文章编号:1000-5862(2016)06-0587-04

复合函数方程的超越亚纯解

高凌云,刘曼莉

(暨南大学数学系,广东 广州　510632)

摘要:利用亚纯函数 Nevanlinna 值分布理论,研究了一类复合函数方程和一类复合函数方程组的超越亚纯解的性质问题,得到了 2 个有关复合函数方程和复合函数方程组当给予其系数的极点控制时,其解的特征估计和计数估计,将 Silvennoinen 的某些结果推广至更为复杂的复合函数方程和复合函数方程组中.举例表明定理中的条件是精确的.

关键词:复合函数方程;超越亚纯解;值分布理论

中图分类号:O 174.52　　文献标志码:A　　DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.06.08

0　引言与主要结果

采用 Nevanlinna 值分布理论的基本概念和通常记号[1-2].

函数方程在实域里已有广泛的研究,而在复域里研究还是始于 20 世纪 70 年代,R. Goldstein 利用 Nevanlinna 值分布理论研究了多类函数方程的亚纯解存在性问题,写出了一系列的论文,得到了许多结果[3-6].随后,一些作者也开始了这方面内容以及复差分函数的值分布研究,如 W. Bergweiler[7-8],J. Heittokangas[9],陈宗煊[10]以及甘会林[11]等,得到了许多精彩的结论.

2003 年,H. Silvennoinen 研究了如下的复合函数方程超越亚纯解的存在性问题

$$f(p(z))=\sum_{i=0}^{m}a_i(z)f(z)^i,$$

得到了一些结果[12].

本文主要目的是利用 Nevanlinna 值分布理论,在 H. Silvennoinen 论文的基础上,进一步将其结果推广至更为复杂的复合函数方程和方程组中.

设有复合函数方程

$$\sum_{l=0}^{q}d_l(z)f(p(z))^l=\sum_{i=0}^{m}a_i(z)f(z)^i\Big/\sum_{j=0}^{n}b_j(z)f(z)^j,\tag{1}$$

其中$\{a_i\}$,$\{b_j\}$,$\{d_l\}$都是不恒为零的亚纯函数,$p(z)=c_kz^k+c_{k-1}z^{k-1}+\cdots+c_1z+c_0$,$c_k\neq0$,$k\geqslant2$.

笔者考虑了复差分方程和几类复合函数方程组亚纯解的存在性问题,得到了一些结果[13-17].本文继续这方面内容的研究,即研究对一类复合函数方程组当给予其系数的极点控制时其解的增长性问题,这类方程组形式为

$$\begin{cases}f_1(p(z))=\sum\limits_{i=0}^{m}a_i(z)f_2(z)^i,\\ f_2(p(z))=\sum\limits_{j=0}^{m}b_j(z)f_1(z)^j,\end{cases}\tag{2}$$

其中$p(z)$是次数为$k\geqslant2$的多项式,$\{a_i\}$,$\{b_j\}$都是不恒为零的亚纯函数.

本文的 2 个主要结果如下.

定理 1　设$f(z)$是复合函数方程(1)的一个超越亚纯解,$\{a_i\}$,$\{b_j\}$都是亚纯函数,d_l为不全为零的常数,a_m,b_n不恒等于零,$m,n\geqslant1$,满足

$$T(r,a_i)<KT(r^s,f),T(r,b_j)<KT(r^s,f),$$
$$i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n,$$

这里K,s均是正常数,r足够大.若$s<k$,则$\forall\varepsilon>0$,有

$$T(r,f)=O((\log r)^{\alpha+\varepsilon}),$$

其中

$\alpha=\log((\bar{d}+2)K/q+d/(qs))/\log(k/s)$,$1<s<k$;
$\alpha=\log((\bar{d}+2)Ks/q+d/q)/\log k$,$s<1<k$,
$d=\max\{m,n\}$,$\bar{d}=m+n$.

定理 2　设$(f_1(z),f_2(z))$是复合函数方程组(2)的一个超越亚纯解,$\{a_i\}$,$\{b_j\}$都是亚纯函数,$f_1(z)$,$f_2(z)$都具有无限个极点,满足

$n(r,a_i)<Kn(r^s,f_2)$,$n(r,b_j)<Kn(r^s,f_1)$,$i,j=0$,

收稿日期:2016-09-06

基金项目:国家自然科学基金(11271161)资助项目.

作者简介:高凌云(1963-),男,湖北蕲春人,教授,博士,主要从事复分析与复微分方程的研究.

$1,\cdots,m$,

这里K,s均是正常数,r足够大. 如果$s<k$,则$\forall\varepsilon>0$,有

$$n(r,f_i)=O((\log r)^{\beta}),i=1,2,$$

其中

$\beta=\log((K+m)/k)/\log(k/s_0)$,$s_0=\max\{s,1\}$.

1 引理

为证明定理需要用到以下几个引理.

引理 1[1] 设$R(z,w)=\sum\limits_{i=0}^{p}a_i(z)w^i\Big/\sum\limits_{j=0}^{q}b_j(z)w^j$是关于$w$的不可约的有理函数,其中系数$\{a_i(z)\}$和$\{b_j(z)\}$是亚纯函数. 如果$w(z)$是一个亚纯函数,则有$T(r,R(z,w))=\max\{p,q\}T(r,w)+O\{\sum T(r,a_i)+\sum T(r,b_j)\}$.

引理 2[5] 设$\psi:[r_0,\infty)\to(0,\infty)$在每个有限区间是正的和有界的,若

$$\psi(\mu r^m)\leqslant A\psi(r)+B,r\geqslant r_0,$$

其中$\mu>0,m>1,A>1,B$是一个实常数,则

$$\psi(r)=O((\log r)^{\alpha}),$$

这里$\alpha=\log A/\log m$.

引理 3[6] 设$f(z)$是一个超越亚纯函数,$p(z)$为次数大于0的多项式,即

$$p(z)=a_kz^k+a_{k-1}z^{k-1}+\cdots+a_1z+a_0,a_k\neq0,$$

$k\geqslant1$. 给定$0<\delta<|a_k|$,令

$$\begin{cases}\lambda=|a_k|+\delta,\\ \mu=|a_k|-\delta,\end{cases}$$

则给定$\varepsilon>0$,对任何有限复数a及足够大的r,有

$$kn\left(\mu r^k,\frac{1}{f-a}\right)\leqslant n\left(r,\frac{1}{f(p)-a}\right)\leqslant kn\left(\lambda r^k,\frac{1}{f-a}\right),$$

$$(1-\varepsilon)T(\mu r^k,f)\leqslant T(r,f(p))\leqslant(1+\varepsilon)T(\lambda r^k,f).$$

2 定理的证明

定理 1 的证明 由方程(1)与引理1可得

$$qT(r,f(p(z)))=T\left(r,\frac{\sum\limits_{i=0}^{m}a_i(z)f(z)^i}{\sum\limits_{j=0}^{n}b_j(z)f(z)^j}\right)\leqslant$$

$$dT(r,f)+\sum_{i=0}^{m}T(r,a_i)+\sum_{j=0}^{n}T(r,b_j)+O(1)\leqslant$$

$$(d+\varepsilon)T(r,f)+(\bar d+2)KT(r^s,f),$$

即

$$T(r,f(p(z)))\leqslant\frac{d+\varepsilon}{q}T(r,f)+\frac{(\bar d+2)K}{q}T(r^s,f),\tag{3}$$

其中$d=\max\{m,n\}$,$\bar d=m+n$.

(i) 若$s\geqslant1$. 根据$T(r,f)$是关于$\log r$的增函数及凸函数,$T(r,f)/\log r$是关于r的增函数,则对任意给的正常数C及任意的$t\geqslant1$,有

$$\frac{T(Cr^t,f)}{T(r,f)}\geqslant\frac{\log C+t\log r}{\log r}>(1-\varepsilon)t.$$

所以,对足够大的r,有

$$T(r,f)<T(Cr^t,f)/[(1-\varepsilon)t].\tag{4}$$

在(4)式中取$t=s$及$C=1$,可得

$$T(r,f)<T(r^s,f)/[(1-\varepsilon)s].\tag{5}$$

结合(3)式和(5)式得到

$$T(r,f(p(z)))\leqslant((\bar d+2)K/q+d/(sq)+\varepsilon_1)T(r^s,f).$$

再依引理3,有

$$(1-\varepsilon)T(\mu r^k,f)\leqslant((\bar d+2)K/q+d/(sq)+\varepsilon_1)T(r^s,f)),$$

即

$$T(\mu r^{k/s},f)\leqslant((\bar d+2)K/q+d/(sq)+\varepsilon_2)T(r,f).$$

因为$s<k$,由引理2得到

$$T(r,f)=O((\log r)^{\alpha_1+\varepsilon}),$$

其中$\alpha_1=\log((\bar d+2)K/q+d/(qs))/\log(k/s)$.

(ii) 若$s<1$. 根据$T(r,f)/\log r$是关于r的增函数,则有

$$\frac{T(r,f)}{\log r}\geqslant\frac{T(r^s,f)}{\log r^s},$$

亦即

$$T(r,f)/T(r^s,f)\geqslant1/s.\tag{6}$$

结合(3)式和(6)式得到

$$T(r,f(p(z)))\leqslant((\bar d+2)Ks+d+\varepsilon)T(r,f)/q.$$

依引理3知

$$T(\mu r^k,f)\leqslant((\bar d+2)Ks+d+\varepsilon_3)T(r,f)/q.$$

故由引理2得到

$$T(r,f)=O((\log r)^{\alpha_2+\varepsilon}),$$

其中$\alpha_2=\log((\bar d+2)Ks/q+d/q)/\log k$.

定理1证毕.

定理 2 的证明 由方程组(2)可得

$$n(r,f_1(p))=n(r,\sum_{i=0}^{m}a_if_2(z)^i)\leqslant mn(r,f_2)+$$

$$\sum_{i=0}^{m}n(r,a_i)\leqslant mn(r,f_2)+Kn(r^s,f_2),\tag{7}$$

$$n(r,f_2(p))=n(r,\sum_{j=0}^{m}b_jf_1(z)^j)\leqslant mn(r,f_1)+$$

$$\sum_{j=0}^{m} n(r,b_j) \leqslant mn(r,f_1) + Kn(r^s,f_1), \tag{8}$$

这里 K 是一个正常数.

依引理 3 有

$$kn(\mu r^k,f_1) \leqslant n(r,f_1(p)), \tag{9}$$

$$kn(\mu r^k,f_2) \leqslant n(r,f_2(p)). \tag{10}$$

分别结合(7)式与(9)式，(8)式与(10)式，得到

$$kn(\mu r^k,f_1) \leqslant mn(r,f_2) + Kn(r^s,f_2),$$

$$kn(\mu r^k,f_2) \leqslant mn(r,f_1) + Kn(r^s,f_1).$$

进一步有

$$kn(\mu r^k,f_1) \leqslant (m+K)\,n(r^{s_0},f_2), \tag{11}$$

$$kn(\mu r^k,f_2) \leqslant (m+K)\,n(r^{s_0},f_1), \tag{12}$$

这里 $s_0 = \max\{s,1\}$.

情形(i) 若 $n(r,f_1) \leqslant n(r,f_2)$，则依 $n(r,f_1)$，$n(r,f_2)$ 是关于 r 的增函数，$k > s_0$，由(12)式及引理 2，得到

$$n(r,f_i) = O((\log r)^{\beta}), i = 1,2.$$

情形(ii) 若 $n(r,f_2) \leqslant n(r,f_1)$，同样依 $n(r,f_1)$，$n(r,f_2)$ 是关于 r 的增函数，$k > s_0$，由(11)式及引理 2，得到

$$n(r,f_i) = O((\log r)^{\beta}), i = 1,2,$$

其中 $\beta = \log((K+m)/k)/\log(k/s_0)$.

定理 2 证毕.

3 举例

下面给出 2 个例子，表明其 2 个定理中的条件是精确的.

例 1 设

$$a_i(z) = C_m^i \frac{e^{3p(z)}}{(1+e^z)^m},$$

$$b_j(z) = C_m^j \frac{2^j e^{p(z)}}{(1+2e^z)^m}, i,j = 0,1,\cdots,m,$$

其中多项式 $p(z) = c_k z^k + \cdots + c_0$，$k \geqslant 2$，$m$ 是 1 个正整数，则有

$$\sum_{i=0}^{m} a_i(z) f(z)^i = \frac{e^{3p(z)}}{(1+e^z)^m} \sum_{i=0}^{m} C_m^i f(z)^i = \frac{e^{3p(z)}}{(1+e^z)^m}(1+f(z))^m,$$

$$\sum_{j=0}^{m} b_j(z) f(z)^j = \frac{e^{p(z)}}{(1+2e^z)^m} \sum_{j=0}^{m} C_m^j 2^j f(z)^j = \frac{e^{p(z)}}{(1+2e^z)^m}(1+2f(z))^m.$$

可以验证 $f(z) = e^z$ 是如下复合函数方程

$$f(p(z))^2 = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i(z) f(z)^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j(z) f(z)^j} = \frac{\frac{e^{3p(z)}}{(1+e^z)^m}(1+f(z))^m}{\frac{e^{p(z)}}{(1+2e^z)^m}(1+2f(z))^m}$$

的一个超越亚纯解，且满足

$$T(r,f) = \frac{r}{\pi} + O(1).$$

而由于 $k \geqslant 2$，

$$T(r,a_i) = (3+o(1))\frac{|c_k|r^k}{\pi},$$

$$T(r,b_j) = (1+o(1))\frac{|c_k|r^k}{\pi}.$$

这表明当 $s = k$ 时，定理 1 不成立.

例 2 设

$$a_i(z) = C_m^i \frac{(1-e^{-z})^m}{e^{2p(z)}-1},$$

$$b_j(z) = C_m^j \frac{(1-e^{-2z})^m}{e^{p(z)}-1}, i,j = 0,1,\cdots,m,$$

其中多项式 $p(z) = c_k z^k + \cdots + c_0$，$k \geqslant 2$，$m$ 是 1 个正整数，则有

$$\sum_{i=0}^{m} a_i(z) f_2(z)^i = \frac{(1-e^{-z})^m}{e^{2p(z)}-1} \sum_{i=0}^{m} C_m^i f_2(z)^i,$$

$$\sum_{j=0}^{m} b_j(z) f_1(z)^j = \frac{(1-e^{-2z})^m}{e^{p(z)}-1} \sum_{j=0}^{m} C_m^j f_1(z)^j.$$

不难验证 $(f_1(z),f_2(z)) = \left(\frac{1}{e^{2z}-1},\frac{1}{e^z-1}\right)$ 是如下复合函数方程组

$$\begin{cases} f_1(p(z)) = \dfrac{(1-e^{-z})^m}{e^{2p(z)}-1}(1+f_2(z))^m \\ f_2(p(z)) = \dfrac{(1-e^{-2z})^m}{e^{p(z)}-1}(1+f_1(z))^m \end{cases}$$

的一个超越亚纯解，解中的 2 个分量 $f_1(z) = \frac{1}{e^{2z}-1}$，$f_2(z) = \frac{1}{e^z-1}$ 均有无限多个极点，且满足

$$n(r,f_1) = \frac{2r}{\pi} + O(1), n(r,f_2) = \frac{r}{\pi} + O(1).$$

而由于 $k \geqslant 2$，

$$n(r,a_i) = (2+o(1))\frac{|c_k|r^k}{\pi},$$

$$n(r,b_j) = (1+o(1))\frac{|c_k|r^k}{\pi}.$$

这表明当 $s = k$ 时，定理 2 不成立.

4 参考文献

[1] 仪洪勋. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京:科学出版社,1995.

[2] 何育赞,肖修治. 代数体函数与常微分方程[M]. 北京:科学出版社,1988.

[3] Goldstein R. On certain compositions of functions of a complex variable[J]. Aequations Math,1970,4(1/2):103-126.

[4] Goldstein R. On meromorphic solutions of a functional equations[J]. Aequations Math,1972,8(1):82-94.

[5] Goldstein R. On meromorphic solutions of certain functional equations[J]. Aequations Math,1978,18(1/2):112-157.

[6] Goldstein R. Some results on factorisation of meromorphic functions[J]. J London Math Soc,1971,4(2):357-364.

[7] Bergweiler W,Ishizaki K,Yanagihara N. Growth of meromorphic solutions of some functional equations I[J]. Aequations Math,2002,63(1/2):140-151.

[8] Bergweiler W,Ishizaki K,Yanagihara N. Meromorphic solutions of some functional equations[J]. Methods Appl Anal,1998,5(3):248-258.

[9] Heittokangas J,Laine I,Rieppo J,et al. Meromorphic solutions of some linear functional equations[J]. Aequations Math,2000,60(1):148-166.

[10] Chen Zongxuan,Shon K H. On zeros and fixed points of differences of meromorphic functions[J]. J Math Anal Appl,2008,344(1):373-383

[11] 甘会林. 整函数差分的零点和不动点[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2015,39(5):519-521.

[12] Silvennoinen H. Meromorphic solutions of some composite functional equations[J]. Helsinki,Ann Acad Sci Fenn,Mathematica Dissertations,2003(133):39.

[13] Gao Lingyun. On meromorphic solutions of a type of system of composite functional equations[J]. Acta Mathematica Scientia,2012,32B(2):800-806.

[14] Li Haichou,Gao Lingyun. Meromorphic solutions of system of functional equations[J]. J of Math,2012,32(4):593-597.

[15] 高凌云. 关于一类差分方程的亚纯解[J]. 数学年刊,2014,35A(2):193-202.

[16] 高凌云. 一类复差分方程组的亚纯解[J]. 数学学报,2016,59(3):363-368.

[17] 刘曼莉,高凌云. 一类复差分方程组的亚纯解[J]. 山东大学学报:理学版,2016,51(10):34-40.

The Transcendental Meromorphic Solutions of Composite Functional Equations

GAO Lingyun,LIU Manli

(Department of Mathematics,Jinan University,Guangzhou Guangdong 510632,China)

Abstract: Using the Nevanlinna theory of the value distribution of meromorphic functions,the problem of properties of transcendental solutions of (systems of) composite functional equations are investigated,and characteristic estimate and non-integrated counting estimate of solutions are obtained while restricting the number of the poles of the coefficients,a certain result of Silvennoinen concerning composite functional equations is extened to systems of composite functional equations. Examples show that our condition in Theorems are precise.

Key words: composite functional equations;transcendental meromorphic solutions;distribution theory

(责任编辑:王金莲)