文章编号:1000-5862(2016)06-0608-05

马氏调节风险模型下的破产前盈余分布

张 敏[1],张志民[2*]
(1. 眉山职业技术学院,四川 眉山 620000;2. 重庆大学数学与统计学院,重庆 401331)

摘要:对在马氏调节风险过程中破产前盈余和破产时赤字的联合分布进行研究. 该过程中的泊松索赔到达速率和索赔额分布随时间改变,并取决于 1 个潜在的马尔科夫跳过程的状态. 推广了 Dickson 公式,并证明了破产前盈余的分布函数和密度函数均能由破产概率表示出来.

关键词:马氏调节风险模型;破产时刻;破产前盈余;破产时赤字;Dickson 公式
中图分类号:O 211.6 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2016.06.13

0 引言

S. Asmussen[1] 提出了马氏调节风险模型,即在金融与精算文献中常见的马尔科夫体制转换模型. 在经典风险模型中,保险费率、索赔到达强度(速率)以及索赔分布被认为受一个外部环境过程 $\{J(t);t\geqslant 0\}$ 的影响,而马氏风险模型则是经典风险模型的推广. 正如文献[1]所指出的,$\{J(t);t\geqslant 0\}$ 可以是健康保险领域某些特定类型的流行病,或者是汽车保险行业里的天气类别;Zhu Jinxia 等[2]将 $J(t)$ 的状态视作经济环境或是政治体制的转换. 近年来,关于马氏调节风险模型的研究有很多,如文献[3-4]研究了一些破产函数的计算方法;文献[5]研究了马氏调节风险模型中的占据时间测度计算;文献[6]研究了阶段观测下的马氏调节风险模型中的分红问题.

假设 $\{J(t);t\geqslant 0\}$ 是一个具有有限状态空间 $E=\{1,2,\cdots,m\}$ 的、齐次的、不可约的、周期性的马尔科夫过程. 用 $\boldsymbol{\Lambda}=(\alpha_{i,j})_{i,j=1}^{m}$ 表示 $\{J(t);t\geqslant 0\}$ 的密度矩阵,其中 $\alpha_{i,i}=-\alpha_i,i\in E$. 令 $\vec{\pi}'=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m)$ 为 $\{J(t);t\geqslant 0\}$ 的平稳分布.

假设给定 $J(t)=i$,保费连续不断地以正恒定速率 c_i 到达,索赔到达强度是 $\lambda_i>0$,而索赔额服从分布函数 $P_i(x)=1-\overline{P}_i(x)$,其密度函数是 $p_i(x)$,均值为 $\mu_i(i\in E)$. 由于仅对无限时间范围下的事件感兴趣,不失一般性,假设 $c_i=1$. 进一步地,假设不同状态下的索赔相互独立,相同状态下的索赔独立同分布. 该模型可以从数学的意义上进行如下定义.

令 $\{U_1(t)\}_{t\geqslant 0},\{U_2(t)\}_{t\geqslant 0},\cdots,\{U_m(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为 m 个独立经典复合泊松风险过程,其具有单位保费率,索赔到达速率为 λ_i,索赔额分布为 P_i,初始盈余为 0. 盈余过程 $\{U(t);t\geqslant 0\}$ 可以表示为

$$U(t)=u+\sum_{i=1}^{m}\int_0^t I(J(s)=i)\,\mathrm{d}U_i(s),t\geqslant 0,\quad(1)$$

其中 $u\geqslant 0$ 为初始盈余. 同时假设模型(1)满足正安全负载条件,即 $\sum_{i=1}^{m}\pi_i(1-\lambda_i\mu_i)>0$.

为了符号的方便,令 $P_i(\cdot)=P(\cdot\mid J(0)=i)$. 定义 $T=\inf\{t\geqslant 0:U(t)<0\}$ 为破产时刻,并定义 $\Psi_{i,j}(u)=P_i(T<\infty,J(T)=j\mid U(0)=u)$,$i,j\in E$ 为假定初始状态是 i,由 j 状态的索赔导致破产情况下的破产概率. 因此,$\Psi_i(u)=\sum_{j=1}^{m}\Psi_{i,j}(u)(u\geqslant 0,i\in E)$ 是已知初始状态是 i 的破产概率. 相应地,$\Phi_i(u)=1-\Psi_i(u)$ 是在初始状态为 i 的条件下的生存概率.

文献[7-15]对此类模型进行了研究. A. C. Y. Ng 等[16]通过构造一个指数鞅的方法,得到了破产前瞬时盈余和破产时赤字联合分布的 Lundberg 类上界. 之后,A. C. Y. Ng 等[17]进一步给出了,当初始盈余为 0,或者索赔额服从 phase-type 分布时,破产前和破产后盈余联合分布的封闭形式解. Li Shuanming 等[18]根据初始状态以及破产时状态,研究了期望罚函数以及它们的分解式. 当初始盈余为 0,或者索赔额分布具有一个有理拉普拉斯变换时,可以得到期望罚函数及其简化形式的精确表达. 在文献[18]中,破产前最大盈余和破产时最大赤字的

收稿日期:2016-09-20
基金项目:国家自然科学基金(11471058,11101451)和重庆市自然科学基金(CSTC2014JCYJA00007)资助项目.
通信作者:张志民(1981-),男,河北石家庄人,副教授,博士,博士生导师,主要从事精算数学和风险模型的研究.

分布也同样进行了研究.

D. C. M. Dickson[19] 指出依据破产概率,在经典风险模型下,破产前盈余的分布函数和密度函数可以被精确表达出来. 本文的目的是从传统的风险模型到马氏调节风险模型对 Dickson 公式进行扩展,并说明在给定初始状态以及破产时状态的情况下,破产前瞬时盈余的分布函数和密度函数也能够由破产概率表达出来.

1　当初始盈余为 0 时的破产前与破产时盈余分布

定义

$F_{i,j}(u,x,y) = P_i(T<\infty, J(T)=j, U(T-)\leqslant x, |U(T)|\leqslant y \mid U(0)=u)$,

$f_{i,j}(u,x,y) = \partial^2 F_{i,j}(u,x)/(\partial x\partial y), u\geqslant 0$,

$i,j\in E$

分别为在由状态 j 的索赔而导致破产的情况下,给定初始状态为 i、初始盈余为 u 后的破产前盈余和破产时赤字的联合分布函数与联合密度函数. 那么

$$F_{i,j}(u,x) = F_{i,j}(u,x,\infty),$$
$$f_{i,j}(u,x) = \partial F_{i,j}(u,x)/\partial x$$

分别为在由状态 j 的索赔而导致破产的情况下,给定初始状态为 i、初始盈余为 u 后的破产前盈余的分布函数和密度函数. 显然有

$$f_{i,j}(u,x,y) = f_{i,j}(u,x)\frac{p_j(x+y)}{\overline{P}_j(x)}, i,j\in E, u,x,y\geqslant 0. \quad (2)$$

即

$$\boldsymbol{f}(u,x,y) = \boldsymbol{f}(u,x)\boldsymbol{p}_x(y), \quad (3)$$

其中 $\boldsymbol{f}(u,x,y) = (f_{i,j}(u,x,y))_{i,j=1}^m$,

$\boldsymbol{f}(u,x) = (f_{i,j}(u,x))_{i,j=1}^m$,

$\boldsymbol{p}_x(y) = \mathrm{diag}\left(p_1(x+y)/\overline{P}_1(x), \cdots, p_i(x+y)/\overline{P}_i(x), \cdots, p_m(x+y)/\overline{P}_m(x)\right)$.

定义

$G_{i,j}(u,y) = P_i(T<\infty, J(T)=j, |U(T)|\leqslant y \mid U(0)=u)$, $g_{i,j}(u,y) = \partial G_{i,j}(u,y)/\partial y, u\geqslant 0, i,j\in E$

分别为在由状态 j 的索赔而导致破产的情况下,给定初始状态为 i、初始盈余为 u 后的破产时赤字的分布函数和密度函数,那么

$$G_{i,j}(u,y) = F_{i,j}(u,\infty,y) = \int_0^y\int_0^\infty f_{i,j}(u,x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \quad (4)$$

上述关系表明,如果 $F_{i,j}(u,x)$ 和 $f_{i,j}(u,x)$ 已知,那么破产前盈余和破产时赤字的联合分布,以及破产时赤字的边缘分布可以通过(2) 式和(4) 式得出.

当初始盈余 $u=0$ 时,A. C. Y. Ng 等[17] 研究得出

$$f_{i,j}(0,x,y) = \frac{\pi_j}{\pi_i}\lambda_j p_j(x+y)\vec{e}_j{}'\mathrm{e}^{\widetilde{Q}x}\vec{e}_i, i,j\in E, \quad (5)$$

其中 $\vec{e}_i$ 是一个第 i 个元素为 1,其余元素为 0 的 $m\times 1$ 的列向量,$\widetilde{Q}$ 是如下矩阵方程的解

$$\widetilde{Q} = \prod{}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}'\prod - \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m) + \int_0^\infty \boldsymbol{S}(\mathrm{d}x)\,\mathrm{e}^{\widetilde{Q}x},$$

其中 $\prod = \mathrm{diag}(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m)$, $\boldsymbol{S}(\mathrm{d}x) = \mathrm{diag}(\lambda_1 P_1(\mathrm{d}x), \lambda_2 P_2(\mathrm{d}x), \cdots, \lambda_m P_m(\mathrm{d}x))$.

(5) 式可以用矩阵的形式表示为

$$\boldsymbol{f}(0,x,y) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{K}x}\boldsymbol{s}(x+y),$$

其中 $\boldsymbol{K} = \prod{}^{-1}\widetilde{Q}'\prod$, $\boldsymbol{s}(x) = \mathrm{diag}(\lambda_1 p_1(x), \lambda_2 p_2(x), \cdots, \lambda_m p_m(x))$. 由(3) 式可知

$$\boldsymbol{f}(0,x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{K}x}\overline{\boldsymbol{S}}(x), \quad (6)$$

其中 $\overline{\boldsymbol{S}}(x) = \mathrm{diag}(\lambda_1\overline{P}_1(x), \lambda_2\overline{P}_2(x), \cdots, \lambda_m\overline{P}_m(x))$.

2　正初始盈余情况下破产前盈余的分布函数

对于 $b>u\geqslant 0$,定义

$\xi_{i,j}(u;b) = P_i(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}U(t) < b, T<\infty,$

$J(T)=j \mid U(0)=u), i,j\in E$

为给定外部环境初始状态为 i、初始盈余为 u 的条件下,破产发生、破产前盈余水平不超过 b 且破产时外部环境状态为 j 的条件概率. 显然有 $\xi_{i,j}(u;b)=0$,当 $b\leqslant u$ 时,令 τ_b 为盈余 $U(t)$ 首次到达 $b(b\geqslant u)$ 的时刻,定义

$\chi_{i,j}(u;b) = P_i(\tau_b<T, J(\tau_b)=j \mid U(0)=u), i,j\in E$

为初始状态为 i、初始盈余为 u、在破产前到达水平 b 且到达 b 时外部环境的状态 j 的条件概率. 显然 $\chi_{i,j}(b;b) = I_{(i=j)}$,其中 $i,j\in E$.

通过考虑盈余过程是否会在破产前达到 $b(>u)$,有 $\Psi_{i,j}(u) = \xi_{i,j}(u;b) + \sum_{k=1}^m \chi_{i,k}(u;b)\Psi_{k,j}(b)$, $i,j\in E$,或者在矩阵表示下,有

$$\boldsymbol{\Psi}(u) = \boldsymbol{\xi}(u;b) + \boldsymbol{\chi}(u;b)\boldsymbol{\Psi}(b),$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}(u) = (\Psi_{i,j}(u))_{i,j=1}^m$, $\boldsymbol{\xi}(u,b) = (\xi_{i,j}(u;b))_{i,j=1}^m$,有 $\boldsymbol{\xi}(b;b) = \boldsymbol{0}$ 以及 $\boldsymbol{\chi}(u;b) = (\chi_{i,j}(u;b))_{i,j=1}^m$.

Li Shuanming 等[18] 指出

$$\boldsymbol{\chi}(u,b) = \boldsymbol{v}(u)[\boldsymbol{v}(b)]^{-1}, 0\leqslant u\leqslant b, \quad (7)$$

其中 $\boldsymbol{v}(u)$ 是一个 $m\times m$ 的矩阵,且有

$$\boldsymbol{v}(u) = \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(u) - \int_0^u \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(u-x)\Delta\mathrm{e}^{-\Delta x}\mathrm{d}x,$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(u) = [\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Psi}(u)][\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Psi}(0)]^{-1},$$

$$\Delta = \boldsymbol{\Lambda}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Psi}(0)]^{-1}.$$

于是有

$$\boldsymbol{\xi}(u,b) = \boldsymbol{\Psi}(u) - \boldsymbol{v}(u)[\boldsymbol{v}(b)]^{-1}\boldsymbol{\Psi}(b),$$

$$0 \leqslant u \leqslant b. \tag{8}$$

当 $0 \leqslant u \leqslant x$ 时,通过考虑破产前盈余是否到达 x 得到

$$F_{i,j}(u,x) = \xi_{i,j}(u,x) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{i,k}(u,x) F_{k,j}(x,x).$$

即

$$\boldsymbol{F}(u,x) = \boldsymbol{\xi}(u,x) + \boldsymbol{\chi}(u,x)\boldsymbol{F}(x,x),\ 0 \leqslant u \leqslant x, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{F}(u,x) = (F_{i,j}(u,x))_{i,j=1}^{m}$. 显然,如果已知 $\boldsymbol{F}(x,x)$,就能在 $0 \leqslant u \leqslant x$ 的情况下得到 $\boldsymbol{F}(u,x)$ 的表达式.

定理1 $\boldsymbol{F}(x,x) = [\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x) - \int_0^x \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x-y)\Delta e^{-\Delta y}dy] \cdot e^{\Delta x}[\boldsymbol{G}(0,x) - \boldsymbol{\Psi}(0)] + \boldsymbol{\Psi}(x)$.

证 令 $\boldsymbol{g}(y) = \boldsymbol{g}(0,y) = (g_{i,j}(0,y))_{i,j=1}^{m}$. 通过考虑盈余首次低于初始值 x 的时刻,有

$$F_{i,j}(x,x) = \sum_{k=1}^{m} \int_0^x g_{i,k}(0,y) F_{k,j}(x-y,x)\,dy,\ i,j \in E.$$

即

$$\boldsymbol{F}(x,x) = \int_0^x \boldsymbol{g}(y)\boldsymbol{F}(x-y,x)\,dx. \tag{10}$$

将(9)式代入(10)式,并求解 $\boldsymbol{F}(x,x)$ 得到

$$\boldsymbol{F}(x,x) = [\boldsymbol{I} - \int_0^x \boldsymbol{g}(y)\boldsymbol{\chi}(x-y,x)\,dy]^{-1} \cdot \int_0^x \boldsymbol{g}(y)\boldsymbol{\xi}(x-y,x)\,dy.$$

文献[8]指出

$$\int_0^x \boldsymbol{g}(y)\boldsymbol{\chi}(x-y,x)\,dy = \{\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x) - \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(0) - \int_0^x [\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x-y) - \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(0)]\Delta e^{-\Delta y}dy\}[\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x) - \int_0^x \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x-y)\Delta e^{-\Delta y}dy]^{-1} = \boldsymbol{I} - e^{-\Delta x}[\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x) - \int_0^x \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x-y)\Delta e^{-\Delta y}dy]^{-1},$$

则 $[\boldsymbol{I} - \int_0^x \boldsymbol{g}(y)\boldsymbol{\chi}(x-y,x)\,dy]^{-1} = [\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x) - \int_0^x \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x-y)\Delta e^{-\Delta y}dy]e^{\Delta x}$. 为进一步计算,注意到

$$\Psi_{i,j}(u+x) = \sum_{k=1}^{m} \int_0^x g_{i,k}(u,y)\Psi_{k,j}(x-y)\,dy + \int_0^{\infty} g_{i,j}(u,y)\,dy,$$

即

$$\boldsymbol{\Psi}(u+x) = \int_0^x \boldsymbol{g}(u,y)\boldsymbol{\Psi}(x-y)\,dy + \int_0^{\infty} \boldsymbol{g}(u,y)\,dy,$$

由(8)式知,

$$\int_0^x \boldsymbol{g}(y)\boldsymbol{\xi}(x-y,x)\,dy = \int_0^x \boldsymbol{g}(y)\boldsymbol{\Psi}(x-y)\,dy - [\int_0^x \boldsymbol{g}(y)\boldsymbol{\chi}(x-y,x)\,dy]\boldsymbol{\Psi}(x) = \boldsymbol{\Psi}(x) - \boldsymbol{\Psi}(0) + \boldsymbol{G}(0,x) - \{\boldsymbol{I} - e^{-\Delta x} \cdot [\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x) - \int_0^x \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x-y)\Delta e^{-\Delta y}dy]^{-1}\}\boldsymbol{\Psi}(x).$$

于是得到 $\boldsymbol{F}(x,x) = [\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x) - \int_0^x \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(u-y)\Delta e^{-\Delta y}dy] \cdot e^{\Delta x}[\boldsymbol{G}(0,x) - \boldsymbol{\Psi}(0)] + \boldsymbol{\Psi}(x)$. 定理1证毕.

定理2 当 $0 \leqslant u \leqslant x$ 时,有

$$\boldsymbol{F}(u,x) = \boldsymbol{\Psi}(u) + [\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x) - \int_0^u \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(u-y) \cdot \Delta e^{-\Delta y}dy]e^{\Delta x}[\boldsymbol{G}(0,x) - \boldsymbol{\Psi}(0)]. \tag{11}$$

证 将(8)式代入(9)式中,有

$$\boldsymbol{F}(u,x) = \boldsymbol{\xi}(u,x) + \boldsymbol{\chi}(u,x)\boldsymbol{F}(x,x) = \boldsymbol{\Psi}(u) - \boldsymbol{\chi}(u,x)\boldsymbol{\Psi}(x) + \boldsymbol{\chi}(u,x)\boldsymbol{F}(x,x) = \boldsymbol{\Psi}(u) - \boldsymbol{\chi}(u,x)[\boldsymbol{\Psi}(x) - \boldsymbol{F}(x,x)]. \tag{12}$$

将(10)式代入(12)式,并由(7)式可得(11)式. 定理2证毕.

定理3 当 $u \geqslant x$ 时,

$$\boldsymbol{F}(u,x) = \boldsymbol{\Psi}(u) - \boldsymbol{\Psi}(u-x) + \boldsymbol{G}(u-x,x) - \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(u-x)[\boldsymbol{G}(0,x) - \boldsymbol{\Psi}(0)] + [\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(u) - \int_0^x \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(u-t)\Delta e^{-\Delta t}dt]e^{\Delta x}[\boldsymbol{G}(0,x) - \boldsymbol{\Psi}(0)]. \tag{13}$$

证 如果破产在初始盈余 $u > x$ 的情况下发生,并且破产前盈余低于 x,那么在破产前的某些时刻,盈余一定不能超过 x,否则破产将不会发生. 通过考虑盈余降到低于 x,有

$$F_{i,j}(u,x) \sum_{k=1}^{m} \int_0^x g_{i,k}(u-x,y) F_{k,j}(x-y,x)\,dy.$$

即

$$\boldsymbol{F}(u,x) = \int_0^x \boldsymbol{g}(u-x,y)\boldsymbol{F}(x-y,x)\,dy. \tag{14}$$

记 $\Psi_{i,j}(u) = \sum_{k=1}^{m} \int_0^x g_{i,k}(u-x,y)\Psi_{k,j}(x-y)\,dy + \int_x^{\infty} g_{i,j}(u-x,y)\,dy$,或者在矩阵形式下,

$$\boldsymbol{\Psi}(u) = \int_0^x \boldsymbol{g}(u-x,y)\boldsymbol{\Psi}(x-y)\,dy + \int_x^{\infty} \boldsymbol{g}(u-x,y)\,dy,$$

这意味着

$$\int_0^x \boldsymbol{g}(u-x,y)\boldsymbol{\Psi}(x-y)\,dy = \boldsymbol{\Psi}(u) - \boldsymbol{\Psi}(u-x) + \boldsymbol{G}(u-x,x),\ \int_0^x \boldsymbol{g}(u-x,y)[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Psi}(x-y)]\,dy = \boldsymbol{\Psi}(u-x) - \boldsymbol{\Psi}(u),\ \int_0^x \boldsymbol{g}(u-x,y)\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x-y)\,dy = \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(u) - \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(u-x),$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(u) = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Psi}(u)][\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Psi}(0)]^{-1}$.

同理,有

$$\int_0^x \boldsymbol{g}(u-x,y)(\int_0^{x-y} \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x-y-t)\Delta e^{-\Delta t}dt)\,dy = \int_0^x (\int_0^{x-1} \boldsymbol{g}(u-x,y)\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x-t-y)\,dy)\Delta e^{-\Delta t}dt = \int_0^x [\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(u-t) - \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(u-x)]\Delta e^{-\Delta t}dt.$$

将(12)式代入(14)式,运用相同的方法得到

$$F(u,x)=\Psi(u)-\Psi(u-x)+G(u-x,x)+[\tilde{\Psi}(u)-\tilde{\Psi}(u-x)]e^{\Delta x}[G(0,x)-\Psi(0)]-[\int_0^x[\tilde{\Psi}(u-t)-\tilde{\Psi}(u-x)]\Delta e^{-\Delta t}dt]e^{\Delta x}[G(0,x)-\Psi(0)].$$

定理 3 得证.

3　破产前盈余的密度函数

本部分对上一节给出的分布函数进行求导,由此得到破产前盈余的密度函数.

定理4 $f(u,x)=[\tilde{\Psi}(u)-\int_0^u\tilde{\Psi}(u-y)\Delta e^{-\Delta y}dy]f(0,x)$, $0\leqslant u<x$,其中 $f(0,x)$ 由(6)式给出.

证　对(12)式进行微分即证.

现在考虑 $u\geqslant x$ 的情况. 首先,由于 $A(x)$ 和 $B(x)$ 2 个矩阵函数定义于区间 $[0,\infty)$,定义矩阵卷积公式 $C(x)=A*B(x)=(c_{i,j}(x))_{i,j=1}^m$,其中

$$c_{i,j}(x)=\sum_{k=1}^m\int_0^x a_{i,k}(y)b_{k,j}(y-x)dy=\sum_{k=1}^m a_{i,k}*b_{k,j}(x).$$

注意到,盈余过程的第 n 个记录低点在 $u-x$ 和 $u-x+dx$ 之间发生的概率为 $g^{*n}(x)$,其中 $g^{*n}(x)$ 为 $g(x)$ 的 n 重卷积矩阵. 那么,由全概率公式有

$$G(u,x)=\int_0^u\sum_{n=0}^\infty g^{*n}(y)\int_{u-y}^{u-y+x}g(z)dzdy=G(0,u+x)-G(0,u)+\int_0^u\sum_{n=1}^\infty g^{*n}(y)\int_{u-y}^{u-y+x}g(z)dzdy.\quad(15)$$

进一步地,令 $x=\infty$,有

$$\Psi(u)=\Psi(0)-G(0,u)+\int_0^u\sum_{n=1}^\infty g^{*n}(y)\int_{u-y}^\infty g(z)dzdy,\quad(16)$$

定理 5　当 $u\geqslant x$ 时,$f(u,x)=[\tilde{\Psi}(u)-\tilde{\Psi}(u-x)\Delta e^{-\Delta x}-\int_0^x\tilde{\Psi}(u-t)\Delta e^{-\Delta t}dt]f(0,x)$.

证　对(13)式关于 x 进行求导,可得

$$f(u,x)=-\frac{d\Psi(u-x)}{dx}+\frac{dG(u-x,x)}{dx}+\frac{d\Psi(u-x)}{dx}[I-\Psi(0)]^{-1}[G(0,x)-\Psi(0)]-\tilde{\Psi}(u-x)G(0,x)-\tilde{\Psi}(u-x)\Delta[G(0,x)-\Psi(0)]+[\tilde{\Psi}(u)-\int_0^x\tilde{\Psi}(u-x)\Delta e^{-\Delta t}dt]e^{\Delta x}[\Delta[G(0,x)-\Psi(0)]+G(0,x)].$$

经整理有

$$f(u,x)=\frac{dG(u-x,x)}{dx}-\frac{d\Psi(u-x)}{dx}[I-\Psi(0)]^{-1}\cdot[I-G(0,x)]+[\tilde{\Psi}(u)-\tilde{\Psi}(u-x)e^{-\Delta x}-\int_0^x\tilde{\Psi}(u-t)\Delta e^{-\Delta t}dt]f(0,x).$$

因此,为了得到结论,需证

$$\frac{dG(u-x,x)}{dx}=\frac{d\Psi(u-x)}{dx}[I-\Psi(0)]^{-1}\cdot[I-G(0,x)].\quad(17)$$

因为 $u>x$,所以用 $u-x$ 替换(15)式中的 u 得

$$G(u-x,x)=G(0,u)-G(0,u-x)+\int_0^{u-x}\sum_{n=1}^\infty g^{*n}(y)\int_{u-x-y}^{u-y}g(z)dzdy.$$

两边同时对 x 进行求导

$$\frac{dG(u-x,x)}{dx}=g(u-x)-\sum_{n=1}^\infty g^{*n}(u-x)G(0,x)+\int_0^{u-x}\sum_{n=1}^\infty g^{*n}(y)g(u-x-y)dy=g(u-x)-\sum_{n=1}^\infty g^{*n}(u-x)G(0,x)+\sum_{n=1}^\infty g^{*(n+1)}(u-x)=\sum_{n=1}^\infty g^{*n}(u-x)[I-G(0,x)].\quad(18)$$

同理,由(16)式得到

$$\Psi(u-x)=\Psi(0)-G(0,u-x)+\int_0^{u-x}\sum_{n=1}^\infty g^{*n}(y)\int_{u-x-y}^\infty g(z)dzdy.$$

对 x 再次进行微分,有

$$d\Psi(u-x)/dx=\sum_{n=1}^\infty g^{*n}(u-x)[I-\Psi(0)].$$

结合(17)和(18),定理 5 证毕.

4　结论

本文指出,与经典风险模型[19]一样,当马氏调节风险模型下的初始盈余为正时,破产前盈余的密度函数也可以被破产概率和初始盈余为 0 时的破产前盈余的密度函数精确表示出来. 文献[19]给出了经典的复合泊松风险模型下,破产前瞬时盈余水平的密度函数和破产概率的关系,而本文的主要贡献是将该文献中的结果推广到了马氏调节风险模型下. 显然,本文所考虑的模型更具有一般性,所得结论在特殊情况下可以退化为文献[19]中的结论.

5　参考文献

[1] Asmussen S. Risk theory in a Markovian environment [J]. Scandinavian Actuarial Journal, 1989(2): 69-100.

[2] Zhu Jinxia Yang Hailiang. Ruin theory for a Markov regime-switching model under a threshold dividend strategy [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42(1): 311-318.

[3] Li Jingchao,D C M,Li Shuanming. Some ruin problems for the MAP risk model [J]. Insurance: Mathematics and Econmics,2015,65: 1-8.

[4] Li Jingchao,Dickson D C M,Li Shuanming. Analysis of some ruin-related guantities in a Markov-modulated risk model [J]. Stochastic Models,2016,32(3):351-365.

[5] Landriault D,Shi Tianxiang. Occupation times in the MAP risk model [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2015,60: 75-82.

[6] Zhang Zhimin,Cheung E C K. The Markov additive risk process under an erlangized dividend barrier strategy [J]. Methodology and Computing in Applied Probability,2016, 18(2):275-306.

[7] Reinhard J M. On a class of semi-Markov risk models obtained as classical risk models in a Markovian environment [J]. Astin Bulletin,1984,14(1):23-43.

[8] Asmussen S,Frey A,Rolski T,et al. Does Markovmodulation increase the risk? [J]. Astin Bulletin,1995,25(1): 49-66.

[9] Bauerle N. Some results about the expected ruin time in Markov modulated risk models [J]. Insurance: Mathematics and Economics,1996,18(2):119-127.

[10] Schmidli H. Estimation of the Lundberg coefficient for a Markov modulated risk model [J]. Scandinavian Actuarial Journal,1997(1):48-57.

[11] Wu Yanhong. Bounds for the ruin probability under a Markovian modulated risk model [J]. Communications in Statistics. Stochastic Models,1999,15(1):125-136.

[12] Snoussi M. The severity of ruin in Markov-modulated risk models [J]. Bulletin of the Swiss Association of Actuaries,2002(1):31-43.

[13] Lu Yi,Li Shuanming. On the probability of ruin in a Markov-modulated risk model [J]. Insurance: Mathematics and Economics,2005,37(3):522-532.

[14] Lu Yi. On the severity of ruin in a Markov-modulated risk model [J]. Scandinavian Actuarial Journal,2006(4): 183-202.

[15] Li Shuanming,Lu Yi. Moments of the dividend payments and related problems in a Markov-modulated risk model [J]. North American Actuarial Journal,2007,11(2):65-76.

[16] Ng A C Y,Yang Hailiang. Lundeberg-type bounds for the joint distribution of surplus immediately before and at ruin under a Markov-modulated risk model [J]. Astin Bulletin,2005,35(2):351-361.

[17] Ng A C Y,Yang Hailiang. On the joint distribution of surplus before and after ruin under a Markovian regime switching model [J]. Stochastic Processes and their Applications,2006,116(2):244-266.

[18] Li Shuanming,Lu Yi. The decompositions of the discounted penalty functions and dividend-penalty identity in a Markov-modulated risk model [J]. Astin Bulletin,2008, 38(1):53-71.

[19] Dickson D C M. On the distribution of the surplus prior to ruin [J]. Insurance: Mathematics and Economics,1992, 11(3):191-207.

On the Distribution of the Surplus Before Ruin in a Markov-Modulated Risk Model

ZHANG Min[1],ZHANG Zhimin[2]

(1. Meishan Vocational and Technical College,Meishan Sichuan 620000;

2. College of Mathematics and Statistics,Chongqing University,Chongqing 401331)

Abstract: The joint distribution of the surplus before ruin and the deficit at ruin in a Markov-modulated risk process in which the rate for the Poisson claim arrivals and the distribution of the claim sizes vary in time depending on the state of an underlying (external) Markov jump process is studied. The Dickson´s formula from the classical risk model to the Markov-modulated risk model is extended and it is shown that both of the distribution function and density function of the surplus before ruin can be expressed in terms of the ruin probabilities.

Key words: Markov-modulated risk model; time of ruin; surplus before ruin; deficit at ruin; dickson´s formula

(责任编辑:曾剑锋)