文章编号:1000-5862(2016)05-0497-03

费马型微分及差分方程亚纯解的极点性质

王 珺[1],夏 凯[1],龙 芳[2]
(1. 复旦大学数学科学学院,上海 200433;2. 江西机电职业技术学院基础课部,江西 南昌 330013)

摘要: 研究了费马型函数方程 $f(z)^n + g(z)^m = 1$ 的亚纯解,对该方程涉及微分和差分的一些情况,讨论了解的极点分布性质,得到了极点收敛指数的下界估计.

关键词: 亚纯函数;极点;差分;费马型函数方程
中图分类号: O 174.52 **文献标志码**: A **DOI**: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.05.10

0 引言与结果

本文的亚纯函数均指在整个复平面上亚纯的函数,且本文采用 Nevanlinna 理论中的标准记号,其基本概念和详细定义可参见文献[1-3].

设 $f(z)$ 是非常数亚纯函数,用 $\sigma(f)$ 表示 $f(z)$ 的增长级,用 $S(r,f)$ 表示满足 $S(r,f) = o(T(r,f))$ $(r\to\infty, r\notin E)$ 的量,其中集合 E 具有有穷线性测度. 接下来,介绍 $f(z)$ 的极点收敛指数 $\lambda(1/f)$ 和 2 阶收敛指数 $\lambda_2(1/f)$,它们分别为

$$\lambda(1/f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \log^+ n(r,f) / \log r,$$

$$\lambda_2(1/f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \log^+ \log^+ n(r,f) / \log r.$$

假设 a 为任一复数,定义 a 关于 $f(z)$ 的亏量为

$$\delta(a,f) = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)} = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}.$$

对于费马型函数方程 $f^n + g^n = 1$,它的解存在性问题一直吸引着人们进行研究,并且有了大量完善的结果. 当 $n \geqslant 4$ 时,费马方程无超越亚纯解[4];而当 $n\geqslant 3$ 时,该方程无超越整函数解[5];若 $n = 2$,则该方程仅有整函数解 $f(z) = \sin(h(z))$ 和 $g(z) = \cos(h(z))$,其中 $h(z)$ 为任意整函数[6];当 $g(z) = f'(z)$ 且 $n = 2$ 时,

$$f(z) = (Pe^{\lambda z} + e^{-\lambda z}/P)/2,$$

其中 P,λ 均为复常数[7]. 对于费马方程的推广形式

$$f^n + g^m = 1, \tag{1}$$

杨重骏进行了研究,并得到

定理 A[8] 设 m,n 为正整数,且 $1/m + 1/n < 1$,则不存在非常数整函数解 $f(z)$ 和 $g(z)$ 满足方程(1).

2006 年以来,有大量文献涉及亚纯函数与其移动、差分的值分布性质,特别是有穷级亚纯函数,有对数导数引理的差分形式成立[9-13]. 由此,当 $f(z)$ 和 $g(z)$ 满足一些特殊关系时,来研究方程(1)亚纯解的极点性质. 当 $g(z)$ 为 $f(z)$ 的导数时,方程(1)将变成非线性微分方程,而对于这类方程已有一定研究[14]. 故结合差分考虑下列方程

$$f(z)^n + f(z+c)^m = 1, \tag{2}$$

$$f'(z)^n + f(z+c)^m = 1, \tag{3}$$

$$f'(z)^n + [f(z+c) - f(z)]^m = 1. \tag{4}$$

对于这些方程的超越整函数解,刘凯等[15]进行了较为完善的研究,得到一些有穷级超越整函数解的存在性结论. 因此,在本文中将更多地讨论具有至少 1 个极点的亚纯解,并得到下面的 3 个定理.

定理 1 假设 $n\neq m$,则方程(2)的至少有 1 个极点的亚纯解 $f(z)$ 必满足

$$\lambda(1/f) = +\infty,\ \lambda_2(1/f) \geqslant 1.$$

定理 2 假设 $f(z)$ 为方程(3)的亚纯解,则

(i) 当 $n > m$ 时,若 $f(z)$ 至少有 1 个极点,有 $\lambda(1/f) = +\infty$ 和 $\lambda_2(1/f) \geqslant 1$;

(ii) 当 $n = m$ 时,若 $f(z)$ 至少有 1 个极点,有 $\lambda(1/f) \geqslant 2$;

(iii) 当 $n < m$ 时,若 $\sigma(f) < +\infty$,有 $n < m \leqslant 2n$,$N(r,f) = T(r,f) + S(r,f)$,即 $\delta(\infty,f) = 0$.

收稿日期:2016-05-10
基金项目:国家自然科学基金(11001057,11571049)资助项目.
作者简介:王 珺(1976-),女,江西进贤人,副教授,博士,主要从事复分析方向的研究.

定理 3 假设 $f(z)$ 为方程(4)的至少有 1 个极点的亚纯解,则

(i) 当 $n > m$ 时,有 $\lambda_2(1/f) \geqslant 1$;

(ii) 当 $n = m$ 时,有 $\lambda(1/f) \geqslant 2$.

1 主要引理

引理 1[9-10,12] 假设 $f(z)$ 为有穷级的超越亚纯函数,c 为非负常数,则

$$T(r,f(z+c)) = T(r,f) + S(r,f),$$
$$m(r,f(z+c)/f(z)) = S(r,f).$$

易知下面的结果成立.

引理 2 假设 $f(z)$ 为亚纯函数,则有

$$T(r,f') \leqslant T(r,f) + \overline{N}(r,f) + S(r,f).$$

引理 3 假设 $f(z)$ 为方程(3)的有穷级亚纯解,如果 $n < m$,则

$$m(r,f) = S(r,f),\ m(r,f(z+c)) = S(r,f).$$

证 首先定义 $E_1 = \{\theta \in [0,2\pi] \mid |f(re^{i\theta}+c)| \leqslant 1\}$,$E_2 = [0,2\pi]\setminus E_1$,从而

$$2\pi \cdot m(r,f(z+c)) = \int_{E_1}\log^+|f(re^{i\theta}+c)|d\theta + \int_{E_2}\log^+|f(re^{i\theta}+c)|d\theta. \quad (5)$$

如果 $\theta \in E_1$,则 $\log^+|f(re^{i\theta}+c)| = 0$,所以

$$\int_{E_1}\log^+|f(re^{i\theta}+c)|d\theta = 0.$$

接下来,考虑 $\theta \in E_2$,即 $|f(re^{i\theta}+c)| > 1$ 的情形,由(3)式不难看出

$$\log^+|f(re^{i\theta}+c)| = \log^+\left|\frac{1-f'(re^{i\theta})^n}{f(re^{i\theta}+c)^{m-1}}\right| \leqslant \log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\theta}+c)^{m-1}}\right| + \log^+\left|\frac{f'(re^{i\theta})^n}{f(re^{i\theta}+c)^{m-1}}\right| = \log^+\left|\frac{f'(re^{i\theta})^n}{f(re^{i\theta}+c)^{m-1}}\right|. \quad (6)$$

注意到

$$\left|\frac{f'(z)^n}{f(z+c)^{m-1}}\right| = \left|\frac{f'(z)}{f(z+c)}\right|^n \cdot \frac{1}{|f(z+c)|^{m-n-1}},$$

其中 $m-n-1 \geqslant 0$,从而对于 $\theta \in E_2$,能推出

$$\log^+\left|\frac{f'(re^{i\theta})^n}{f(re^{i\theta}+c)^{m-1}}\right| \leqslant n\log^+\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta}+c)}\right| + (m-n-1)\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta}+c)|} = n\log^+\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta}+c)}\right| \leqslant n\log^+\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| + n\log^+\left|\frac{f(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta}+c)}\right|. \quad (7)$$

将(6)和(7)式代入(5)式,得到

$$m(r,f(z+c)) \leqslant n \cdot m(r,f'/f) + n \cdot m(r,f(z)/f(z+c)). \quad (8)$$

利用对数导数引理和引理 1,(8)式意味着

$$m(r,f(z+c)) = S(r,f). \quad (9)$$

由于 $m(r,f) \leqslant m(r,f(z)/f(z+c)) + m(r,f(z+c))$,根据(9)式容易得到 $m(r,f) = S(r,f)$.

2 定理的证明

定理 1 的证明 不失一般性,对于方程(2),仅须考虑 $n > m$ 的情形. 假设 $f(z)$ 为方程(2)的亚纯解,z_0 为 f 的 l 重极点($l \geqslant 1$),则由(2)式知 z_0+c 必为 f 的 nl/m 重极点. 以此类推,z_0+kc 必为 f 的 $(n/m)^k l$ 重极点,k 为自然数. 再由 $n(r,f)$ 的定义知

$$n(r,f) \geqslant l + (n/m)l + \cdots + (n/m)^{\mu}l \geqslant (n/m)^{\mu}l,$$
$$\mu = [(r-|z_0|)/|c|]. \quad (10)$$

当 $r \in [|z_0|+(k-1)|c|,|z_0|+k|c|]$ 时,$\mu = k-1$,由(10)式可得 $n(r,f) \geqslant (n/m)^{k-1}l$.

对于上面的不等式两边取对数,可看出

$$\frac{\log^+\log^+ n(r,f)}{\log r} \geqslant \frac{\log(k-1)+\log\log(n/m)}{\log(|z_0|+k|c|)}. \quad (11)$$

显然当 $r\to\infty$ 时,必然有 $k\to\infty$. 对于不等式(11),可推出

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^+\log^+ n(r,f)}{\log r} \geqslant \lim\frac{(k-1)^{-1}}{|c|/(|z_0|+k|c|)} = \lim_{k\to\infty}(|z_0|+k|c|)/[|c|(k-1)] = 1.$$

这意味着 $\lambda_2(1/f) \geqslant 1$,此时必然有 $\lambda(1/f) = +\infty$.

定理 2 的证明 假设 $f(z)$ 为方程(3)的亚纯解,若有极点,则设 z_0 为 f 的 l 重极点($l \geqslant 1$),接下来分 3 种情况讨论.

情况(i) 当 $n > m$ 时,则 z_0+c 必为 f 的 $(n/m)\cdot(l+1)$ 重极点. 以此类推,z_0+kc 必为 f 的 $(n/m)^k\cdot(l+1)+(n/m)^{k-1}+\cdots+(n/m)$ 重极点,k 为自然数. 因此,不难看出

$$n(r,f) \geqslant l + (n/m)(l+1) + \cdots + (n/m)^{\mu}(l+1) + (n/m)^{\mu-1} + \cdots + (n/m) \geqslant (n/m)^{\mu}(l+1),$$
$$\mu = [(r-|z_0|)/|c|].$$

利用类似定理 1 的证明过程,可知 $\lambda_2(1/f) \geqslant 1$,从而 $\lambda(1/f) = +\infty$.

情况(ii) 当 $n = m$ 时,则 z_0+c 必为 f 的 $l+1$ 重极点. 以此类推,z_0+kc 必为 f 的 $l+k$ 重极点,k 为自

然数,从而

$$n(r,f) \geqslant l + l + 1 + \cdots + l + k \geqslant kl + k(k+1)/2, k = [(r - |z_0|)/|c|]. \quad (12)$$

对(12)式等号两边取对数可得

$$\frac{\log^+ n(r,f)}{\log r} \geqslant \frac{\log(kl + k^2/2 + k/2)}{\log(|z_0| + (k+1)|c|)}. \quad (13)$$

显然当 $r \to \infty$ 时,必然有 $k \to \infty$. 对于(13)式的等号右端利用罗比塔法则,推出

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ n(r,f)}{\log r} \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{\log(kl + k^2/2 + k/2)}{\log(|z_0| + (k+1)|c|)} = 2,$$

这意味着 $\lambda(1/f) \geqslant 2$.

情况(iii) 当 $n < m$ 时,将考虑方程(3)的有穷级亚纯解 $f(z)$. 首先将(3)式改写为

$$f(z+c)^m = 1 - f'(z)^n. \quad (14)$$

对于(14)式等号左边,取特征函数为

$$T(r, f(z+c)^m) = mT(r, f(z+c)).$$

注意到引理1,从而

$$T(r, f(z+c)^m) = mT(r,f) + S(r,f). \quad (15)$$

而(14)式等号右边的特征函数为

$$T(r, 1 - f'(z)^n) \leqslant nT(r,f) + n\overline{N}(r,f) + S(r,f) \leqslant nT(r,f) + n\overline{N}(r,f) + S(r,f), \quad (16)$$

其中用到了引理2. 结合(15)和(16)式,显然有

$$mT(r,f) + S(r,f) \leqslant nT(r,f) + n\overline{N}(r,f) + S(r,f).$$

由此容易看出

$$(m-n)T(r,f)/n + S(r,f) \leqslant \overline{N}(r,f) \leqslant T(r,f).$$

这意味着 $n < m \leqslant 2n$.

另一方面,根据引理3,有 $m(r,f) = S(r,f)$,故

$$N(r,f) = T(r,f) - m(r,f) = T(r,f) + S(r,f).$$

由亏量的定义,得到 $\delta(\infty, f) = 0$.

定理3的证明　假设 $f(z)$ 为方程(4)的亚纯解,设 z_0 为 f 的 l 重极点($l \geqslant 1$),分2种情况讨论.

情况(i) 当 $n > m$ 时,则 $z_0 + c$ 为 f 的 $(n/m)(l+1)$ 重极点. 以此类推,$z_0 + kc$ 必为 f 的 $(n/m)^k(l+1) + (n/m)^{k-1} + \cdots + (n/m)$ 重极点,k 为自然数. 从而,类似于定理2的情况(i),可知

$$n(r,f) \geqslant (n/m)^{\mu}(l+1), \mu = [(r - |z_0|)/|c|],$$

则可推出 $\lambda_2(1/f) \geqslant 1$.

情况(ii) 当 $n = m$ 时,则 $z_0 + c$ 为 f 的 $l+1$ 重极点. 以此类推,$z_0 + kc$ 必为 f 的 $l + k$ 重极点,k 为自然数. 从而类似于定理2的情况(ii),得到

$$n(r,f) \geqslant kl + k(k+1)/2, k = [(r - |z_0|)/|c|].$$

由上式,同样得到 $\lambda(1/f) \geqslant 2$.

3　参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.

[3] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数的唯一性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[4] Gross F. On the equation $f^n + g^n = 1$ [J]. Bull Amer Math Soc, 1966, 72(6): 86-88.

[5] Montel P. Leçcons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1927.

[6] Gross F. On the equation $f^n + g^n = h^n$ [J]. Amer Math Monthly, 1966, 73(10): 1093-1096.

[7] Yang Chungchun, Li Ping. On the transcendental solutions of a certain type of nonlinear differential equations [J]. Arch Math, 2004, 82(5): 442-448.

[8] Yang Chungchun. A generalization of a theorem of P. Montel on entire functions [J]. Proc Amer Math Soc, 1970, 26(2): 332-334.

[9] Halburd R G, Korhonen R J. Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations [J]. J Math Anal Appl, 2006, 314(2): 477-487.

[10] Halburd R G, Korhonen R J. Finite-order meromorphic solutions and discrete painleve equations [J]. Proc London Math Soc, 2007, 94(2): 443-474.

[11] Chiang Yiman, Feng Shaoji. On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane [J]. Ramanujan J, 2008, 361(7): 3767-3791.

[12] Chiang Yiman, Feng Shaoji. On the growth of logarithmic differences, difference quotients and logarithmic derivatives of meromorphic functions [J]. Trans Amer Math Soc, 2009, 16: 105-129.

[13] 甘会林. 整函数差分的零点和不动点 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2015, 39(5): 519-521.

[14] 廖良文. 非线性复微分方程研究的新进展 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2015, 39(4): 331-339.

[15] Liu Kai, Cao Tingbin, Cao Hongzhe. Entire solutions of Fermat type differential-difference equations [J]. Arch Math(Basel), 2012, 99(2): 147-155.

(下转第519页)

[7] Hong Jialin，Qin Mengzhao. Multisymplecticity of the centered box discretization for Hamiltonian PDEs with $m \geqslant 2$ space dimensions [J]. Appl Math Letters，2002，15(8)：1006-1011.

[8] Kong Linghua，Duan Yali，Wang Lan. Spectral-like resolution compact ADI finite difference method for the multi-dimensional Schrödinger equations [J]. Math Comput Model，2012，55(5/6)：1798-1812.

[9] 马院萍，孔令华，王兰. 2 维 Schrödinger 方程的高阶 ADI 格式 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2010，34(4)：421-425.

[10] 符莉丹，孔令华，符芳芳. Schrödinger 方程的交替隐格式 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2014，38(2)：167-172.

[11] Douglas J，Kim S. Improved accuracy for locally one-dimensional methods for parabolic equation [J]. Math Models Meth Appl Sci，2001，11(9)：1563-1579.

[12] Li Jichun，Chen Yitung，Liu Guoqing. High-order compact ADI methods for the parabolic equations [J]. Comput Math Appl，2006，52(8/9)：1343-1356.

[13] 赵飞，蔡志权，葛永斌. 1 维非定向常对流扩散方程的有理型高阶紧致差分格式 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2014，38(4)：413-418.

[14] Gao Zhen，Xie Shusen. Fourth-order alternating direction implicit compact finite difference schemes for two-dimensional Schrödinger equations [J]. Appl Numer Math，2011，61(4)：593-614.

[15] 开依沙尔·热合曼，努尔买买提·黑力力. 求解对流扩散方程的 Padé 逼近格式 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2014，38(3)：261-264.

[16] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like solution [J]. J Comput Phys，1992，103(1)：16-42.

The Compact and Modified ADI Scheme for Schrödinger Equations

WANG Lan，ZHOU Yuanlan，FU Lidan

(College of Mathematics and Informatics，Jiangxi Normal University，Nanchang Jiangxi 330022，China)

Abstract: A compact and modified alternative direction implicit (ADI) scheme is contributed to multidimensional Schrödinger equations. After analyzing the error of Douglas′ ADI scheme，it is discovered that the splitting error of the ADI scheme is much larger than truncation error from time approximation. A perturbation term is inserted into Douglas and Peaceman′s ADI scheme to improve the accuracy and computational efficiency. Moreover，the order of splitting error is bettered and the error from time discretization is dominant. Numerical tests verified the advantages of the new scheme and the important role of perturbation term.

Key words: Schrödinger equation; modified ADI scheme; high-order compact scheme.

(责任编辑：曾剑锋)

(上接第 499 页)

The Poles of Meromorphic Solutions of Fermat Type Differential-Difference Equations

WANG Jun[1]，XIA Kai[1]，LONG Fang[2]

(1. School of Mathematical Sciences，Fudan University，Shanghai 200433，China;
2. Foundational Courses Department，Jiangxi Vocational College of Mechanical & Electrical Technology，Nanchang Jiangxi 330013，China)

Abstract: Meromorphic solutions of Fermat type differential-difference equations are studied. The distribution of poles of solutions is investigated，and the lower bound is obtained for the exponent of convergence of the poles.

Key words: meromorphic functions; pole; difference; Fermat type equation

(责任编辑：王金莲)