times A$，若

(i) R 是 A 上的等价关系；

(ii) 若 $\forall x_i, y_i \in A$，$i \in I$ (I 是任意非空集合)，$x_i R y_i$，则 $(\wedge_{i \in I} x_i) R (\wedge_{i \in I} y_i)$；

(iii) 若 $\forall x_i, y_i \in A$，$i \in I$ (I 是任意非空有限集合)，$x_i R y_i$，则 $(\vee_{i \in I} x_i) R (\vee_{i \in I} y_i)$，

则称 R 是余 Frame A 上的余 Frame 同余关系.

注 3　设 A 是余 Frame，则恒同关系 $\Delta(A) = \{(x, x) \mid x \in A\}$ 是 A 上的余 Frame 同余关系.

命题 1　设 A 是余 Frame，则 A 上的余 Frame 同余关系的交集仍是 A 上的余 Frame 同余关系.

证　根据余 Frame 同余关系定义和集合交集定义检验即可.

设 A 是余 Frame，$S \subseteq A \times A$，由命题 1 可知 $A \times A$ 中包含 S 的最小余 Frame 同余关系是存在的.

定义 6　设 A 是余 Frame，$S \subseteq A \times A$，称 $A \times A$ 中包含 S 的最小余 Frame 同余关系是由 S 生成的余 Frame 同余关系.

命题 2　设 A 是余 Frame，R 是 A 上的余 Frame 同余关系，令 $A/R = \{[x] \mid x \in A\}$，其中 $[x] = \{y \in A \mid xRy\}$，在 A/R 上定义 2 元关系 $\leqslant$ 为 $\forall x, y \in A$，$[x] \leqslant [y]$ 当且仅当 $x \leqslant y$，则 $(A/R, \leqslant)$ 是余 Frame，其中对于 A 的任意有限子集 V，A 的任意子集 U，$\wedge\{[u] \mid u \in U\} = [\wedge U]$，$\vee\{[v] \mid v \in V\} = [\vee V]$.

证　根据 A 是余 Frame，A/R 上的 2 元关系 $\leqslant$ 的定义即可验证：

(i) 2 元关系 $\leqslant$ 是 A/R 上的偏序关系；

(ii) 对于 A 的任意有限子集 V，A 的任意子集 U，根据定义 2 容易证明 $\{[u] \mid u \in U\}$ 在偏序集 $(A/R, \leqslant)$ 中的下确界存在，$\{[v] \mid v \in V\}$ 在偏序集 $(A/R, \leqslant)$ 中的下确界存在，且 $\wedge\{[u] \mid u \in U\} = [\wedge U]$，$\vee\{[v] \mid v \in V\} = [\vee V]$；

(iii) $\forall x \in A$，$\forall U \subseteq A$，根据(ii)以及 A 中的余 Frame 分配律成立可知

$[x] \vee (\wedge\{u \mid [u] \in U\}) = [x] \vee [\wedge U] = [x \vee (\wedge U)] = [\wedge\{x \vee u \mid u \in U\}] = \wedge\{[x \vee u] \mid u \in U\} = \wedge\{[x] \vee [u] \mid u \in U\}$.

综上可知 $\leqslant$ 是 A/R 上的偏序关系，并且 A/R 关于偏序 $\leqslant$ 是余 Frame.

定义 7　设 A 是余 Frame，R 是 A 上的余 Frame 同余关系，将余 Frame$(A/R, \leqslant)$ 称为余 Frame A 关于余 Frame 同余关系 R 的商余 Frame，仍记作 A/R.

命题3 设A是余Frame,R是A上的同余关系,A/R是余Frame A关于余Frame同余关系R的商余Frame,则典型映射$\pi: B\to B/R$是余Frame同态,其中映射$\pi: B\to B/R$定义为$\forall x\in A,\pi(x)=[x]$.

证 对于A的任意非空有限子集V,A的任意非空子集U,根据命题2可知,

$$\pi(\vee V)=[\vee V]=\vee\{[v]\mid v\in V\}=\vee\{\pi(v)\mid v\in V\}=\vee\pi(V),$$

$$\pi(\wedge U)=[\wedge U]=\wedge\{[u]\mid u\in U\}=\wedge\{\pi(u)\mid u\in U\}=\wedge\pi(U).$$

因此,典型映射$\pi: B\to B/R$是余Frame同态.

命题4 设A,B是余Frame,$f: A\to B$是余Frame同态,若R是B上的余Frame同余关系,令$f^{-1}(R)=\{(x,y)\mid(f(x),f(y))\in R)\}$,则$f^{-1}(R)$是$A$上的余Frame同余关系.

证 (i) $\forall x\in A$,则$f(x)\in B$. 由于R是B上的同余关系具有自反性,因而$(f(x),f(x))\in R$,从而$(x,x)\in f^{-1}(R)$;

(ii) $\forall(x,y)\in f^{-1}(R)$,则$(f(x),f(y))\in R$. 由于$R$是$B$上的余Frame同余关系具有对称性,因而$(f(y),f(x))\in R$,从而$(y,x)\in f^{-1}(R)$;

(iii) $\forall(x,y)$,$(y,x)\in f^{-1}(R)$,则$(f(x),f(y))$,$(f(y),f(z))\in R$,由于R是B上的余Frame同余关系具有传递性,因而$(f(x),f(z))\in R$,从而$(x,z)\in f^{-1}(R)$;

(iv) 设I是任意非空集合,$\forall i\in I,(x_i,y_i)\in f^{-1}(R)$,则$\forall i\in I,(f(x_i),f(y_i))\in R$,由于$R$是$B$上的余Frame同余关系,因而$(\wedge_{i\in I}f(x_i),\wedge_{i\in I}f(y_i))\in R$. 由$f: A\to B$是余Frame同态知$\wedge_{i\in I}f(x_i)=f(\wedge_{i\in I}x_i)$,$\wedge_{i\in I}f(y_i)=f(\wedge_{i\in I}y_i)$,因此$(f(\wedge_{i\in I}x_i),f(\wedge_{i\in I}y_i))\in R$,从而$(\wedge_{i\in I}x_i,\wedge_{i\in I}y_i)\in f^{-1}(R)$.

再设I是任意非空有限集合,$\forall i\in I,(x_i,y_i)\in f^{-1}(R)$,则$\forall i\in I,(f(x_i),f(y_i))\in R$,由于$R$是$B$上的余Frame同余关系,因而$(\vee_{i\in I}f(x_i),\vee_{i\in I}f(y_i))\in R$. 由$f: A\to B$是余Frame同态知$\vee_{i\in I}f(x_i)=f(\vee_{i\in I}x_i)$,$\vee_{i\in I}f(y_i)=f(\vee_{i\in I}y_i)$,因此$(f(\vee_{i\in I}x_i),f(\vee_{i\in I}y_i))\in R$,从而$(\vee_{i\in I}x_i,\vee_{i\in I}y_i)\in f^{-1}(R)$.

由(i)~(iii)知$f^{-1}(R)$是A上的等价关系,再结合(iv)知$f^{-1}(R)$是A上的余Frame同余关系.

3 平行余Frame同态的相关性质

本部分讨论具有相同论域和相同余论域的2个平行余Frame同态的相关性质.

定理1 设A,B是余Frame,$f,g: A\to B$是余Frame同态,令$E=\{x\in A\mid f(x)=g(x)\}$,则

(i) E关于余Frame A的运算在其上的限制仍是余Frame;

(ii) $f|_E,g|_E: E\to B$是余Frame同态,其中$f|_E: E\to B$是$f: A\to B$在E上的限制,定义为$\forall x\in E,f|_E(x)=f(x)$.

证 (i) 首先设U是E的任意非空子集. 由于$\forall u\in U,f(u)=g(u)$,因此在B中有$\wedge_{u\in U}f(u)=\wedge_{u\in U}g(u)$. 又由于$f,g: A\to B$是余Frame同态,所以,$\wedge_{u\in U}f(u)=f(\wedge U)$,$\wedge_{u\in U}g(u)=g(\wedge U)$,从而$f(\wedge U)=g(\wedge U)$,因此$\wedge U\in E$. 故$E$中任意子集关于余Frame A的下确界运算是封闭的.

其次设V是E的任意非空有限子集. 由于$\forall v\in V$,$f(v)=g(v)$,因此在B中有$\wedge_{v\in V}f(v)=\wedge_{v\in V}g(v)$. 又由于$f,g: A\to B$是余Frame同态,所以,$\wedge_{v\in V}f(v)=f(\vee V)$,$\vee_{v\in V}g(v)=g(\vee V)$,则$f(\vee V)=g(\vee V)$,因此$\vee V\in E$. 故$E$中任意有限子集关于余Frame A的下确界运算是封闭的.

最后,由上述结果知,E中的任意交运算和有限并运算为余Frame A中的相应运算. 由于在余Frame A中余Frame分配律是成立的,因此在完备交半格E中余Frame分配律成立.

综上所述,由定义3知,E关于余Frame A的运算在其上的限制仍是余Frame.

(ii) 由于E关于余Frame A的运算在其上的限制仍是余Frame,容易验证嵌入映射$id_A|_E: E\to A$是余Frame同态,并且$f|_E=f\circ id_A|_E$,$g|_E=g\circ id_A|_E$. 结合引理2以及$f,g: A\to B$是余Frame态知,$f|_E: E\to B$,$g|_E: E\to B$是余Frame同态.

定理2 设A,B是余Frame,$f,g: A\to B$是余Frame同态,则存在余Frame E和余Frame同态$e: E\to A$满足

(i) $f\circ e=g\circ e$;

(ii) 对任意满足条件$f\circ h=g\circ h$的余Frame同态$h: E'\to A$,存在唯一的余Frame,同态$\bar{h}: E'\to A$,使得$h=e\circ\bar{h}$,即图1中左侧三角形可交换.

证 令$E=\{x\in A\mid f(x)=g(x)\}$,$e: E\to A$是嵌入映射,由于$f,g: A\to B$是余Frame同态,由定理1知$E$是余Frame,并且结合定义3可证嵌入映射$e: E\to A$是余Frame同态.

下证余Frame E和余Frame同态$e: E\to A$满足所需的条件.

(i) $\forall x\in E$,由E,e的定义可得$(f\circ e)(x)=$

$f(e(x)) = f(x) = g(x) = g(e(x)) = (g \circ e)(x)$，因此，$f \circ e = g \circ e$.

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[dr, "h"] \arrow[dd, "\exists \bar{h}"'] & & \\ & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ E \arrow[ur, "e"'] & & \end{tikzcd}$$

图 1　$h, \bar{h}, e$ 可换图

（ii）设 E' 是余 Frame，$h: E' \to A$ 是余 Frame 同态，且满足条件 $f \circ h = g \circ h$. 定义 $\bar{h}: E' \to E$，$\forall x \in E'$，$\bar{h}(x) = h(x)$.

首先，$\bar{h}: E' \to E$ 的定义是合理的. 由于 $\forall x \in E'$，$(f \circ h)(x) = (g \circ h)(x)$，因此 $f(h(x)) = g(h(x))$，所以 $h(x) \in E$. 由于 $h: E' \to A$ 是余 Frame 同态，且 $\forall x \in E'$，$\bar{h}(x) = h(x)$，因此，结合定义 4 容易验证 $\bar{h}: E' \to E$ 是余 Frame 同态.

其次，$h = e \circ \bar{h}$. 因为 $\forall x \in E'$，已证 $h(x) \in E$. 所以，$h(x) = e(h(x)) = e(\bar{h}(x)) = (e \circ \bar{h})(x)$.

再设 $h^*: E' \to E$ 是余 Frame 同态，且满足条件 $h = e \circ h^*$，则 $h^* = \bar{h}$. 事实上，$\forall x \in E'$，

$h^*(x) = e(h^*(x)) = (e \circ h^*)(x) = h(x) = \bar{h}(x)$.

定理 3　设 A, B 是余 Frame，$f: A \to B$，$g: A \to B$ 为余 Frame 同态，则存在余 Frame E 和余 Frame 同态 $\pi: B \to E$ 满足

（i）$\pi \circ f = \pi \circ g$；

（ii）对任意满足条件 $h \circ f = h \circ g$ 的余 Frame 同态 $h: B \to E'$ 存在唯一的余 Frame 同态 $\bar{h}: E \to E'$ 使得 $h = \bar{h} \circ \pi$，即图 2 中右侧三角形可交换.

$$\begin{tikzcd} & & E \arrow[dd, "\exists \bar{h}"] \\ A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "h"'] & \\ & & E' \end{tikzcd}$$

图 2　$h, \bar{h}, \pi$ 可换图

证　$f, g: A \to B$ 是从 A 到 B 的余 Frame 同态，则 $\{(f(x), g(x)) \mid x \in A\} \subseteq B \times B$，设 R 是 B 上包含 $\{(f(x), g(x)) \mid x \in A\}$ 的最小余 Frame 同余关系，令 $E = B/R$ 是余 Frame B 关于余 Frame 同余关系 R 的商，由命题 2 知余 Frame B 关于余 Frame 同余关系 R 的商是余 Frame，因此 E 是余 Frame；由命题 3 知典型映射 $\pi: B \to B/R$ 是余 Frame 同态.

下面证明余 Frame B 和余 Frame 同态 $\pi: B \to E$ 满足（i）和（ii）.

（i）$\forall x \in A$，由于 $(f(x), g(x)) \in R$，因此，在关于 R 的余 Frame 同余类 E 中 $[f(x)] = [g(x)]$，再根据 π 的定义可得 $(\pi \circ f)(x) = \pi(f(x)) = [f(x)] = [g(x)] = \pi(g(x)) = (\pi \circ g)(x)$. 因此，$\pi \circ f = \pi \circ g$.

（ii）设 E' 是余 Frame，$h: B \to E$ 是满足条件 $h \circ f = h \circ g$ 的余 Frame 同态. 由注 1 知 $\Delta(E') = \{(z, z) \mid z \in E'\}$ 是 E' 上的余 Frame 同类关系. 再结合命题 4 和 $h: B \to E$ 是余 Frame 同态可知 $h^{-1}(\Delta(E'))$ 是 B 上的余 Frame 同余关系，并且

$h^{-1}(\Delta(E')) = \{(x, y) \in B \times B \mid (h(x), h(y)) \in E'\} = \{(x, y) \in B \times B \mid h(x) = h(y)\}$.

$\forall x \in A$，由于 h 满足 $h \circ f = h \circ g$，因此 $h(f(x)) = h(g(x))$，即 $(h(f(x)), h(g(x))) \in \Delta(E')$，所以，$(f(x), g(x)) \in h^{-1}(\Delta(E'))$. 故 $\{(f(x), g(x)) \mid x \in A\} \subseteq h^{-1}(\Delta(E'))$. 又 R 是包含 $\{(f(x), g(x)) \mid x \in A\}$ 的最小余 Frame 同余关系，因此，$R \subseteq h^{-1}(\Delta(E'))$.

定义 $\bar{h}: E \to E'$，$\forall [y] \in B/R$，$\bar{h}([y]) = h(y)$. 首先，若 $[y]$，$[z] \in B/R$，$[y] = [z]$，即 $(y, z) \in R$，且 $R \subseteq h^{-1}(\Delta(E'))$，则 $h(y) = h(z)$，从而 $\bar{h}$ 的定义是合理的. 对于 B 中的任意子集 U 和任意有限子集 V，由命题 2 知，$\wedge\{[u] \mid u \in U\} = [\wedge U]$，$\vee\{[v] \mid v \in V\} = [\vee V]$. 所以，

$\bar{h}(\wedge_{u \in U}[u]) = \bar{h}([\wedge_{u \in U} u]) = h(\wedge_{u \in U} u) = \wedge_{u \in U} h(u) = \wedge_{u \in U} \bar{h}([u])$，

$\bar{h}(\vee_{v \in V}[v]) = \bar{h}([\vee_{v \in V} v]) = h(\vee_{v \in V} v) = \vee_{v \in V} h(v) = \vee_{v \in V} \bar{h}([v])$.

故 $\bar{h}: E \to E'$ 是余 Frame 同态.

其次，$\forall y \in B$，由于 $(\bar{h} \circ \pi)(y) = \bar{h}(\pi(y)) = \bar{h}([y]) = h(y)$，所以 $h = \bar{h} \circ \pi$.

最后，设 $h^*: E \to E'$ 是余 Frame 同态，且 $h = h^* \circ \pi$，则

$\forall [y] \in E$，$h^*([y]) = h^*(\pi(y)) = (h^* \circ \pi)(y) = h(y) = \bar{h}([y])$，

因此

$$h^* = \bar{h}.$$

4　结论

首先，在余 Frame 中引入了余 Frame 同余关系的概念，证明了余 Frame 关于余 Frame 中余 Frame 同余关系确定的等价类关于相应诱导的算子仍是余 Frame；其次，在余 Frame 之间引入了余 Frame 同态

的概念,证明了取值域中的余 Frame 同余关系关于余 Frame 同态的逆仍是定义域中的余 Frame 同余关系;最后,对于余 Frame 同态$f,g:A\to B$,(i)证明了存在余 Frame E,余 Frame 同态$e:E\to A$满足$f\circ e=g\circ e$,并且若余 Frame 同态$h:E'\to A$满足$f\circ h=g\circ h$,则存在唯一的余 Frame 同态$\bar{h}:E'\to A$,使得$h=e\circ\bar{h}$;(ii)证明了存在余 Frame E,余 Frame 同态$\pi:B\to E$满足$\pi\circ f=\pi\circ g$;并且若余 Frame 同态$h:B\to E'$满足$h\circ f=h\circ g$,则存在唯一的余 Frame 同态$\bar{h}:E\to E'$使得$h=\bar{h}\circ\pi$. 本文的结果对余 Frame 性质的进一步研究具有参考价值.

5 参考文献

[1] 熊金城. 点集拓扑学讲义[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2003.
[2] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,1998.
[3] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 北京:科学出版社,2003.
[4] 吴洪博. 推理闭包算子诱导的空间[J]. 西北大学学报:自然科学版,2008,38(1):9-13.
[5] 吴洪博,崔艳丽. 闭包算子空间范畴及其性质研究[J]. 计算机工程与应用,2010,46(27):54-56,69.
[6] 郑崇友,樊磊,崔宏斌. Frame 与连续格[M]. 2 版. 北京:首都师范大学出版社,2000.
[7] Vickers S. Topology via logic[M]. Cambridge:Cambridge University Press,1989.
[8] 覃锋,王金林. Z-连续格的一个范畴刻划[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2001,25(4):331-333.
[9] 覃锋,徐晓泉. 广义 Z-连续偏序集[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,1999,23(3):202-205.
[10] 覃锋. 连续格的序同态[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,1999,23(2):126-129.
[11] 覃锋. Uninorm 与 T-operator 的剩余结构[J]. 工程数学学报,2006,239(4):741-744.
[12] 汪开云,赵彬. Z-Quantale 及其范畴性质[J]. 数学学报:中文版,2010,53(5):997-1006.
[13] 韩胜伟,赵彬. 序半群的 Quantale 完备化[J]. 数学学报:中文报,2008,51(6):1081-1088.
[14] 樊磊,郑崇友. 连通 Locale 的基本性质[J]. 数学进展,2001,30(3):247-251.
[15] 张奇业,樊磊,郑崇友. 一类 Domain 范畴及其笛卡尔闭子范畴[J]. 数学学报:中文版,2001,44(5):823-828.
[16] 吴洪博,石慧君. Heyting 系统及其 H-空间化形式[J]. 电子学报:中文版,2012,40(5):995-999.
[17] 吴洪博,石慧君. Heyting 系统及其 H-Locale 化形式[J]. 数学学报:中文版,2012,55(6):1119-1130.
[18] 李海洋,李生刚. 范畴 Co-Frame 的逆极限和定向极限[J]. 东北师大学报:自然科学报,2006,38(2):11-14.
[19] 吴洪博,寇海燕. 余 Frame 范畴中余积的构造[J]. 数学学报:中文版,2016,59(1):75-90.
[20] 吴洪博,寇海燕. 强并半格中的 C-滤子及其应用[J]. 数学学报:中文版,2015,58(2):287-301.

The Co-Frame Congruence Relation with Its Application in Construct of Co-Frame

MA Jun[1],WANG Yongbing[2*]

(1. Department of Mathematics and Computer Science,Hebei Normal University for Nationalities,Chengde Hebei 067000,China;2. Nationalities College,Hebei Normal University,Shijiazhuang Hebei 050091,China)

Abstract: The concepts of co-frame congruence relation in co-frames and co-frame homomorphism between co-frames are introduced,and the properties of and its applications are studied. The main results are following that the quotient set of a co-frame based on co-frame congruence relation is a co-frame,the inverse of co-frame congruence relation under co-frame homomorphism is co-frame congruence relation and a related property of the co-frame homomorphism are investigated.

Key words: lattice theory;co-frame homomorphism;congruence relation;parallel homomorphism

(责任编辑:曾剑锋)