第 41 卷 第 1 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 41 No. 1
2017 年 1 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　Jan. 2017

文章编号:1000-5862(2017)01-0039-03

一类 π-反周期函数的双周期插值问题

文晓霞[1],李风军[2]

(1. 宁夏大学物理与电子电气工程学院,宁夏 银川　750021;2. 宁夏大学数学统计学院,宁夏 银川　750021)

摘要:讨论了一类反周期函数在等距结点组上的双周期插值问题,结合函数所要满足的插值条件与该类反周期函数所满足的基础分解定理,再利用插值基函数的性质,给出插值问题解存在的充分必要条件,并得到相应条件下解的显式.

关键词:反周期函数;双周期;$(0,\delta^m)$ 插值;高阶差分

中图分类号:O 174　　文献标志码:A　　DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.01.07

0　引言

令 τ_n 为最高次数不超过 n 的三角多项式空间:
$\tau_0=\mathrm{span}\{1\}$,$\tau_k=\tau_{k-1}+\mathrm{span}\{\cos(kx),\sin(kx)\}$.
ω_n 为 n 阶 π-周期多项式子空间:

$$\omega_n=\{T\in\tau_n\,|\,T(x+\pi)=T(x)\},$$

$\omega_n^{\perp}$ 为 n 阶 π-反周期多项式子空间:

$$\omega_n^{\perp}=\{T\in\tau_n\,|\,T(x+\pi)=-T(x)\}.$$

已有结果:
$\omega_0=\tau_0$,$\omega_{2k+1}=\omega_{2k}$,$\omega_{2k+2}=\omega_{2k+1}+\mathrm{span}\{\cos 2(k+1)x,\sin 2(k+1)x\}$,$\omega_0^{\perp}=\{0\}$,$\omega_{2k+2}^{\perp}=\omega_{2k+1}^{\perp}$,$\omega_{2k+1}^{\perp}=\omega_{2k}^{\perp}+\mathrm{span}\{\cos(2k+1)x,\sin(2k+1)x\}$.

显然,$\tau_n=\omega_n\oplus\omega_n^{\perp}$. 若 n 为偶数,则$\{L_n(x-x_k)\,|\,0\leqslant k\leqslant n-1\}$ 是 $\omega_{n-1}^{\perp}$ 的 1 组基,其中

$$L_n(x)=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n/2}\cos(2k-1)x;$$

若 n 为奇数,则$\{L_n(x-x_k)\,|\,0\leqslant k\leqslant n-1\}$ 是 ω_{n-1} 的 1 组基,其中

$$L_n(x)=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\cos(2kx).$$

令 $0<h<\pi/(2n)$,$m\in\mathbf{N}$,函数的差分与高阶差分可以定义为

$$\delta f(x)=\delta^1 f(x)=f(x+h)-f(x-h),$$

$$\delta^m f(x)=\delta(\delta^{m-1}f(x))=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f(x+(m-2k)h)\ (m\geqslant 2).$$

算子 $A_n^{\delta^m}:\tau_{n-1}\to\tau_{n-1}$,$B_n^{\delta^m}:\tau_{n-1}\to\tau_{n-1}$ 满足

$$A_n^{\delta^m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}=a_n^{\delta^m}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},B_n^{\delta^m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}=b_n^{\delta^m}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

其中
$a_n^{\delta^m}(k)=(2\mathrm{i})^m(\sin^m(k+n)h+\sin^m(k-n)h)/2$,
$b_n^{\delta^m}(k)=(2\mathrm{i})^m(\sin^m(k+n)h-\sin^m(k-n)h)/(2\mathrm{i})$,
$k=0,1,\cdots,n-1$.

插值问题是函数逼近论领域的一个主要分支,由于它在误差估计、拟合精度估计、有效数据分析等实际问题中具有广泛应用价值,近年来函数的插值问题备受学者关注. 三角函数的插值问题在其中占据了一个重要位置,文献[1-15]从不同周期、度量尺度讨论了三角函数插值问题,其中文献[4]得出的 π-反周期函数的插值结论在插值问题的方法及形式上给出了全新的结果;文献[5]利用差分代替导数,讨论了 π-反周期函数的双周期$(0,\delta^m)$插值问题的求解,降低了插值问题对函数可微性的要求,扩大了插值结论的应用范畴;文献[6]考虑了反周期函数在双结点组上的$(0;m_1,m_2,m_3)$插值;文献[7-9]是在$(0,m)$插值条件中关于函数导数的推广结论;文献[10-15]给出了特定的插值多项式在不同空间与度量下的逼近结论. 以上研究内容都是在三角函数插值中重要方法和结论的体现,也是近年来三角插值研究结果的主要方向.

在文献[5]的启发下,本文考虑反周期函数在结点组的位置改变的情况下,插值问题是否有解、有解的条件又是否会发生变化、解的形式有何不同等问题. 即考虑对于给定的函数 $f(x)$ 及结点组:

收稿日期:2016-12-23
基金项目:国家自然科学基金(11261042,61662060)资助项目.
作者简介:文晓霞(1979-),女,宁夏同心人,副教授,主要从事函数逼近论的研究. E-mail:wen_xx@nxu.edu.cn

$$x_k=\frac{k\pi}{n},y_k=x_k+\frac{\pi}{2n},0\leqslant k\leqslant n-1,k\in\mathbf{Z}$$

在何种条件下存在唯一的反周期三角多项式 $T(x)$ **满足**

$T(y_k)=f(y_k),\delta^m T(x_k)/(2h)^m=\delta^m f(x_k)/(2h)^m$.

1 主要结论

定理 1 存在唯一的 $G(x),H(x)\in\omega_{2n-1}^{\perp}$ 具有 $G(x)=\sin(nx)U_G(x)+\cos(nx)V_G(x),H(x)=\sin(nx)U_H(x)+\cos(nx)V_H(x)$,其中

$U_G(x)=L_n(x-y_0)$,

$V_G(x)=-(A_n^{\delta m})^{-1}B_n^{\delta m}L_n(x-y_0)$,

$U_H(x)=0,V_H(x)=(2h)^m(A_n^{\delta m})^{-1}L_n(x)$,

且满足

$G(y_k)=\delta_{0k},(\delta^m G)(x_k)/(2h)^m=0$,

$H(y_k)=0,(\delta^m H)(x_k)/(2h)^m=\delta_{0k},0\leqslant k\leqslant n-1$

当且仅当 mn 为偶数.

定理 2 若 f 为 π-反周期函数,则存在唯一的 $Q_n^{\delta m}f\in\omega_{2n-1}^{\perp}$ 具有

$$(Q_n^{\delta m}f)(x)=\sum_{k=0}^{n-1}f(y_k)G(x-x_k)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^m f(x_k)}{(2h)^m}\cdot H(x-x_k),$$

且满足

$(Q_n^{\delta m}f)(y_k)=f(y_k)$,

$(\delta^m(Q_n^{\delta m}f))(x_k)/(2h)^m=\delta^m f(x_k)/(2h)^m$

当且仅当 mn 为偶数.

2 相关引理

引理 1[4] 若 n 为偶数,$\forall T(x)\in\omega_{2n-1}^{\perp}$,则存在唯一的 $U_T,V_T\in\omega_{n-1}^{\perp}$,且 $T(x)=\sin(nx)U_T(x)+\cos(nx)V_T(x)$,其中

$$U_T(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k T(y_k)L_n(x-y_k),$$

$$V_T(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k T(x_k)L_n(x-x_k).$$

若 n 为奇数,则存在唯一的 $U_T,V_T\in\omega_{n-1}$,上述结论仍然成立.

引理 2[5] $\forall T(x)\in\omega_{2n-1}^{\perp}$,若 $T(x)=\sin(nx)\cdot U(x)+\cos(nx)V(x)$,则

$\delta^m T(x)=\sin(nx)(A_n^{\delta m}U(x)-B_n^{\delta m}V(x))+\cos(nx)(B_n^{\delta m}U(x)+A_n^{\delta m}V(x))$.

引理 3[5] 若 n 为偶数,则 $A_n^{\delta m}$ 和 $B_n^{\delta m}$ 为 $\omega_{n-1}^{\perp}$ 中的可逆算子;若 n 为奇数,则

(i) 当 m 为奇数时,$B_n^{\delta m}$ 是 ω_{n-1} 中的可逆算子;

(ii) 当 m 为偶数时,$A_n^{\delta m}$ 是 ω_{n-1} 中的可逆算子.

3 定理的证明

定理 1 的证明(充分性) 先证满足插值条件的基函数的存在性. 若 mn 为偶数,由引理 1 知,

$G(x)=\sin(nx)U_G(x)+\cos(nx)V_G(x)$,

$H(x)=\sin(nx)U_H(x)+\cos(nx)V_H(x)$.

由插值条件 $G(y_k)=\delta_{0k},H(y_k)=0$ 有

$$U_G(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k G(y_k)L_n(x-y_k)=L_n(x-y_0),$$

$$U_H(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k H(y_k)L_n(x-y_k)=0.$$

再由引理 2 得

$(\delta^m G)(x)=\sin(nx)(A_n^{\delta m}U_G(x)-B_n^{\delta m}V_G(x))+\cos(nx)(B_n^{\delta m}U_G(x)+A_n^{\delta m}V_G(x))$,

$(\delta^m H)(x)=\sin(nx)(A_n^{\delta m}U_H(x)-B_n^{\delta m}V_H(x))+\cos(nx)(B_n^{\delta m}U_H(x)+A_n^{\delta m}V_H(x))$.

所以

$(\delta^m G)(x)=\sin(nx)(A_n^{\delta m}L_n(x-y_0)-B_n^{\delta m}V_G(x))+\cos(nx)(B_n^{\delta m}L_n(x-y_0)+A_n^{\delta m}V_G(x)),(\delta^m H)(x)=\sin(nx)(-B_n^{\delta m}V_H(x))+\cos(nx)(A_n^{\delta m}V_H(x))$.

由插值条件$(\delta^m G)(x_k)/(2h)^m=0$ 可得

$B_n^{\delta m}L_n(x_k-y_0)+A_n^{\delta m}V_G(x_k)=0,k=0,1,\cdots,n-1$.

而 $B_n^{\delta m}L_n(x-y_0)+A_n^{\delta m}V_G(x)$ 是 $n-1$ 阶三角多项式,所以

$$B_n^{\delta m}L_n(x-y_0)+A_n^{\delta m}V_G(x)=0.$$

又由文献[1]中三角函数分解的唯一性及插值条件$(\delta^m H)(x_k)/(2h)^m=\delta_{0k}$ 可得

$$A_n^{\delta m}V_H(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(\delta^m H)(x_k)}{(2h)^m}\cdot(2h)^m L_n(x-x_k)=(2h)^m L_n(x),$$

由引理 3 知,当 mn 为偶数时,算子 $A_n^{\delta m}$ 在相应空间中可逆,所以

$V_G(x)=-(A_n^{\delta m})^{-1}B_n^{\delta m}L_n(x-y_0)$,

$V_H(x)=(2h)^m(A_n^{\delta m})^{-1}L_n(x)$.

必要性(反证法) 当 n 为奇数且 m 为奇数时,由引理 3 知 $a_n^{\delta m}(k)=0$. 而据存在定理所述之 $G(x)$,$H(x)$,又有 $a_n^{\delta m}(k)\neq 0$,得出矛盾,必要性得证.

定理 2 的证明 利用定理 1 及基函数的性质知,显然有定理 2 成立.

4 结束语

将本文的结论与文献[5]关于插值问题的结论相比较不难看出,随着结点组的改变,插值问题有解的条件并未发生改变,但是插值基多项式发生了变化,从而得到了不同的插值解.

5 参考文献

[1] Sharma A,Szabados J,Varga R S. 2-periodic lacunary trigonometric interpolation: the(0,m) case[M] //Butzer P L. Constructive Theory of Function. Sofia: Publ House of Bulg Acad of Sci,1988: 420-426.

[2] Sharma A,Sun Xiehua. A 2-periodic trigonometric interpolation problem[J]. Approx Theory and Its Appl,1992,8(4): 1-16.

[3] Sharma A,Szabados J,Varga R S. Some 2-periodic trigonometric interpolation problems on equidistant nodes[J]. Analysis,1991,11(2/3): 165-190.

[4] Delvos F J,Knoche L. Lacunary interpolation by antiperiodic trigonometric polynomials[J]. BIT,1999,39(3): 439-450.

[5] 文晓霞,候象乾. 反周期函数的双周期(0,δ^m)插值[J]. 宁夏大学学报: 自然科学版,2004,25(1): 8-10.

[6] 文晓霞. 一类反周期函数的双周期缺项插值问题[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2014,38(1): 62-64.

[7] 金玮,候象乾,马泽玲. (0,$P(D)$)三角插值多项式对函数及其导数的同时逼近[J]. 华中师范大学学报: 自然科学版,2004,38(3): 276-279.

[8] 王小刚,张瑞,候象乾. 推广的(0,$P(D)$)三角插值[J]. 宁夏大学学报: 自然科学版,2005,26(3): 221-224.

[9] 金玮,候象乾,伏春玲. (0,δ^M)三角插值多项式对函数及其导数的同时逼近[J]. 华中师范大学学报: 自然科学版,2009,43(2): 197-200.

[10] 陈文忠,古四毛. 修正的 Durrmeyer-Bernstein 算子的 L_p 逼近[J]. 数学研究与评论,1994,14(1): 129-134.

[11] 薛银川. Stamcu-Kantorovic 算子的迭代在 L 空间的逼近[J]. 数学研究与评论,1997,17(4): 570-572.

[12] 尚增科,盛保怀. 某些广义插值在 $L_P^{2\pi}$ 空间和 $L_P(R)$ 空间的逼近[J]. 数学研究,1997,30(3): 253-259.

[13] 赵振宇,候象乾. 一类三角插值多项式在 Besov 空间中逼近[J]. 数学研究,2005,38(3): 260-264.

[14] 文晓霞. Jackson 多项式在广义 Hölder 度量下的逼近[J]. 科技导报,2013,31(20): 51-53.

[15] 牛彤彤,吴嘎日迪. 两类修正的插值多项式在 Orlicz 空间的逼近[J]. 工程数学学报,2014,31(1): 103-111.

The Kind of 2-Periodic Interpolation by π-Anti-Periodic Function

WEN Xiaoxia[1],LI Fengjun[2]

(1. School of Physics and Electronic-Electrical Engineering,Ningxia University,Yinchuan Ningxia 750021,China;
2. School of Mathematics and Statistice,Ningxia University,Yinchuan Ningxia 750021,China)

Abstract: A kind of 2-periodic interpolation on a group of equidistant nodes by anti-periodic function is studied. The necessary and sufficient condition of solvability of 2-periodic anti-periodic interpolation problem is obtained through applying decomposition theorem and property of interpolation basic function,a result by interpolation is given at equal-distant nodal point sets,and the solution is obtained if it exists in the end.

Key words: anti-periodic function; 2-periodic; (0,δ^m)-interpolation; higher-order difference

(责任编辑: 曾剑锋)