文章编号: 1000-5862(2016) 05-0511-04

非自治(q,p) -Laplace 方程组周期解的存在性

万树园,王智勇*

(南京信息工程大学数学与统计学院,江苏 南京 210044)

摘要: 利用临界点理论中的极大极小方法研究了非自治(q,p) -Laplace 方程组周期解的存在性,借助分析技巧,在一系列更弱的条件下得到一个新的存在性定理,推广和发展了已有文献中的相关结果.

关键词: 周期解; (q,p) -Laplace 方程组; Cerami 条件; 鞍点定理

中图分类号: O 175.12 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.05.13

0 引言及主要结果

考虑非自治(q,p) -Laplace 方程组

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\dot{u}_1(t)|^{q-2}\dot{u}_1(t)) = \\ \nabla_{u_1}F(t,u_1(t),u_2(t)),\text{a. e. } t\in[0,T], \\ -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\dot{u}_2(t)|^{p-2}\dot{u}_2(t)) = \\ \nabla_{u_2}F(t,u_1(t),u_2(t)),\text{a. e. } t\in[0,T], \\ u_1(0)-u_1(T)=\dot{u}_1(0)-\dot{u}_1(T)=0, \\ u_2(0)-u_2(T)=\dot{u}_2(0)-\dot{u}_2(T)=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $1<p,q<+\infty$,$T>0$,F: $[0,T]\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ 满足:

(A1) $\forall(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$,$F$ 关于 t 是可测的;

(A2) F 对 a. e. $t\in[0,T]$ 关于(x_1,x_2) 是连续可微的;

(A3) $\exists a_1,a_2\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$,$b\in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$ 使得

$$|F(t,x_1,x_2)|,|\nabla_{x_1}F(t,x_1,x_2)|,|\nabla_{x_2}F(t,x_1,x_2)|\leqslant [a_1(|x_1|)+a_2(|x_2|)]b(t)$$

对所有(x_1,x_2) $\in\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$,a. e. $t\in[0,T]$ 成立.

当 $p=q$ 时,系统(1) 退化为 Hamilton 系统

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}(t)) = \nabla F(t,u(t)),\text{a. e. } t\in[0,T], \\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0. \end{cases} \tag{2}$$

许多学者利用变分法研究了当 $p=2$ 或 $p>1$ 时系统(2) 周期解的存在性,并得到一系列存在性和多解性结论[1-8]. 特别地,当 $p=2$ 时,文献[1] 考虑了在 F 为次 2 次的情况下系统(2) 周期解的存在性,并得到如下定理.

定理 A[1] 若 F 满足假设(A1) ~ (A3) 及条件

(S1) $\exists\mu(0<\mu<2)$ 以及常数 $R>0$ 使得

$$(\nabla F(t,x),x)\leqslant\mu F(t,x)$$

对所有 $|x|\geqslant R$,a. e. $t\in[0,T]$ 成立;

(S2) 当 $|x|\to+\infty$ 时,$F(t,x)\to+\infty$ 对 a. e. $t\in[0,T]$ 一致成立,

则当 $p=2$ 时,系统(2) 至少存在 1 个解.

定理 B[1] 若 F 满足假设(A1) ~ (A3),(S1) 及条件

(S3) 当 $|x|\to+\infty$ 时,$\int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t\to+\infty$;

(S4) $F(t,\cdot)$ 对 a. e. $t\in[0,T]$ 是(β,γ) -次凸的,其中 $\gamma>0$,即

$$F(t,\beta(x+y))\leqslant\gamma(F(t,x)+F(t,y))$$

对所有的 $x,y\in\mathbf{R}^N$ 成立,

则当 $p=2$ 时,系统(2) 至少存在 1 个解.

近年来,D. Pasca 等[9-13] 研究更一般的非自治(q,p) -Laplace 方程组周期解的存在性和多解性问题. 受文献[1,10,14] 的启发,得到如下定理.

定理 1 若 F 满足假设(A1) ~ (A3) 及条件

(H1) $\exists\mu_1(0<\mu_1<r)$,其中 $r=\min(q,p)$ 以及 $M>0$ 使得

$$(\nabla_{(x_1,x_2)}F(t,x_1,x_2),(x_1,x_2))\leqslant\mu_1F(t,x_1,x_2)$$

对所有 $|(x_1,x_2)|\geqslant M$,a. e. $t\in[0,T]$ 成立,

(H2) 当 $|(x_1,x_2)|\to+\infty$ 时,

$$\int_0^T F(t,x_1,x_2)\mathrm{d}t\to+\infty,$$

收稿日期: 2015-12-26

基金项目: 国家自然科学基金(11571176) 资助项目.

通信作者: 王智勇(1979-) ,男,江苏无锡人,副教授,博士,主要从事非线性泛函分析的研究.

则系统(1)至少存在1个解.

注1 当 $p=q=2$,$F(t,x_1,x_2)=F_1(t,x_1)$ 时,定理1完全推广和统一了定理A和定理B.一方面,条件(H2)比条件(S2)弱,因此定理1推广了定理A;另一方面,借助分析技巧,去掉了定理B中的条件(S4),所以定理1改进了定理B.

注2 存在函数满足定理1.如令

$F(t,x_1,x_2)=d(t)(2+|x_1|^{q/2}+|x_2|^{p/2})$,$\forall(t,x_1,x_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$,

其中

$$d(t)=\begin{cases}\sin(2\pi t/T), & t\in[0,T/2],\\ 0, & t\in[T/2,T].\end{cases}$$

直接计算可知 F 满足定理1中的所有条件.

1 变分结构

为方便起见,令 $c_i>0(i=1,2,\cdots)$ 为一系列正常数.令 $T>0$,$1<q,p<+\infty$,定义 $|\cdot|$ 为 $\mathbf{R}^N$ 空间中的欧几里得范数.$W_T^{1,p}$ 为 Sobolev 空间,其中 $u\in L^p(0,T;\mathbf{R}^N)$ 且弱导数 $\dot{u}\in L^p(0,T;\mathbf{R}^N)$.$W_T^{1,p}$ 空间中的范数为

$$\|u\|_{W_T^{1,p}}:=\left(\int_0^T(|u(t)|^p+|\dot{u}(t)|^p)\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

定义 W 空间为

$$W:=W_T^{1,q}\times W_T^{1,p},$$

其范数为 $\|(u_1,u_2)\|_W:=\|u_1\|_{W_T^{1,q}}+\|u_2\|_{W_T^{1,p}}$.显然空间 W 是1个自反的 Banach 空间.

$\forall(u_1,u_2)\in W$,令 $(\bar{u}_1,\bar{u}_2):=\left(\int_0^T u_1(t)\mathrm{d}t,\int_0^T u_2(t)\mathrm{d}t\right)/T$,$(\tilde{u}_1(t),\tilde{u}_2(t)):=(u_1(t),u_2(t))-(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$,则有不等式

$$\|\tilde{u}_1\|_\infty\leqslant c_1\|\dot{u}_1\|_q,\ \|\tilde{u}_2\|_\infty\leqslant c_1\|\dot{u}_2\|_p,$$
$$\|\tilde{u}_1\|_q\leqslant c_2\|\dot{u}_1\|_q,\ \|\tilde{u}_2\|_p\leqslant c_2\|\dot{u}_2\|_p,\quad(3)$$

其中 $\|u_1\|_q:=\left(\int_0^T|u_1(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}$,$\|u_2\|_p:=\left(\int_0^T|u_2(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}$,$\|\tilde{u}_i\|_\infty:=\max\limits_{0<t<T}|\tilde{u}_i(t)|$,$i=1,2$.因为空间 W 嵌入到空间 $C(0,T;\mathbf{R}^N)\times C(0,T;\mathbf{R}^N)$ 是紧的,所以存在1个常数 $d>0$,使得 $\forall(u_1,u_2)\in W$ 有

$$\|(u_1,u_2)\|_\infty\leqslant d\|(u_1,u_2)\|_W.$$

考虑 W 空间上的能量泛函

$$\varphi(u_1,u_2)=\frac{1}{q}\int_0^T|\dot{u}_1(t)|^q\mathrm{d}t+\frac{1}{p}\int_0^T|\dot{u}_2(t)|^p\mathrm{d}t-\int_0^T F(t,u_1(t),u_2(t))\mathrm{d}t,$$

且对所有 $u_i\in W_T^{1,q}$,$v_i\in W_T^{1,p}$,$i=1,2$ 有

$$(\varphi'(u_1,u_2),(v_1,v_2))=\int_0^T(|\dot{u}_1|^{q-2}\dot{u}_1,\dot{v}_1)\mathrm{d}t+\int_0^T(|\dot{u}_2|^{p-2}\dot{u}_2,\dot{v}_2)\mathrm{d}t-\int_0^T(\nabla_{(u_1,u_2)}F(t,u_1,u_2),(v_1,v_2))\mathrm{d}t.$$

由文献[10]易知 φ 连续可微且是弱下半连续的,φ 的临界点对应系统(1)的解.

2 定理1的证明

假设序列 $\{(u_{1n},u_{2n})\}\subset W$,若 $\varphi(u_{1n},u_{2n})$ 有界且当 $n\to+\infty$ 时,有 $(1+\|(u_{1n},u_{2n})\|)\|\varphi'(u_{1n},u_{2n})\|\to0$,则称序列 $\{(u_{1n},u_{2n})\}$ 为 φ 的(C)序列.若 φ 的每一个(C)序列都有收敛子列,则称 φ 满足(C)条件.

引理1 若假设(A1)~(A3),(H1),(H2)成立,则能量泛函 φ 满足(C)条件.

证 令 $\{(u_{1n},u_{2n})\}\subset W$ 是 φ 的(C)序列,则存在常数 $L>0$,使得 $\forall n\in\mathbf{N}$ 有

$$|\varphi(u_{1n},u_{2n})|\leqslant L,$$
$$(1+\|(u_{1n},u_{2n})\|)\|\varphi'(u_{1n},u_{2n})\|\leqslant L.\quad(4)$$

由文献[10]知,只需要证明 $\{(u_{1n},u_{2n})\}$ 有界.

根据假设(A1)~(A3),(H1)可得,对所有 $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$,a.e. $t\in[0,T]$ 有

$$-h(t)+(\nabla_{(x_1,x_2)}F(t,x_1,x_2),(x_1,x_2))\leqslant\mu_1F(t,x_1,x_2),\quad(5)$$

其中

$$h(t):=(r+M)\max_{|(x_1,x_2)|\leqslant M}[a_1(|x_1|)+a_2(|x_2|)]b(t)\geqslant0.$$

结合(4)式和(5)式有

$$(r+1)L\geqslant(1+\|(u_{1n},u_{2n})\|)\|\varphi'(u_{1n},u_{2n})\|-\mu_1\varphi(u_{1n},u_{2n})\geqslant(\varphi'(u_{1n},u_{2n}),(u_{1n},u_{2n}))-\mu_1\varphi(u_{1n},u_{2n})=(1-\mu_1/q)\int_0^T|\dot{u}_{1n}(t)|^q\mathrm{d}t+(1-\mu_1/p)\int_0^T|\dot{u}_{2n}(t)|^p\mathrm{d}t-\int_0^T(\nabla_{(u_{1n},u_{2n})}F(t,u_{1n}(t),u_{2n}(t)),(u_{1n}(t),u_{2n}(t)))\mathrm{d}t+\mu_1\int_0^T F(t,u_{1n}(t),u_{2n}(t))\mathrm{d}t\geqslant(1-\mu_1/q)\int_0^T|\dot{u}_{1n}(t)|^q\mathrm{d}t+(1-\mu_1/p)\cdot\int_0^T|\dot{u}_{2n}(t)|^p\mathrm{d}t-\int_0^T h(t)\mathrm{d}t\quad(6)$$

对所有 $n\in\mathbf{N}$ 成立.注意到 μ_1 的范围,由(6)式可知

$$\int_0^T |\dot{u}_{1n}(t)|^q \mathrm{d}t \leqslant c_3, \int_0^T |\dot{u}_{2n}(t)|^p \mathrm{d}t \leqslant c_4. \quad (7)$$

继续利用(3)式和(6)式有

$$(r+1)L \geqslant (1-\mu_1/q)\int_0^T |\dot{u}_{1n}(t)|^q \mathrm{d}t + (1-\mu_1/p)\cdot \int_0^T |\dot{u}_{2n}(t)|^p \mathrm{d}t - \int_0^T h(t)\,\mathrm{d}t \geqslant c_5(\|\dot{u}_{1n}\|_{L^q}^r + \|\dot{u}_{2n}\|_{L^p}^r) - \int_0^T h(t)\,\mathrm{d}t \geqslant c_6(\|\tilde{u}_{1n}\|_{W_T^{1,q}}^r + \|\tilde{u}_{2n}\|_{W_T^{1,p}}^r) - \int_0^T h(t)\,\mathrm{d}t \geqslant c_7\|(\tilde{u}_{1n},\tilde{u}_{2n})\|_W^r - \int_0^T h(t)\,\mathrm{d}t \quad (8)$$

对所有 $n \in \mathbf{N}$ 成立.

假设当 $n \to +\infty$ 时，$\|(u_{1n},u_{2n})\| \to +\infty$ 令

$$(v_{1n},v_{2n}) = \frac{(u_{1n},u_{2n})}{\|(u_{1n},u_{2n})\|_W} = \frac{(\bar{u}_{1n},\bar{u}_{2n})}{\|(u_{1n},u_{2n})\|_W} + \frac{(\tilde{u}_{1n},\tilde{u}_{2n})}{\|(u_{1n},u_{2n})\|_W} = (\bar{v}_{1n},\bar{v}_{2n}) + (\tilde{v}_{1n},\tilde{v}_{2n}),$$

则$\{(v_{1n},v_{2n})\}$在空间W上有界，并且因为空间 $W = W_T^{1,q}\times W_T^{1,p}$ 嵌入到空间 $C(0,T;\mathbf{R}^N)\times C(0,T;\mathbf{R}^N)$ 是紧的，所以存在子序列，不妨仍记为$\{(v_{1n},v_{2n})\}$，使得在 W 上，有

$$(v_{1n},v_{2n}) \xrightarrow{\text{弱}} (v_1,v_2),$$

在 $C(0,T;\mathbf{R}^N)\times C(0,T;\mathbf{R}^N)$ 上，

$$(v_{1n},v_{2n}) \xrightarrow{\text{强}} (v_1,v_2). \quad (9)$$

在不等式(8)两边同时除以 $\|(u_{1n},u_{2n})\|_W^r$ 可得，当 $n\to+\infty$ 时，

$$\|(\tilde{v}_{1n},\tilde{v}_{2n})\|_W \to 0. \quad (10)$$

再根据(9)式和(10)式有，当 $n\to+\infty$ 时，

$$(v_{1n},v_{2n}) \to (\bar{v}_1,\bar{v}_2),\ (v_1,v_2) = (\bar{v}_1,\bar{v}_2),$$

$$|(\bar{v}_1,\bar{v}_2)|^r \geqslant |\bar{v}_1|^r + |\bar{v}_2|^r \geqslant c_8\|(\bar{v}_1,\bar{v}_2)\|_W^r = c_8.$$

因此，当 $n\to+\infty$ 时，$|(u_{1n}(t),u_{2n}(t))| \to +\infty$，结合(H2)可知

$$\int_0^T F(t,u_{1n}(t),u_{2n}(t))\,\mathrm{d}t \to +\infty \quad (11)$$

另一方面，由(4)式和(7)式有

$$\int_0^T F(t,u_{1n}(t),u_{2n}(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{q}\int_0^T |\dot{u}_{1n}(t)|^q \mathrm{d}t + \frac{1}{p}\int_0^T |\dot{u}_{2n}(t)|^p \mathrm{d}t - \varphi(u_{1n},u_{2n}) \leqslant c_9,$$

这与(11)式矛盾，所以$\{(u_{1n},u_{2n})\}$在 W 上有界，即 φ 满足(C)条件.

定理 1 的证明　令 $\tilde{W}: = \{(u_1,u_2)\in W \mid (\bar{u}_1,\bar{u}_2) = (0,0)\}$，则 $W = \tilde{W}\oplus(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N)$. 由引理 1 已经得到 $\varphi\in C^1(W,\mathbf{R})$ 且满足(C)条件. 根据文献[2]，鞍点定理[15]在(C)条件下仍然成立. 由鞍点定理，只需证明：

(i) 在 $\tilde{W}$ 中，当 $\|(u_1,u_2)\|\to+\infty$ 时，$\varphi(u_1,u_2)\to+\infty$；

(ii) 在 $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$ 中，当 $\|(u_1,u_2)\|\to+\infty$ 时，$\varphi(u_1,u_2)\to-\infty$

首先证明(i)，由条件(H1)，利用文献[14]中类似的方法有

$$F(t,x_1,x_2) \leqslant c_{10}|(x_1,x_2)|^{\mu_1}, |(x_1,x_2)| \geqslant M.$$

由此结合假设(A1) ~ (A3)，$\forall (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$，a. e. $t\in[0,T]$ 有

$$F(t,x_1,x_2) \leqslant c_{10}|(x_1,x_2)|^{\mu_1} + h_1(t), \quad (12)$$

其中 $h_1(t): = \max\limits_{|(x_1,x_2)|\leqslant M}[a_1(|x_1|) + a_2(|x_2|)]b(t)$.

$\forall (u_1,u_2)\in\tilde{W}$，根据(3)式，(5)式和(12)式，并注意到 $0<\mu_1<r$，则当$|(u_1(t),u_2(t))|\to+\infty$ 时，

$$\varphi(u_1,u_2) = \frac{1}{q}\int_0^T |\dot{u}_1(t)|^q \mathrm{d}t + \frac{1}{p}\int_0^T |\dot{u}_2(t)|^p \mathrm{d}t - \int_0^T F(t,u_1(t),u_2(t))\,\mathrm{d}t \geqslant c_{11}(\|u_1\|_{W_T^{1,q}}^q + \|u_2\|_{W_T^{1,p}}^p) - \int_0^T (c_{10}|(u_1,u_2)|^{\mu_1} + h_1(t))\,\mathrm{d}t \geqslant c_{12}\|(u_1,u_2)\|_W^r - c_{13}\|(u_1,u_2)\|_\infty^{\mu_1} - c_{14} \geqslant c_{12}\|(u_1,u_2)\|_W^r - c_{13}d^{\mu_1}\|(u_1,u_2)\|_W^{\mu_1} - c_{14} \to +\infty,$$

因此，条件(i)成立.

最后证明(ii)，$\forall (u_1,u_2)\in\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$，当$|(u_1(t),u_2(t))|\to+\infty$ 时，由(H2)有

$$\varphi(u_1,u_2) = -\int_0^T F(t,u_1(t),u_2(t))\,\mathrm{d}t \to -\infty,$$

即条件(ii)也成立.

故根据鞍点定理，定理 1 得证.

3　结论

本文研究了一类非自治的(q,p)-Laplace 系统周期解的存在性. 依据系统的结构，借助分析技巧，在一系列更弱的条件下，在 Sobolev 空间中运用临界点理论中的鞍点定理得到了该类系统周期解的存在性定理，推广和发展了已有文献中的相关结果.

4　参考文献

[1] Tang Chunlei，Wu Xingping. Notes on periodic solutions of subquadratic second order systems[J]. J Math Anal Appl，2003，285(1)：8-16.

[2] Bartolo P，Benci V，Fortunato D. Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with

strong resonance at infinity [J]. Nonlinear Anal,1983,7(9):981-1012.

[3] Xu Bo,Tang Chunlei. Some existence results on periodic solutions of ordinary p-Laplacian systems [J]. J Math Anal Appl,2007,333(2):1228-1236.

[4] Zhang Qiongfen,Tang Xianhua. New existence of periodic solutions for second order non-autonomous second-order Hamiltonian systems [J]. J Math Anal Appl,2010,369(1):357-367.

[5] Wang Zhiyong,Xiao Jianzhong. On periodic solutions of subquadratic second order non-autonomous Hamiltonian systems [J]. Appl Math Lett,2015,40:72-77.

[6] 张申贵. 局部超线性常微分 p-Laplacian 系统的多重周期解 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(3):240-243.

[7] Jiang Qin,Tang Chunlei. Periodic and subharmonic solutions of a class of subquadratic second-order Hamiltonian systems [J]. J Math Anal Appl,2007,328(1):380-389.

[8] Wang Zhiyong,Zhang Jihui. Periodic solutions of a class of second order non-autonomous Hamiltonian systems [J]. Nonlinear Anal,2010,72(12):4480-4487.

[9] Pasca D. Periodic solutions of a class of nonautonomous second order differential systems with (q,p)-Laplacian [J]. Bull Belg Math Soc Simon Stevin,2010,17(5):841-851.

[10] Pasca D,Tang Chunlei. Some existence results on periodic solutions of nonautonomous second order differential systems with (q,p)-Laplacian [J]. Appl Math Lett,2010,23(3):246-251.

[11] Pasca D,Tang Chunlei. Some existence results on periodic solutions of ordinary (q,p)-Laplacian systems [J]. J Appl Math Inform,2011,29(1/2):39-48.

[12] Pasca D,Tang Chunlei. New existence results on periodic solutions of nonautonomous second order differential systems with (q,p)-Laplacian [J]. Bull Belg Math Soc Simon Stevin,2012,19(1):19-27.

[13] Pasca D,Wang Zhiyong. New existence results on periodic solutions of nonautonomous second order Hamiltonian systems with (q,p)-Laplacian [J]. Bull Belg Math Soc Simon Stevin,2013,20(1):155-166.

[14] 崔德标. 二阶非自治(q,p)-Laplace 方程组解的存在性 [J]. 中山大学学报:自然科学版,2013,52(3):45-47.

[15] Mawhin J,Willem M. Critical point theory and Hamiltonian systems [M]. New York:Springer-Verlag,1989.

The Existence of Periodic Solution for Nonautonomous Equations with (q,p)-Laplacian

WAN Shuyuan,WANG Zhiyong*

(College of Mathematics and Statistics,Nanjing University of Information Science & Technology,Nanjing Jiangsu 210044,China)

Abstract: By using the minimax methods in critical point theory and some analytical techniques,the existence of periodic solution for nonautonomous equations with (q,p)-Laplacian is studied. Under a series of weaker conditions,a new existence theorem is obtained. The theorem extends and improves some results in the known literatures.

Key words: periodic solution; equations with (q,p)-Laplacian; Cerami condition; saddle point theorem

(责任编辑:曾剑锋)