第 40 卷 第 6 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 40 No. 6
2016 年 11 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Nov. 2016

文章编号:1000-5862(2016)06-0591-04

# Laplace-Stieltjes 变换所确定的解析函数的 $\lambda^*$ -对数型

陆万春

(萍乡学院工程与管理学院,江西 萍乡 337055)

摘要:通过引入 $\lambda^*$ -对数型的概念,研究了在右半平面收敛的 Laplace-Stieltjes 变换所确定的非正规对数增长的解析函数的增长性问题,并得到 $\lambda^*$ -对数型与最大模、最大项及最大项指标的关系,推广了 Dirichlet 级数的相关结果.

关键词:Laplace-Stieltjes 变换;下对数型;$\lambda^*$ -对数型;增长性

中图分类号:O 174.52 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.06.09

## 0 引言

考虑 Laplace-Stieltjes 变换

$$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-sx}\mathrm{d}\alpha(x)\ (s=\sigma+\mathrm{i}t,\sigma,t\in\mathbf{R}),\quad(1)$$

其中 $\alpha(x)$ 是关于 $x\geqslant 0$ 的实值或复值函数,而且它在任一闭区间 $[0,X](0<X<+\infty)$ 是有界变差的.

取序列$\{\lambda_n\}$:

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n\uparrow+\infty,\quad(2)$$

并且满足

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)<+\infty,\ \overline{\lim_{n\to+\infty}}n/\lambda_n=D<+\infty,\quad(3)$$

由文献[1-2]可知,当满足条件

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\log A_n^*/\lambda_n=0,\quad(4)$$

其中 $A_n^*=\sup\limits_{\lambda_n<x\leqslant\lambda_{n+1},t\in\mathbf{R}}\left|\int_{\lambda_n}^{x}e^{-ity}\mathrm{d}\alpha(y)\right|$,变换(1)定义了右半平面上 $\mathrm{Re}\,s>0$ 的解析函数.

对于变换(1)所确定的解析函数增长性,文献[2-11]对其做了较多研究.文献[3-4,8-9]利用对数级及准确级的概念研究了在右半平面上收敛的零级 Laplace-Stieltjes 变换的增长性,得到其系数与最大模及最大项之间的关系.文献[7]将文献[4]中有关对数精确型的结果推广到更加一般的情况.文献[5-6]利用广义级和型,对慢增长的 Laplace-Stieltjes 变换增长性做了研究,并且推广了文献[3-4]中的有关结果.文献[10-11]研究了无限级的情况,并得到较好的结果.但上述文献中,对非正规对数增长的 Laplace-Stieltjes 变换的增长性却少有考虑.本文将在上述结果的基础上,并利用文献[9,12-16]的思想着重考虑非正规对数增长的 Laplace-Stieltjes 变换的下对数型问题.通过研究发现,对于非正规对数增长的在右半平面上收敛的 Laplace-Stieltjes 变换的下对数型都为 0.这样,用下对数型来刻画这类变换的增长性就变得毫无意义了.下面将通过引入 $\lambda^*$ -对数型指标来改进这个缺点,并得到这个指标与对数级和对数型的关系.

记

$$M_u(\sigma,F)=\sup_{0<x<+\infty,t\in\mathbf{R}}\left|\int_0^x e^{-(\sigma+\mathrm{i}t)y}\mathrm{d}\alpha(y)\right|,$$

$$\mu(\sigma,F)=\max_{1\leqslant n\leqslant+\infty}A_n^*e^{-\lambda_n\sigma}=A_{N(\sigma)}^*e^{-\lambda_{N(\sigma)}\sigma}.$$

用 $\Delta$ 表示由满足条件(2)~(4)的 Laplace-Stieltjes 变换(1)所确定的在右平面上解析的函数 $F(s)$ 的全体,并且满足其级为 0 以及 $\forall\varepsilon>0$,

$$\mu(\sigma,F)/\sigma^{-\varepsilon}\to\infty\ (\sigma\to 0).$$

在文献[3-4]中,对于 $F(s)\in\Delta$,定义其对数级 $\rho^*$ 和下对数级 $\lambda^*$ $(1\leqslant\lambda^*,\rho^*\leqslant+\infty)$ 为

$$\rho^*=\overline{\lim_{\sigma\to0+}}\frac{\log^+\log^+M_u(\sigma,F)}{\log\log\dfrac{1}{\sigma}},$$

$$\lambda^*=\underline{\lim_{\sigma\to0+}}\frac{\log^+\log^+M_u(\sigma,F)}{\log\log\dfrac{1}{\sigma}},$$

并且有

$$\overline{\lim_{\sigma\to0+}}\frac{\log^+\log^+\mu(\sigma,F)}{\log\log\dfrac{1}{\sigma}}=\rho^*,$$

$$\underline{\lim_{\sigma\to0+}}\frac{\log^+\log^+\mu(\sigma,F)}{\log\log\dfrac{1}{\sigma}}=\lambda^*,\quad(5)$$

收稿日期:2016-07-25

基金项目:国家自然科学基金(11661065)和江西省教育厅科技课题(GJJ151267,GJJ151262,GJJ151264)资助项目.

作者简介:陆万春(1978-),男,江西信丰人,副教授,主要从事复分析研究.

$$\max\left\{1,\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\log^+\log^+A_n^*}{\log\log\lambda_n}\right\}=\rho^*.$$

如果 $\lambda^*=\rho^*<+\infty$,则称 $F(s)\in\Delta$ 为正规对数增长,如果 $\lambda^*<\rho^*$,则称为非正规对数增长.

对于具有对数级 $\rho^*(1<\rho^*<+\infty)$ 的 $F(s)\in\Delta$,定义其对数型 $T^*$ 和下对数型 $t^*$[4] 为

$$T^*=\overline{\lim_{\sigma\to0+}}\frac{\log M_u(\sigma,F)}{\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*}},t^*=\underline{\lim_{\sigma\to0+}}\frac{\log M_u(\sigma,F)}{\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*}},$$

并且有

$$\overline{\lim_{\sigma\to0+}}\frac{\log\mu(\sigma,F)}{\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*}}=T^*,\underline{\lim_{\sigma\to0+}}\frac{\log\mu(\sigma,F)}{\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*}}=t^*,$$

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\log^+A_n^*}{(\log\lambda_n)^{\rho^*}}=T^*.$$

# 1 主要结果

**定理1** 设 $F(s)\in\Delta$,且具有对数级 $\rho^*$ 和下对数级 $\lambda^*(1\leqslant\lambda^*<\rho^*<+\infty)$,则

$$\underline{\lim_{\sigma\to0+}}\frac{\log\mu(\sigma,F)}{\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*}}=0,\underline{\lim_{\sigma\to0+}}\frac{\lambda_{N(\sigma)}\sigma}{\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*-1}}=0.\tag{6}$$

(6)式表明,对于非正规对数增长的解析函数 $F(s)\in\Delta$,其下对数型 $t^*=0$,为此定义 $F(s)\in\Delta$ 的 $\lambda^*$-对数型如下:

$$t_{\lambda^*}=\underline{\lim_{\sigma\to0+}}\log M_u(\sigma,F)\Big/\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\lambda^*}.$$

对于任意一个给定的常数 $\gamma^*$,下面给出一个更一般的定理,这个定理对于满足 $1<\lambda^*\neq\rho^*$ 的函数 $F(s)\in\Delta$ 的 $\lambda^*$-对数型和对数型都是适用的.

**定理2** 设 $F(s)\in\Delta$ 以及任意数 $\gamma^*(1<\gamma^*<+\infty)$ 满足

$$t_{\gamma^*}=\underline{\lim_{\sigma\to0+}}\log M_u(\sigma,F)\Big/\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\gamma^*},$$

则有

$$\underline{\lim_{\sigma\to0+}}\log\mu(\sigma,F)\Big/\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\gamma^*}=t_{\gamma^*}.\tag{7}$$

进一步,若 $\varphi(n)=(\log A_n^*-\log A_{n+1}^*)/(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$ 是关于 $n(n>n_0)$ 的非减函数及 $\log\lambda_{n+1}\sim\log\lambda_n$,则

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\log^+A_n^*}{(\log\lambda_{n+1})^{\gamma^*}}=t_{\gamma^*}.\tag{8}$$

**定理3** 设 $F(s)\in\Delta$,具有对数级 $\rho^*$、下对数级 $\lambda^*(1<\lambda^*<\rho^*<+\infty)$、对数型 $T^*$ 以及 $\lambda^*$-对数型,则有

$$\rho^*T^*-Q\leqslant\overline{\lim_{\sigma\to0+}}T^{*\prime}(\sigma)\sigma\log\frac{1}{\sigma}\leqslant\rho^*T^*,\tag{9}$$

$$-\infty\leqslant\underline{\lim_{\sigma\to0+}}T_*'\sigma\log\frac{1}{\sigma}\leqslant\lambda^*t_{\lambda^*}-q,\tag{10}$$

其中

$$Q=\overline{\lim_{\sigma\to0+}}\frac{\lambda_{N(\sigma)}\sigma}{\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*-1}},q=\underline{\lim_{\sigma\to0+}}\frac{\lambda_{N(\sigma)}\sigma}{\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\lambda^*-1}},$$

$$T^*(\sigma)=\frac{\log\mu(\sigma,F)}{\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*}},T_*(\sigma)=\frac{\log\mu(\sigma,F)}{\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\lambda^*}}.$$

# 2 定理的证明

为了证明上述定理,需要以下2个引理.

**引理1**[2] 设变换(1)满足条件(2)~(4),则 $\forall\varepsilon>0$ 及 $\forall\sigma>0$,有

$$\frac{1}{3}\mu(\sigma,F)\leqslant M_u(\sigma,F)\leqslant K(\varepsilon)\mu((1-\varepsilon)\sigma,F)\frac{1}{\sigma},$$

其中 $K(\varepsilon)$ 是一个只与 $\varepsilon$ 有关的常数.

**引理2**[5] 设变换(1)满足(2)~(4),则 $\forall\sigma\in(0,\sigma_0)$,有

$$\log\mu(\sigma,F)=\log\mu(\sigma_0,F)-\int_{\sigma_0}^{\sigma}\lambda_{N(x)}\mathrm{d}x,$$

其中 $\sigma_0>0$.

**定理1的证明** 由于 $\lambda^*<\rho^*$,则由(5)式很容易得到(6)式的第1个等式.为了证明(6)式的第2个等式,设

$$\underline{\lim_{\sigma\to0+}}\frac{\lambda_{N(\sigma)}\sigma}{\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*-1}}=\delta(0\leqslant\delta\leqslant+\infty),$$

则 $\forall\varepsilon>0(\varepsilon<\delta)$ 以及 $0<\sigma\leqslant\sigma_0=\sigma_0(\varepsilon)$,有

$$\lambda_{N(\sigma)}>\frac{1}{\sigma}(\delta-\varepsilon)\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*-1}.$$

由引理2,则有

$$\log\mu(\sigma,F)>\log\mu(\sigma_0,F)+\frac{\delta-\varepsilon}{\rho^*}\left(\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*}+O(1)\right).$$

由上面不等式,易得 $t^*\geqslant\delta/\rho^*$,即

$$\delta\leqslant\rho^*t^*.$$

利用(6)式的第1个等式,即 $t^*=0$ 以及 $\delta\geqslant0$ 便可得 $\delta=0$.故定理1得证.

**定理2的证明** 由引理1易得(7)式.下面证明(8)式.

设 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\log^+A_n^*/(\log\lambda_{n+1})^{\gamma^*}=E$,则显然有 $0\leqslant E\leqslant+\infty$.

先假设 $0<E<+\infty$,则 $\forall\varepsilon>0(\varepsilon<E)$,

$\exists N > 0$,当 $n > N$ 时,有

$$\log A_n^* > (E-\varepsilon)(\log \lambda_{n+1})^{\gamma^*}. \tag{11}$$

对于 $n = 1,2,3,\cdots$,取 $\sigma_n = (E-\varepsilon)\gamma^*/\lambda_n$,则对于 $n > \max\{n_0, N\}$ 以及 $\sigma_{n+1} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_n$,由(11)式有

$$\log M_u(\sigma,F) > (E-\varepsilon)(\log \lambda_{n+1})^{\gamma^*} - \sigma_n\lambda_n > (E-\varepsilon)\left(\log \frac{(E-\varepsilon)\gamma^*}{\sigma_{n+1}}\right)^{\gamma^*} + O(1).$$

所以

$$t_{\gamma^*} \geqslant E = \varlimsup_{n\to+\infty} \log^+ A_n^* / (\log \lambda_{n+1})^{\gamma^*}. \tag{12}$$

另一方面,由于 $\varphi(n)$ 是关于 $n(n > n_0)$ 的非减函数,则有无穷多个 $n$ 使得 $\varphi(n) > \varphi(n-1)$,否则有 $\rho^* = 1$. 显然有 $\varphi(n) \uparrow 0(n\to\infty)$,故当 $\varphi(n) > -\sigma > \varphi(n-1)$ 时,有 $A_n^* e^{-\lambda_n\sigma}$ 即为最大项,即

$\mu(\sigma,F) = A_n^* e^{-\lambda_n\sigma}$(当 $\varphi(n) > -\sigma > \varphi(n-1)$ 时),由(7)式,$\forall \varepsilon > 0(\varepsilon < t_{\gamma^*})$,$\exists \sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon) > 0$,使得对于 $0 < \sigma < \sigma_1$,有

$$\log \mu(\sigma,F) \geqslant (t_{\gamma^*} - \varepsilon)\left(\log \frac{1}{\sigma}\right)^{\gamma^*}. \tag{13}$$

假设 $A_{n_1}^* e^{-\lambda_{n_1}\sigma}$ 和 $A_{n_2}^* e^{-\lambda_{n_2}\sigma}(n_1 > n_0, \varphi(n_1 - 1) > -\sigma_1)$ 是满足 $n_1 \leqslant n_2 - 1$ 的 2 个连续相邻的最大项,并设 $n_1 \leqslant n \leqslant n_2 - 1$,则有 $\varphi(n_1) = \varphi(n_1+1) = \cdots = \varphi(n) = \cdots = \varphi(n_2 - 1)$ 以及

$$A_n^* e^{-\lambda_n\sigma} = A_{n_2}^* e^{-\lambda_{n_2}\sigma}(\text{当 } \varphi(n) = -\sigma \text{ 时}).$$

故由(13)式,则有

$$\log^+ A_n^* > (t_{\gamma^*} - \varepsilon)\left(\log\left(-\frac{1}{\varphi(n)}\right)\right)^{\gamma^*} - \lambda_n\varphi(n).$$

考虑上式右边函数的最小值,则有

$$\log^+ A_n^* > (t_{\gamma^*} - \varepsilon)\left(\log \frac{\lambda_n}{(t_{\gamma^*} - \varepsilon)\gamma^*}\right)^{\gamma^*} + (t_{\gamma^*} - \varepsilon)\gamma^*,$$

所以

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \log^+ A_n^* / (\log \lambda_n)^{\gamma^*} \geqslant t_{\gamma^*}. \tag{14}$$

考虑(12)式和(14)式以及 $\log \lambda_{n+1} \sim \log \lambda_n$,则可得(8)式.

对于 $E = 0$ 和 $E = +\infty$ 的情况,由上面的证明可知(8)式也是成立的. 定理 2 证毕.

**定理 3 的证明**　由引理 2 的等式两边除以 $\left(\log \frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*}$,则对 $0 < \sigma < \sigma_0$,有

$$\frac{\log \mu(\sigma,F)}{\left(\log \frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*}} = \frac{\log \mu(\sigma_0,F) - \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{N(x)}\,dx}{\left(\log \frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*}},$$

上式两边对 $\sigma$ 求导,则

$$T^{*\prime}(\sigma)\sigma\log\frac{1}{\sigma} = \left(\log \mu(\sigma_0,F) - \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{N(x)}\,dx\right)\rho^* \Big/ \left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*} - \lambda_{N(\sigma)}\sigma \Big/ \left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{\rho^*-1}.$$

上式两边取极限并利用引理 1 和引理 2 可得(9)式.

利用上面方法,并将 $\rho^*$ 改成 $\lambda^*$,类似可得(10)式. 定理 3 证毕.

## 3　参考文献


[1] 余家荣. Laplace-Stieltjes 变换所定义的整函数之 Borel 线[J]. 数学学报,1963,13(3):471-484.

[2] Kong Yinying, Hong Yong. On the growth of Laplace-Stieltjes transforms and the singular direction of complex analysis [M]. Guangzhou: Press in Jinan University, 2010.

[3] 徐洪焱,易才凤,胡祎. Laplace-Stieltjes 变换所表示的解析函数的对数级与对数精确级[J]. 数学物理学报,2013,33A(2):366-376.

[4] 陆万春,易才凤,彭友花. 右半平面上解析的 Laplace-Stieltjes 变换对数级[J]. 数学杂志,2016,36(3):559-565.

[5] 孔荫莹,霍颖莹. 右半平面解析的 Laplace-Stieltjes 变换的广义级与型[J]. 数学学报,2016,50(1):91-98.

[6] Srivastava G S, Chhaya Singhal. On the generalized order and generalized type of Laplace-Stieltjes transformation convergent in the right half-plane [J]. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 2015, 11(1):469-477.

[7] Lu Wanchun. On the proximate type of analytic function represented by Laplace-Stieltjes transformation [J]. Journal of Mathematical Research with Applications, 2015, 35(1):97-102.

[8] 徐洪焱. 半平面收敛的 Laplace-Stieltjes 变换所定义函数的准确零-R-级[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2009,33(5):560-563.

[9] 王金莲,陆万春. 半平面上解析的 Laplace-Stieltjes 变换的对数精确级[J]. 东北师大学报: 自然科学版,2015,47(4):7-10.

[10] 陆万春,易才凤. Laplace-Stieltjes 变换所表示的解析函数的 $\beta$-级[J]. 数学物理学报,2014,34A(5):1236-1244.

[11] 孔荫莹. 半平面解析的无穷级 Laplace-Stieltjes 变换[J]. 数学学报,2012,55(1):141-148.

[12] 王金莲,陆万春. 全平面上收敛的零级 Laplace-Stieltjes 变换的增长性[J]. 兰州大学学报: 自然科学版,2013,49(1):108-110.

[13] 涂金,魏竞斯,徐洪焱. 单位圆内 $[p,q]$-$\varphi(r)$ 级解析函数与亚纯函数的级与型[J]. 江西师范大学学报: 自然

科学版,2015,39(2):207-214.

[14] Awasthi K N,DixitK K. On the logarithmic order of analytic functions represented by Dirichlet series [J]. Indian J Pure Appl Math,1979,10(2):171-182.

[15] 涂金,黄海霞,徐洪焱,等. 单位圆内亚纯函数与解析函数的级与型 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(6):406-411.

[16] Nautiyal A,Doherey R P. On the proximate order of an analytic function represented by Dirichlet series [J]. Indian J Pure Appl Math,1982,13(12):1427-1423.

## On the $\lambda^*$-Logarithmic Type of Analytic Functions Represented by Laplace-Stieltjes Transformation

LU Wanchun

(College of Engineering and Management,Pingxiang University,Pingxiang Jiangxi 337055,China)

**Abstract:** By using the concept of $\lambda^*$-logarithmic type,the analytic function of irregular logarithmic growth which defined by Laplace-Stieltjes transformation converging in right plane is studied. Some relationship on maximum modulus,maximum term,rank of maximum term and the $\lambda^*$-logarithmic type are obtained,which extend some results of Dirichlet series.

**Key words:** Laplace-Stieltjes transform; lower logarithmic type; $\lambda^*$-logarithmic type; growth

(责任编辑:王金莲)

(上接第 586 页)

[16] Pang Xuecheng. Bloch's principle and normal criterion [J]. Sci China Ser A,1989,32(7):782-791.

[17] Pang Xuecheng,Zalcman L. Normal families and shared values [J]. Bull London Math Soc,2000,32(2):325-331.

[18] Chang Jianming,Zalcman L. Meromorphic functions that share a set with their derivatives [J]. J Math Anal Appl,2007,89(6):561-569.

[19] Clunie J. The composition of entire and meromorphic functions [M]. Ohio:Ohio University Press,1970:75-92.

[20] Li Xiaomin,Wen Zhitao. Uniqueness theorems of meromorphic functions sharing three values [J]. Complex Var Elliptic Equ,2011,56(1/2/3/4):215-233.

[21] Mokhon'ko A Z. On the Nevanlinna characteristics of some meromorphic functions [J]. Theory of Functions,Functional Analysis and Their Applications,1971,14:83-87.

# 涉及复合亚纯函数和不动点的亚纯函数的正规族

李效敏[1],仪洪勋[2],张 学[1]

(1. 中国海洋大学数学科学学院,山东 青岛 266100;2. 山东大学数学学院,山东 济南 250199)

摘要:假设 $f$ 是一个超越整函数,$G$ 是定义在区域 $D\subset\mathbf{C}$ 上的全纯函数族. 如果对 $G$ 中每个元素 $g$,$f(g)-\alpha_1$ 在区域 $D$ 上的每个零点重数$\geqslant 2$,$f(g)-\alpha_2$ 和 $g-\alpha_2$ 在区域 $D$ 上 IM 分担 0,这里 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 是 2 个判别的有穷复数,则 $G$ 在区域 $D$ 上是正规的,该结果推广了 Bergweiler 2004 年的一个结果. 同时还证明了:假设 $R$ 是一个次数满足 $\deg R\geqslant 2$($\deg R\geqslant 3$,并且 $R$ 在在复平面上有 3 个判别的有限的不动点)的有理函数,$\mathscr{F}$是一个定义在区域 $D\subset\mathbf{C}$ 上的全纯函数(亚纯函数),并且对 $\mathscr{F}$中每个元素 $f$,$R\circ f(z)-z$ 和 $f(z)-z$ 在区域 $D$ 上 IM 分担 0,则 $\mathscr{F}$是区域 $D$ 上的正规族,该结果推广了方明亮与袁文俊 2000 年的一个结果,也推广了常建明、方明亮与 L. Zalcman 2005 年的一个结果,并举例说明本文结果从某种意义上来讲是最佳的.

关键词:亚纯函数;复合函数;不动点;分担值;正规定则

(责任编辑:王金莲)