第 40 卷 第 5 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 40 No. 5
2016 年 9 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Sep. 2016

文章编号:1000-5862(2016)05-0500-05

E-值亚纯函数的特征函数

吴昭君,王 波

(湖北科技学院数学与统计学院,湖北 咸宁 437100)

摘要:研究了具有最大亏量和的 E-值亚纯函数与其导函数的特征函数,证明了具有最大亏量和的亚纯函数及其导函数的特征函数之间的关系定理对 E-值亚纯函数仍然成立.

关键词:E-亚纯函数;亏量;特征函数

中图分类号:O 174.52 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.05.11

0 引言

设 E 是 Banach 空间,$f(z)$ 是定义在 $C_R=\{|z|<R\}$,$0<R\leqslant+\infty$(约定 $C_{+\infty}=C$)上而在 Banach 空间 E 中取值的向量值亚纯函数. 若 E 为复平面 C,则 $f(z)$ 为通常的亚纯函数;若 E 为 n 维复欧氏空间 C^n,则 $f(z)$ 为有限维向量值亚纯函数[1];若 E 为无限维的 Banach 空间,则称 $f(z)$ 为 E-值亚纯函数[2]. 亏量是亚纯函数的值分布理论的一个重要研究内容. 对于具有最大亏量和的亚纯函数及其导函数的特征函数的关系,文献[3-6]中取得了一些较为深刻的研究结果,文献[2]研究了 E-值亚纯函数的 Nevanlinna 理论,文献[7-10]研究了 E-值亚纯函数及其导函数的亏量和特征函数,本文将继续这方面的研究.

1 定义、记号及主要结果

1.1 定义和记号

本文主要研究 E-值亚纯函数的值分布. 为方便起见,先给出 E-值亚纯函数 Nevanlinna 理论的如下定义和记号[2,4-6,11].

记 E 中的范数为 $\|\cdot\|$,E 的元素通常被称为向量,这些向量分别用字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示,且 $\boldsymbol{o}$ 表示 E 的零向量,无穷向量、无穷复数、无穷范数分别用 $\hat{\infty}$,∞,$+\infty$ 表示。

设 E 是无限维 Banach 空间,$\{e_j\}_1^{+\infty}$ 是其 Schauder 基,则定义在 C_R,$0<R\leqslant+\infty$ 上的 E-值亚纯函数 $f(z)$ 可以表示为

$$f(z)=(f_1(z),f_2(z),\cdots,f_k(z),\cdots),$$

其中 $f(z)$ 的所有分支函数 $f_j(z)$ 都是亚纯函数. 假设 E_n 是 Banach 空间 E 的 n 维投影空间,其基为 $\{e_j\}_1^n$,P_n 为投影算子,即 $\forall z=(z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots)$,$P_nz=(z_1,z_2,\cdots,z_n,0,0,\cdots)$. 设 $f(z)$ 是定义在 C_R 上的 E-值亚纯函数,如果对于任意的正数 ε 和充分大的 n,在 C_R 的任意紧子集上满足 $\|P_n(f(z))-f(z)\|<\varepsilon$,则称 $f(z)$ 是紧的. 下文中除特别说明外,所说的 E-值亚纯函数都认为是紧的.

对于 E-值亚纯函数 $f(z)$,其 $j(j=1,2,\cdots)$ 阶导数定义为

$$f^{(j)}(z)=(f_1^{(j)}(z),f_2^{(j)}(z),\cdots,f_k^{(j)}(z),\cdots).$$

称 z_0 为 $f(z)$ 的零点;是指 $f(z_0)=0$(E 中零元);称 z_0 为 $f(z)$ 的极点,如果 z_0 至少为 $f(z)$ 的某个分支的极点;称 z_0 为 $f(z)$ 的 p 重极点;如果 $f(z)$ 至少有某个分支以 z_0 为 $f(z)$ 的 p 重极点,称 z_0 为 $f(z)$ 的 p 重零点;如果 z_0 是 $f(z)$ 的每个分支的至少为 p 重的零点. 对于任意点 $\boldsymbol{a}\in E$,定义

$$V(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{C_r}\log|r/\xi|\Delta\log\|f(\xi)\|\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

$\xi=x+\mathrm{i}y$,

$$V(r,\boldsymbol{a})=V(r,\boldsymbol{a},f)=\frac{1}{2\pi}\int_{C_r}\log|r/\xi|\Delta\log\|f(\xi)-\boldsymbol{a}\|\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\ \xi=x+\mathrm{i}y,$$

$$m(r,f)=m(r,\hat{\infty},f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\|f(re^{\mathrm{i}\theta})\|\,\mathrm{d}\theta,$$

$m(r,\boldsymbol{a})=m(r,\boldsymbol{a},f)=$

收稿日期:2016-03-28

基金项目:国家自然科学基金(11201395)和湖北省教育厅科研课题(B2016193)资助项目.

作者简介:吴昭君(1978-),男,湖北咸宁人,副教授,博士,主要从事复分析方向的研究.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{\|f(re^{i\theta})-a\|}d\theta,$$

$$N(r,f)=n(0,f)\log r+\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt,$$

$$N(r,\hat{\infty})=n(0,\hat{\infty})\log r+\int_0^r\frac{n(t,\hat{\infty})-n(0,\hat{\infty})}{t}dt,$$

$$N(r,a)=n(0,a)\log r+\int_0^r\frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}dt,$$

其中 $n(r,f)$（或 $n(r,\hat{\infty})$）及 $n(r,a,f)=n(r,a)$ 分别表示向量值亚纯函数 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant r$ 内的极点个数和取 a 值点的个数（重点按重数计算）．在不考虑重数的情况下，设 $\bar{n}(r,f)$ 或者 $\bar{n}(r,\hat{\infty})$ 表示函数 $f(z)$ 在区域 $|z|\leqslant r$ 内的极点的个数，$\bar{n}(r,a)$ 表示函数 $f(z)$ 在区域 $|z|\leqslant r$ 内的取 a 值点的个数．分别定义

$$\overline{N}(r,f)=\bar{n}(0,f)\log r+\int_0^r\frac{\bar{n}(t,f)-\bar{n}(0,f)}{t}dt,$$

$$\overline{N}(r,\hat{\infty})=\bar{n}(0,\hat{\infty})\log r+\int_0^r\frac{\bar{n}(t,\hat{\infty})-\bar{n}(0,\hat{\infty})}{t}dt,$$

$$\overline{N}(r,a)=\bar{n}(0,a)\log r+\int_0^r\frac{\bar{n}(t,a)-\bar{n}(0,a)}{t}dt.$$

定义 $f(z)$ 的 Nevanlinna 特征函数为 $T(r,f)=m(r,f)+N(r,f)$，并且定义 $f(z)$ 的级 $\lambda(f)$ 为 $T(r,f)$ 的级，即 $\lambda(f)=\limsup\limits_{r\to+\infty}\log T(r,f)/\log r$．如果 $f(z)$ 的 Nevanlinna 特征函数满足

$$\limsup_{r\to+\infty}T(r,f)/\log r=+\infty,$$

则称 $f(z)$ 是超越的．本文用 $S(r,f)$ 表示任何具有下列性质的量：

$$S(r,f)=o(T(r,f)),r\to+\infty.$$

如果 $f(z)$ 为无限级的，则至多除去一个关于 r 的线测度有限的集合，否则对任意 r 都成立．对于任意点 $a\in E$，定义 E–值亚纯函数 $f(z)$ 在点 a 处的亏量为

$$\delta(a)=\delta(a,f)=\liminf_{r\to+\infty}m(r,a)/T(r,f)=1-\limsup_{r\to+\infty}[N(r,a)+N(r,a)]/T(r,f),$$

$$\delta(\hat{\infty})=\delta(\hat{\infty},f)=\liminf_{r\to+\infty}m(r,f)/T(r,f)=1-\limsup_{r\to+\infty}N(r,f)/T(r,f),$$

$$\Theta(a)=\Theta(a,f)=1-\limsup_{r\to+\infty}\frac{V(r,a)+\overline{N}(r,a)}{T(r,f)},$$

$$\Theta(\hat{\infty})=\Theta(\hat{\infty},f)=1-\limsup_{r\to+\infty}\overline{N}(r,f)/T(r,f).$$

设 $f(z)$ 是定义在复平面上的 E–值亚纯函数，则集合 $\{a\in C^n\cup\{\infty\},\delta(a)>0\}$ 是至多可数的，且有 $\sum\limits_a\delta(a)\leqslant\sum\limits_a\Theta(a)\leqslant 2$．$\sum\limits_a\delta(a)=2$，称 $f(z)$ 是具有最大亏量和的 E–值亚纯函数．本文主要研究具有最大亏量和的 E–值亚纯函数的性质．

设 $f(z)$ 是定义在复平面 C 上的具有最大亏量和的亚纯函数，文献[3-5,11]中研究了 $f(z)$ 及其导函数的特征函数的关系．

1.2　相关结论

关于 E–值亚线函数 $f(z)$ 的亏量，有如下结论．

定理 A[4-5]　设 $f(z)$ 是定义在复平面 C 上的有限级超越亚纯函数，若

$$\sum_a\delta(a)=\eta\geqslant 1\ \text{且}\ \delta(\infty)=2-\eta,$$

则

$$T(r,f')\sim\eta T(r,f)\ (r\to+\infty).$$

如果将定理 A 中的条件 $\sum\limits_a\delta(a)=2$ 替换成 $\sum\limits_a\Theta(a)=2$，文献[3]和文献[6]证明了

定理 B　设 $f(z)$ 是定义在复平面 C 上的有限级超越亚纯函数，若 $\sum\limits_a\Theta(a)=2$，则

$$\lim_{r\to+\infty}T(r,f')/T(r,f)=2-\Theta(\infty).$$

由定理 B，立即可得如下结论．

定理 C　设 $f(z)$ 是定义在复平面 C 上的有限级超越亚纯函数，且有 $\sum\limits_a\Theta(a)=2$，则

（i）当 $\Theta(\infty)=1$ 时，$T(r,f')\sim T(r,f)\ (r\to+\infty)$；

（ii）当 $\Theta(\infty)=0$ 时，$T(r,f')\sim 2T(r,f)\ (r\to+\infty)$．

文献[12]将上述定理推广到高阶导数，得到了如下结果．

定理 D　设 $f(z)$ 是定义在复平面 C 上的有限级超越亚纯函数，且有 $\sum\limits_a\Theta(a)=2$，则对任意的正整数 k，

（i）当 $\Theta(\infty)=1$ 时，$T(r,f^{(k)})\sim T(r,f)\ (r\to+\infty)$；

（ii）当 $\Theta(\infty)=0$ 时，$T(r,f^{(k)})\sim(k+1)T(r,f)\ (r\to+\infty)$．

1.3　主要结果

如果将亚纯函数 $f(z)$ 替换成向量值亚纯函数，文献[13]证明了定理 A 是正确的．一个自然的问题是，将定理 D 中的亚纯函数 $f(z)$ 替换成 E–值亚纯函数，结论是否正确呢？本文将参考文献[12]和文献[14]中的方法来讨论这一问题并证明如下定理．

定理 1　设 $f(z)$ 是定义在复平面 C 上的有限超越 E–值亚纯函数，且满足 $\sum\limits_a\Theta(a)=2$，则对任意

的正整数 k,有

(i) 当 $\Theta(\hat{\infty})=1$ 时,$T(r,f^{(k)})\sim T(r,f)\ (r\to+\infty)$;

(ii) 当 $\Theta(\hat{\infty})=0$ 时,$T(r,f^{(k)})\sim(k+1)T(r,f)\ (r\to+\infty)$.

$\forall \boldsymbol{a}\in E$,注意到 $\delta(\boldsymbol{a})\leqslant\Theta(\boldsymbol{a})$,则由定理 1 立即可得如下推论.

推论1 设 $f(z)$ 是定义在复平面 C 上的有限级超越 E-值亚纯函数,且满足 $\sum\limits_{\boldsymbol{a}}\delta(\boldsymbol{a})=2$,则对任意的正整数 k,有

(i) 当 $\delta(\hat{\infty})=1$ 时,$T(r,f^{(k)})\sim T(r,f)\ (r\to+\infty)$;

(ii) 当 $\delta(\hat{\infty})=0$ 时,$T(r,f^{(k)})\sim(k+1)T(r,f)\ (r\to+\infty)$.

2 定理的证明

定理 1 的证明需要用到如下引理.

引理1[2] 设 $f(z)$ 是定义在 C_R 上的非常数 E-值亚纯函数,则对于 $0<r<R$,$\boldsymbol{a}\in E$,$f(z)\not\equiv\boldsymbol{a}$,有

$$T(r,f)=V(r,\boldsymbol{a})+N(r,\boldsymbol{a})+m(r,\boldsymbol{a})+O(1).$$

引理2[2] 设 $f(z)$ 是定义在 C_R 上的非常数 E-值亚纯函数,且不退化为常数,$\boldsymbol{a}_v\ (v=1,2,\cdots,q)\in E$ 是 $q\ (q\geqslant 2)$ 个互不相同的点,则对于 $0<r<R$,有

$$(q-1)T(r,f)\leqslant\sum_{v=1}^{q}[V(r,\boldsymbol{a}_v)+\overline{N}(r,\boldsymbol{a}_v)]+\overline{N}(r,f)+S(r,f).$$

引理3[15] 设 $f(z)$ 是定义在 C_R 上的非常数 E-值亚纯函数,且不退化为常数,则对任意的正整数 k,有

$$S(r,f^{(k)})=S(r,f),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{\|f^{(k)}(re^{i\theta})\|}{\|f(re^{i\theta})\|}d\theta=S(r,f).$$

定理1的证明 用数学归纳法证明定理 1 的(i),为此先证明其对 $k=1$ 成立.根据特征函数的定义和引理 3 可得

$$T(r,f')=m(r,f')+N(r,f')\leqslant m(r,f)+N(r,f')+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{\|f'(re^{i\theta})\|}{\|f(re^{i\theta})\|}d\theta\leqslant m(r,f)+N(r,f)+\overline{N}(r,f)+S(r,f)\leqslant T(r,f)+\overline{N}(r,f)+S(r,f).$$

因此

$$\lim_{r\to+\infty}T(r,f')/T(r,f)\leqslant 2-\Theta(\hat{\infty}).\qquad(1)$$

设 $\{\boldsymbol{a}^{(\mu)}\}$ 是 E 中 1 列互不相同且满足 $\delta(\boldsymbol{a}^{(\mu)})>0$ 的点,对于任意的正整数 q 和正整数 k,文献[15]证明了

$$\sum_{\mu=1}^{q}m(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})\leqslant T(r,f')-N(r,0,f')+S(r,f),\qquad(2)$$

$$\sum_{\mu=1}^{q}m(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})\leqslant m(r,0,f^{(k+1)})+S(r,f).\qquad(3)$$

(2) 式两边同时加上 $\sum\limits_{\mu=1}^{q}N(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})$,则有

$$\sum_{\mu=1}^{q}T\left(r,\frac{1}{f-\boldsymbol{a}^{(\mu)}}\right)\leqslant T(r,f')+\sum_{\mu=1}^{q}N(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})-N(r,0,f')+S(r,f)=T(r,f')+\sum_{\mu=1}^{q}\overline{N}(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})-N_0(r,0,f')+S(r,f)\leqslant T(r,f')+\sum_{\mu=1}^{q}\overline{N}(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})+S(r,f),$$

其中 $N_0(r,0,f')$ 由 f'(不为任何 $f-\boldsymbol{a}^{(i)}\ (i=1,2,\cdots,q)$ 的零点)的零点组成.又由引理 1 知

$$T\left(r,\frac{1}{f-\boldsymbol{a}^{(\mu)}}\right)+V(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})=T(r,f)+O(1).$$

结合上述 2 式可得

$$qT(r,f)\leqslant T(r,f')+S(r,f)+\sum_{\mu=1}^{q}(\overline{N}(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})+V(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})).$$

上式两端同时除以 $T(r,f)$ 即得

$$q\leqslant\liminf_{r\to+\infty}\frac{T(r,f')}{T(r,f)}+\limsup_{r\to+\infty}\frac{S(r,f)}{T(r,f)}+\sum_{\mu=1}^{q}\limsup_{r\to+\infty}\frac{\overline{N}(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})+V(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})}{T(r,f)}=\liminf_{r\to+\infty}\frac{T(r,f')}{T(r,f)}+\limsup_{r\to+\infty}\frac{S(r,f)}{T(r,f)}+\sum_{\mu=1}^{q}\{1-\Theta(\boldsymbol{a}^{(\mu)})\}.$$

因此

$$\liminf_{r\to+\infty}T(r,f')/T(r,f)\geqslant\sum_{\mu=1}^{q}\Theta(\boldsymbol{a}^{(\mu)}).$$

由 q 的任意性知

$$2-\Theta(\hat{\infty})=\sum_{\boldsymbol{a}\in E}\Theta(\boldsymbol{a})\leqslant\liminf_{r\to+\infty}\frac{T(r,f')}{T(r,f)}.$$

由上式和(1)式得到

$$\lim_{r\to+\infty}T(r,f')/T(r,f)=2-\Theta(\hat{\infty}),$$

即当 $\Theta(\hat{\infty})=1$ 时,$T(r,f')\sim T(r,f)\ (r\to+\infty)$.

下面假设当 $\Theta(\hat{\infty})=1$ 时,

$$T(r,f^{(k)})\sim T(r,f)\ (r\to+\infty).\qquad(4)$$

注意到 $\overline{N}(r,f^{(k)})=\overline{N}(r,f)$ 和 $\Theta(\hat{\infty})=1$,结合(4)式可得

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{\overline{N}(r,f^{(k)})}{T(r,f^{(k)})}=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\overline{N}(r,f)}{T(r,f)}=0.$$

因此

$$\Theta(\hat{\infty},f^{(k)})=1. \qquad (5)$$

根据特征函数的定义和引理 3 并结合(4) 式可得

$$T(r,f^{(k+1)})=m(r,f^{(k+1)})+N(r,f^{(k+1)})=$$
$$m(r,f^{(k)})+N(r,f^{(k+1)})+$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{\|f^{(k+1)}(re^{i\theta})\|}{\|f^{(k)}(re^{i\theta})\|}d\theta\leqslant m(r,f^{(k)})+$$
$$N(r,f^{(k)})+\overline{N}(r,f^{(k)})+S(r,f)\leqslant$$
$$T(r,f^{(k)})+\overline{N}(r,f^{(k)})+S(r,f).$$

由上式及(4) 式和(5) 式可得

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{T(r,f^{(k+1)})}{T(r,f)}\leqslant\limsup_{r\to+\infty}\frac{T(r,f^{(k+1)})}{T(r,f^{(k)})}\cdot$$
$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{T(r,f^{(k)})}{T(r,f)}\leqslant 2-\Theta(\hat{\infty},f^{(k)})=1. \qquad (6)$$

另一方面，在(3) 式两边同时加上 $\sum_{\mu=1}^{q}N(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})$，注意到 $N(r,0,f^{(k+1)})\geqslant N(r,0,f')$，则有

$$\sum_{\mu=1}^{q}T\left(r,\frac{1}{f-\boldsymbol{a}^{(\mu)}}\right)\leqslant T(r,f^{(k+1)})+\sum_{\mu=1}^{q}N(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})-$$
$$N(r,0,f^{(k+1)})+S(r,f)\leqslant$$
$$T(r,f^{(k+1)})+\sum_{\mu=1}^{q}N(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})-N(r,0,f')+S(r,f)\leqslant$$
$$T(r,f^{(k+1)})+\sum_{\mu=1}^{q}\overline{N}(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})-N_0(r,0,f')+S(r,f)\leqslant$$
$$T(r,f^{(k+1)})+\sum_{\mu=1}^{q}\overline{N}(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})+S(r,f),$$

因此由引理 1 知

$$qT(r,f)\leqslant T(r,f^{(k+1)})+\sum_{\mu=1}^{q}(\overline{N}(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})+$$
$$V(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)}))+S(r,f).$$

上式两端同时除以 $T(r,f)$，即得

$$q\leqslant\liminf_{r\to+\infty}\frac{T(r,f^{(k+1)})}{T(r,f)}+$$
$$\sum_{\mu=1}^{q}\limsup_{r\to+\infty}\frac{\overline{N}(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})+V(r,\boldsymbol{a}^{(\mu)})}{T(r,f)}+$$
$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{S(r,f)}{T(r,f)}=\liminf_{r\to+\infty}\frac{T(r,f^{(k+1)})}{T(r,f)}+$$
$$\sum_{\mu=1}^{q}\{1-\Theta(\boldsymbol{a}^{(\mu)})\}+\limsup_{r\to+\infty}\frac{S(r,f)}{T(r,f)}.$$

因此

$$\liminf_{r\to+\infty}\frac{T(r,f^{(k+1)})}{T(r,f)}\geqslant\sum_{\mu=1}^{q}\Theta(\boldsymbol{a}^{(\mu)}).$$

由 q 的任意性知

$$2-\Theta(\hat{\infty})=\sum_{a\in E}\Theta(\boldsymbol{a})\leqslant\liminf_{r\to+\infty}\frac{T(r,f^{(k+1)})}{T(r,f)}.$$

又因为 $\Theta(\hat{\infty})=1$，因此 $\liminf\limits_{r\to+\infty}T(r,f^{k+1})/T(r,f)\geqslant 1$，结合(6) 式得

$$T(r,f^{(k+1)})\sim T(r,f)\ (r\to+\infty).$$

定理1 的(i) 得证. 下证(ii). 由引理2 知，$\forall q\geqslant 2$，有

$$(q-1)T(r,f)\leqslant\sum_{v=1}^{q}[V(r,\boldsymbol{a}_v)+\overline{N}(r,\boldsymbol{a}_v)]+$$
$$\overline{N}(r,f)+S(r,f),$$

其中设$\{\boldsymbol{a}_v\}$是 E 中所有满足 $\delta(\boldsymbol{a}_v)>0$ 的互不相同向量. 上式两端同时除以 $T(r,f)$ 可得

$$q\leqslant 1+\sum_{v=1}^{q}\limsup_{r\to+\infty}\frac{V(r,\boldsymbol{a}_v)+\overline{N}(r,\boldsymbol{a}_v)}{T(r,f)}+$$
$$\liminf_{r\to+\infty}\frac{\overline{N}(r,f)}{T(r,f)}+\limsup_{r\to+\infty}\frac{S(r,f)}{T(r,f)},$$

即

$$\sum_{\nu=1}^{q}\Theta(\boldsymbol{a}_\nu)\leqslant 1+\liminf_{r\to+\infty}\overline{N}(r,f)/T(r,f)\leqslant$$
$$1+\limsup_{r\to+\infty}\overline{N}(r,f)/T(r,f).$$

由 q 的任意性并注意到 $\Theta(\hat{\infty})=0$，上式即为

$$2=\sum_{a\in E}\Theta(\boldsymbol{a})\leqslant 1+\liminf_{r\to+\infty}\overline{N}(r,f)/T(r,f)\leqslant$$
$$1+\limsup_{r\to+\infty}\overline{N}(r,f)/T(r,f)=2.$$

因此

$$T(r,f)\sim N(r,f)\sim\overline{N}(r,f)\ (r\to+\infty). \qquad (7)$$

另一方面

$$(k+1)\overline{N}(r,f)\leqslant N(r,f^{(k)})\leqslant T(r,f^{(k)})\leqslant$$
$$m(r,f)+N(r,f^{(k)})+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{\|f^{(k)}(re^{i\theta})\|}{\|f(re^{i\theta})\|}d\theta\leqslant$$
$$m(r,f)+N(r,f)+k\overline{N}(r,f)+S(r,f)=T(r,f)+$$
$$k\overline{N}(r,f)+S(r,f).$$

结合(7) 式即得

$$T(r,f^{(k)})\sim(k+1)T(r,f)\ (r\to+\infty).$$

从定理 1 的证明，立即可得如下推论.

推论2　设 $f(z)$ 是定义在复平面 C 上的有限级超越 E-值亚纯函数，且满足 $\sum_{a}\Theta(\boldsymbol{a})=2$，则

$$\lim_{r\to+\infty}T(r,f')/T(r,f)=2-\Theta(\hat{\infty}).$$

3　参考文献

[1] Ziegler Hans J W. Vector valued Nevanlinna theory [M]. Boston: Pitman(Advanced Publishing Program), 1982.

[2] Hu Chuangan, Hu Qijian. The Nevanlinna´s theorems for a class [J]. Complex Var Elliptic Equ, 2006, 51(8): 777-791.

[3] Singh S K,Gopalakrishna H S. Exceptional values of an entire and meromorphic functions [J]. Math Ann,1971,191(2):121-142.

[4] Edrei A. Sums of deficiencies of meromorphic functions II [J]. J Analyse Math,1967,19(14):79-107.

[5] Weitsman Allen. Meromorphic functions with maximal deficiency sum and a conjecture of F. Nevanlinna [J]. Acta Math,1969,123(1):115-139.

[6] Singh S K,Kulkarni V N. Characteristc function of a meromorphic function and its derivative [J]. Ann Polo Math,1973,28(1):123-133.

[7] Xuan Zuxing,Wu Nan. On the Nevanlinna′s theory for vector-valued mappings [J]. Abstr Appl Anal,2010(1/2/3/4):1-15.

[8] Wu Zhaojun,Xuan Zuxing. Milloux inequality of E-valued meromorphic function [J]. The Scientific World Journal,2014:861573,7.

[9] Wu Zhaojun,Chen Yuxian. E-valued meromorphic functions with maximal deficiency sum [J]. Applied Mathematics E-Notes,2013,13(1):141-147.

[10] Wu Zhaojun,Xuan Zuxing. Deficiency and relative deficiency of E-valued meromorphic functions [J]. Applied Mathematics E-Notes,2013,13(1):100-108.

[11] 吴佳,吴芬,陈裕先. 向量值亚纯函数的亏量 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(3):229-232.

[12] Wu Jia,Wu Zhaojun. Characteristic function of a meromorphic function and its derivatives [J]. Bull of the Iranian Math Soc,2013,39(6):1117-1123.

[13] Wu Zhaojun,Chen Yuxian. An inequality of meromorphic vector functions and its application [J]. Abstract and Applied Analysis,2011,Article ID 518972,13.

[14] 杨连中. 关于亚纯函数的亏量与特征函数 [J]. 山东大学学报:自然科学版,1989,24(1):7-11.

[15] Wu Zhaojun,Xuan Zuxing. Deficiency of E-valued meromorphic functions [J]. Bull Belg Math Simon Stevin,2012,19(3):703-715.

The Characteristic Function of E-Valued Meromorphic Functions

WU Zhaojun,WANG Bo

(School of Mathematics and Statistics,Hubei University of Science and Technology,Xianning Hubei 437100,China)

Abstract: The main purpose of this paper is to study the E-valued meromorphic function from the complex plane C to infinite dimension Banach space E. Some facts on the relationship between the characteristic function of meromorphic function with maximum deficiency sum and that of its derivative functions will be established for E-valued meromorphic function.

Key words: E-valued meromorphic function; deficiency sum; characteristic function

(责任编辑:王金莲)