

文章编号: 1000-5862(2017)02-0133-07

异分数阶 chen 系统的动力学特性及其多元电路实现

杨志宏 张彩霞 屈双惠 王 丽

(石家庄学院物理与机电学院, 河北 石家庄 050035)

摘要: 通过选取不同的分数阶数 q ($q_1 = 0.9$ $q_2 = 0.9$ $q_3 = 0.8$) 构造了异分数阶 3 维 chen 系统, 对其相图、分岔图和 Poincaré 截面等动力学特性进行了分析, 以树型、链型以及树链混合型的方式设计了系统的多元电路, 并进行 Multisim 模拟仿真, 电路仿真与 Matlab 数值仿真结果一致, 证实了所设计的多元电路的有效性。

关键词: 异分数阶; 动力学特性; 分岔图; Poincaré 截面; 多元电路

中图分类号: O 415 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.02.05

0 引言

随着信息产业的不断发展, 利用信息加密技术来确保信息传输的安全性已成为该行业的核心问题. 非线性系统由于具有较复杂的动力学特性而在信息加密技术中越来越突出其优越性, 得到了越来越多的实际应用. 目前利用整数阶微积分非线性系统进行保密通信的研究已比较普遍, 但对分数阶微积分系统的研究早期只局限于理论数学领域, 直到人们发现与整数阶微积分相比, 分数阶微积分能够更好更真实地描述分形几何、记忆过程等现象, 分数阶系统才被逐渐应用于通信、地质研究、医学图像处理等实际应用领域. 在保密通信领域, 与整数阶系统相比, 分数阶系统具有更大的密钥空间和更高的使用价值; 而异分数阶系统中各维方程均可选取不同阶数, 打破了同分数阶系统要求各维方程中阶数都相同的局限性, 适用范围更为广泛. 因此对异分数阶混沌系统的行为特性及其电路实现进行深入研究就显得更为重要^[1-7].

本文在 3 维 chen 系统的基础上, 通过选取不同的分数阶数 q ($q_1 = 0.9$ $q_2 = 0.9$ $q_3 = 0.8$) 构造了一个异分数阶 chen 系统. 本文对该系统的分岔图、Poincaré 截面等动力学特性进行了研究, 给出了不同阶数下分数阶系统的树型、链型等阻容单元电路, 通过独立使用或者混合使用这 2 种单元电路去替代

整数阶电路中的积分电容, 实现了对异分数阶 chen 系统的电路仿真, 且电路模拟与数值仿真结果完全一致, 为今后实现异分数阶系统的实际应用提供了有力的理论依据.

1 分数阶微分的定义

虽然分数阶微分有多种不同的定义, 但其科学性均已在实践中得到了证实^[8-10]. 本文选用最广泛的分数阶微分定义: Riemann-Liouville (RL) 分数阶微分, 它的数学表达式为

$$\frac{d^q f(t)}{dt^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}} d\tau, \quad (1)$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数, $n-1 < q < n$, q 为分数, n 为整数.

预估-校正法和时频域转换法是分数阶微积分的主要求解方法, 预估-校正法主要应用于数值求解, 时频域转换法主要应用在工程上^[9-12]. 本文采用预估-校正法对异分数阶 chen 系统进行数值仿真, 采用时频域转换法对其进行电路仿真.

2 异分数阶 chen 系统模型及其行为特性

本文构造的异分数阶 chen 系统的数学模型为

收稿日期: 2016-09-27

基金项目: 河北省自然科学基金(F2013106079), 石家庄市科技计划指导项目(141131561), 石家庄学院科研平台建设成果(XJPT002)资助项目.

作者简介: 杨志宏(1978-)男, 河北唐山人, 讲师, 主要从事非线性系统及控制理论与控制工程的研究, E-mail: yangzhihon_g@126.com

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1}}{dt^{q_1}}x = a(y - x) , \\ \frac{d^{q_2}}{dt^{q_2}}y = (c - a)x - xz + cy , \\ \frac{d^{q_3}}{dt^{q_3}}z = xy - bz. \end{cases} \quad (2)$$

选取不同的分数阶数,取 $q_1 = 0.9$ $q_2 = 0.9$, $q_3 = 0.8$ 采用预估-校正法对系统进行数值仿真,当参数 $a = 35$ $b = 3$ $c = 28$ 时,得到了异分数阶 chen 系统的混沌吸引子如图 1 所示.

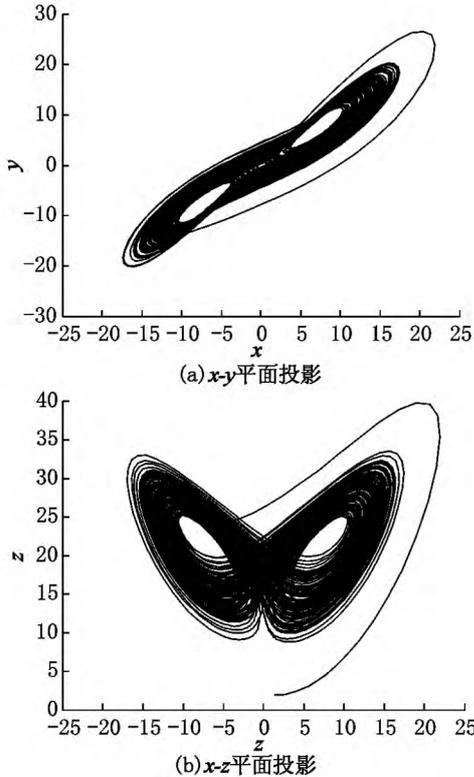


图 1 异分数阶 chen 系统混沌吸引子

图 2 给出了 $c = [25.5 \ 30]$ 时,变量 x 随参数 c 变化时的分岔图,由图 2 可以看出,系统在该区域出现混沌现象,但在 $c = [29.3 \ 29.5]$ 的区域内,系统出现周期窗口.

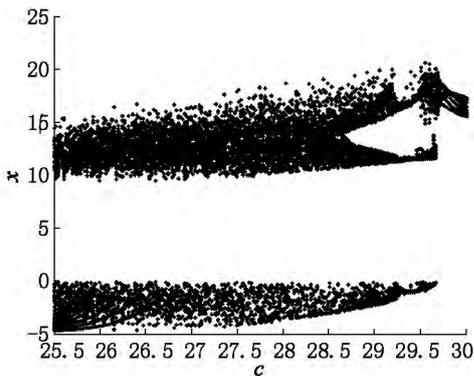


图 2 x 变量随参数 c 变化时的分岔图

图 3 给出了系统 (2) 在 $z = 12$ 时的 $x-y$ 截面和 $y = 0$ 时的 $x-z$ 截面的 Poincaré 映射图.由图 3 可见,2 个 Poincaré 截面图均出现了被反复折叠的成片的密集点,说明了该系统动力学行为的复杂性.

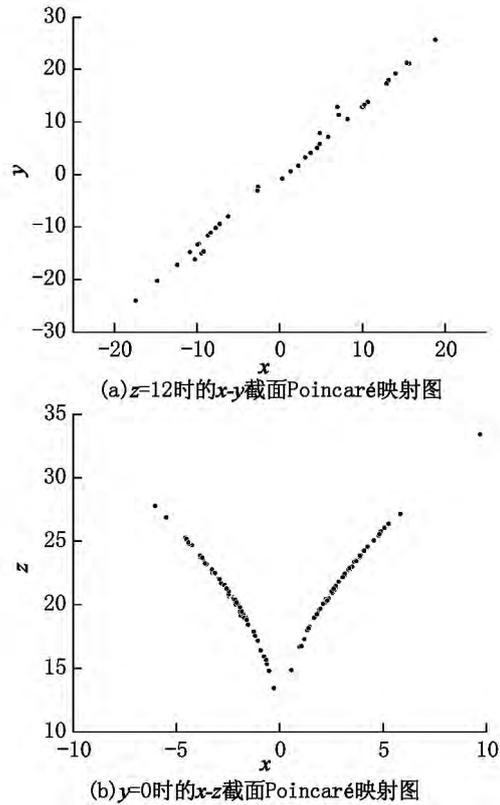


图 3 Poincaré 映射图

3 异分数阶 chen 系统的电路实现

采用时频域转换法进行分数阶系统的电路仿真^[9-15].若时域函数 $f(t)$ 的初始值为 0,则 (1) 式的拉普拉斯变换式可表示为

$$L\left\{\frac{d^q f(t)}{dt^q}\right\} = s^q L\{f(t)\} , \quad (3)$$

其中“ q ”为分数阶微分算子,在频域中通常可以利用传递函数 $H(s) = 1/s^q$ 来表示.求解 $1/s^q$ 可获得复频域展开形式,再将其转化为时域形式求解.

当 $q = 0.9$ 时, $1/s^{0.9}$ 的 2 dB 误差的近似公式为 $H(s) = 1/s^{0.9} \approx$

$$\frac{2.2675(s + 1.292)(s + 215.4)}{(s + 0.01292)(s + 2.154)(s + 359.4)} , \quad (4)$$

当 $q = 0.8$ 时, $1/s^{0.8}$ 的 2 dB 误差的近似公式为 $H(s) = 1/s^{0.8} \approx (5.3088(s + 0.1334)(s + 2.371)(s + 42.17)(s + 749.9) / (s + 0.01334)(s + 0.2371)(s + 4.217)(s + 74.99)(s + 1334))$. (5)

对于分数阶电路,可通过利用等效阻容单元电

路替换整数阶电路中的积分电容来实现. 下面分别给出实现 $1/s^{0.9}$ 和 $1/s^{0.8}$ 的树型、链型等效阻容单元电路, 并通过独立使用或混合使用这种单元电路来实现对异分数阶 chen 系统的多元电路仿真.

3.1 链型等效阻容单元电路

图 4(a) 为分数阶算子 $1/s^{0.9}$ 的链型等效阻容单元电路, 其传递函数可表示为

$$H(s) = R_a // \frac{1}{sC_a} + R_b // \frac{1}{sC_b} + R_c // \frac{1}{sC_c}. \quad (6)$$

将(6)式和(4)式作比较, 可得到 $1/s^{0.9}$ 的链型单元电路中的各电阻和电容值为 $R_a = 62.84 \text{ M}\Omega$, $R_b = 250 \text{ k}\Omega$, $R_c = 2.5 \text{ k}\Omega$, $C_a = 1.23 \text{ }\mu\text{F}$, $C_b = 1.83$

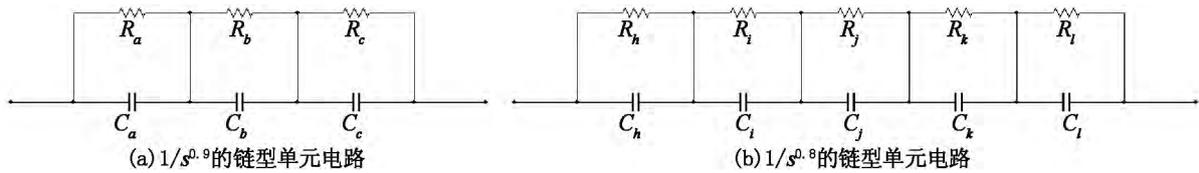


图 4 链型等效阻容单元电路

3.2 树型等效阻容单元电路

图 5(a) 为分数阶算子 $1/s^{0.9}$ 的树型等效阻容单元电路, 其传递函数可表示为

$$H(s) = \left[R_o + \left(R_p // \frac{1}{sC_p} \right) \right] // \left[\frac{1}{sC_o} + \left(R_q // \frac{1}{sC_q} \right) \right]. \quad (8)$$

将(8)式和(4)式作比较, 可得到 $1/s^{0.9}$ 的树型单元电路中的各电阻和电容值为 $R_o = 1.55 \text{ M}\Omega$, $R_p = 61.54 \text{ M}\Omega$, $R_q = 2.5 \text{ k}\Omega$, $C_o = 730 \text{ nF}$, $C_p = 520 \text{ nF}$, $C_q = 1.1 \text{ }\mu\text{F}$.

图 5(b) 为分数阶算子 $1/s^{0.8}$ 的树型等效阻容

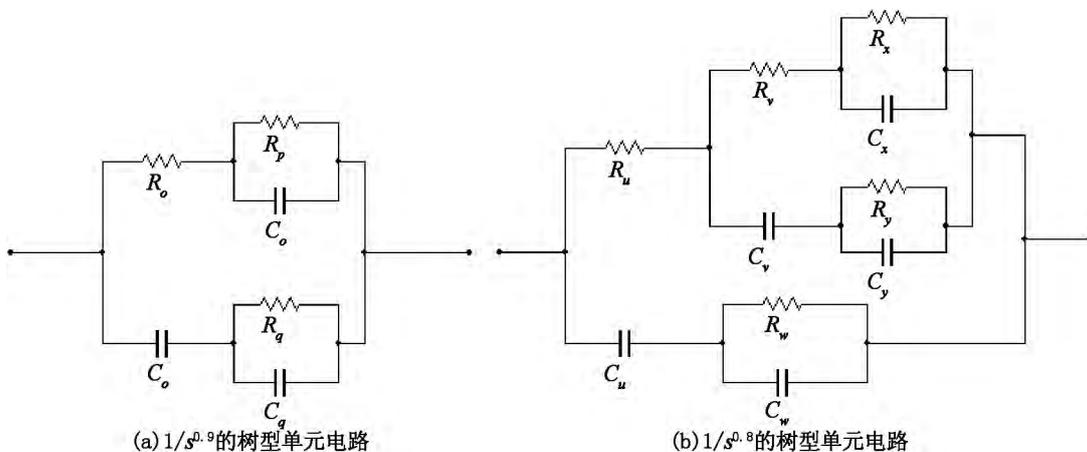


图 5 树型等效阻容单元电路

3.3 异分数阶 chen 系统的多元电路实现

图 6(a) 为在 Multisim 平台上设计的异分数阶 chen 系统的链型仿真电路图, 该电路共由 3 路模拟

μF , $C_c = 1.1 \text{ }\mu\text{F}$.

图 4(b) 为分数阶算子 $1/s^{0.8}$ 的链型等效阻容单元电路, 其传递函数可表示为

$$H(s) = R_h // \frac{1}{sC_h} + R_i // \frac{1}{sC_i} + R_j // \frac{1}{sC_j} + R_k // \frac{1}{sC_k} + R_l // \frac{1}{sC_l}. \quad (7)$$

将(7)式和(5)式作比较, 可得到 $1/s^{0.8}$ 的链型单元电路中的各电阻和电容值为 $R_h = 37.85 \text{ M}\Omega$, $R_i = 1.754 \text{ M}\Omega$, $R_j = 170 \text{ k}\Omega$, $R_k = 17 \text{ k}\Omega$, $R_l = 1.8 \text{ k}\Omega$, $C_h = 1.98 \text{ }\mu\text{F}$, $C_i = 2.4 \text{ }\mu\text{F}$, $C_j = 1.39 \text{ }\mu\text{F}$, $C_k = 780 \text{ nF}$, $C_l = 420 \text{ nF}$.

单元电路, 其传递函数可表示为

$$H(s) = \left(R_u + \left(R_v + \left(R_x // \frac{1}{sC_x} \right) \right) // \left(\frac{1}{sC_v} + \left(R_y // \frac{1}{sC_y} \right) \right) // \left(\frac{1}{sC_u} + \left(R_w // \frac{1}{sC_w} \right) \right) \right). \quad (9)$$

将(9)式和(5)式作比较, 可得 $1/s^{0.8}$ 的树型单元电路中的各电阻和电容值为 $R_u = 8.58 \text{ k}\Omega$, $R_v = 92.69 \text{ k}\Omega$, $R_w = 6.32 \text{ M}\Omega$, $R_x = 39.69 \text{ M}\Omega$, $R_y = 490 \text{ k}\Omega$, $C_u = 950 \text{ nF}$, $C_v = 610 \text{ nF}$, $C_w = 234 \text{ nF}$, $C_x = 233 \text{ nF}$, $C_y = 239 \text{ nF}$.

运算电路组成, 第 2、3 路电路中使用模拟乘法器 AD633 实现系统的交叉乘积项, 其增益为 0.1, 利用 $E = \pm 12 \text{ V}$ 的运算放大器 LF353D 以及链型等效阻

容单元电路对各状态变量进行积分运算.

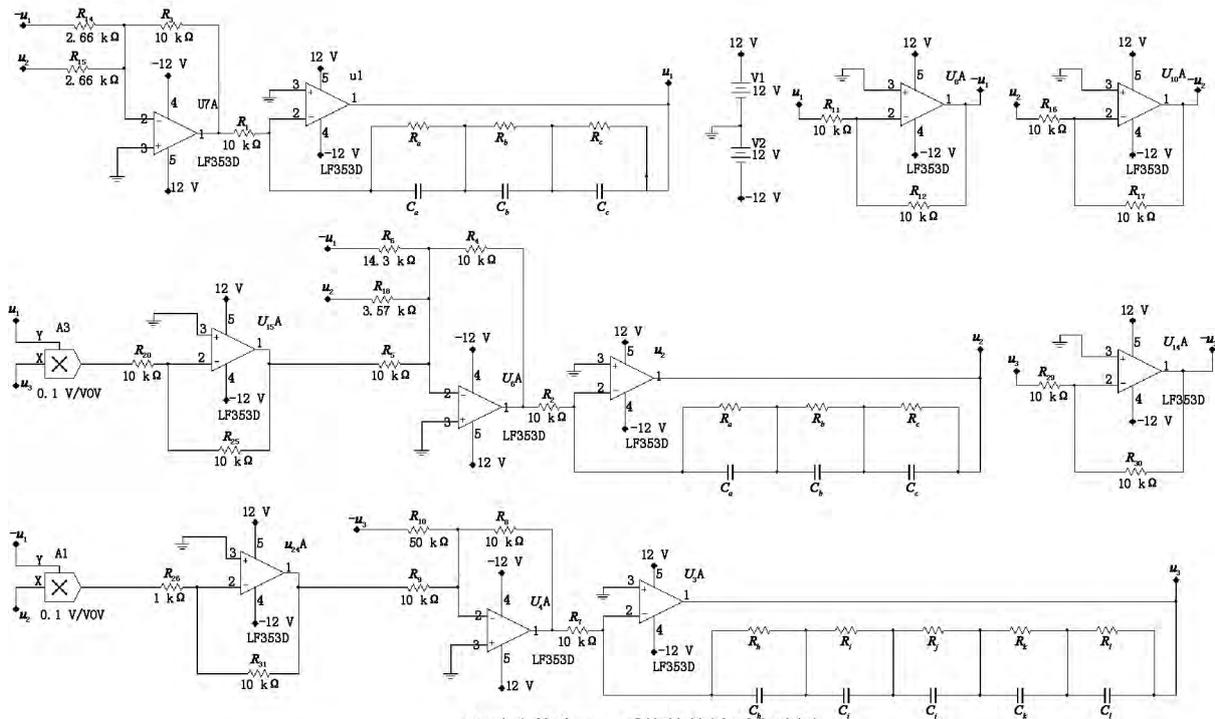
对于每一路运算电路都可分别选用链型和树型 2 种单元电路实现对分数阶电路的运算,本文选用的异分数阶 chen 系统是 3 维系统,共有 $2^3 = 8$ 种组合方式,如表 1 所示.

表 1 多元电路的不同组合方式

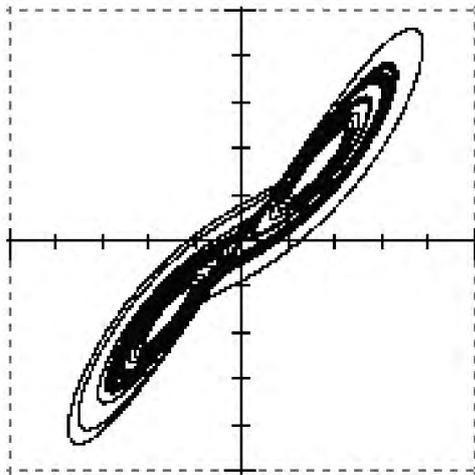
	1	2	3	4	5	6	7	8
$q_1 = 0.9$	链型	链型	链型	链型	树型	树型	树型	树型
$q_2 = 0.9$	链型	链型	树型	树型	链型	链型	树型	树型
$q_3 = 0.8$	链型	树型	链型	树型	链型	树型	链型	树型

表 1 中的组合 1,如图 6(a)所示,通过独立使用链型单元电路实现了异分数阶 chen 系统的链型电路仿真,通过 Multisim 仿真得到吸引子相图如图 6(b)和图 6(c)所示.

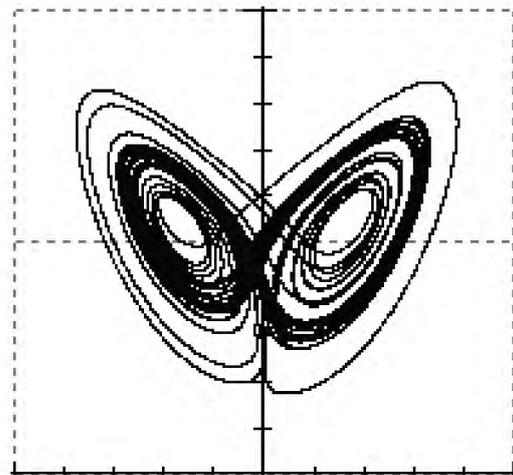
若将图 6(a)中的链型单元电路全部更换为树型单元电路,该组合方式对应于表 1 中的组合 8,如图 7(a)所示,可得到通过独立使用树型单元电路实现的异分数阶 chen 系统的树型电路仿真.通过 Multisim 仿真得到吸引子相图 7(b)和图 7(c).



(a) 异分数阶 chen 系统的链型电路图

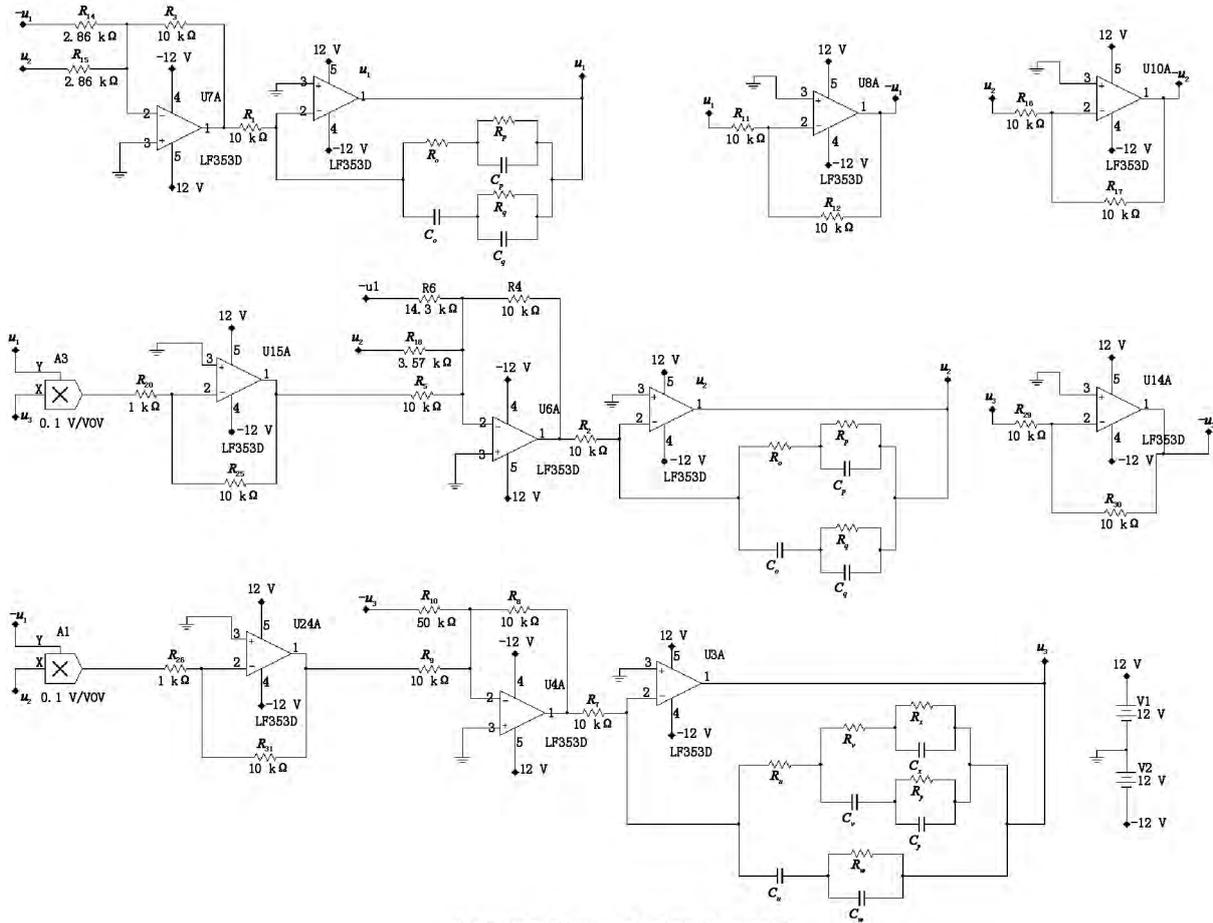


(b) x-y 平面投影

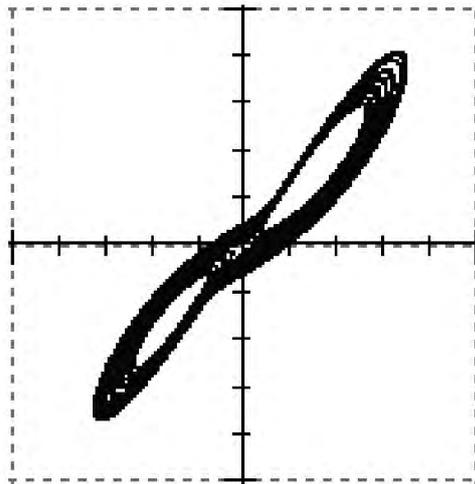


(c) x-z 平面投影

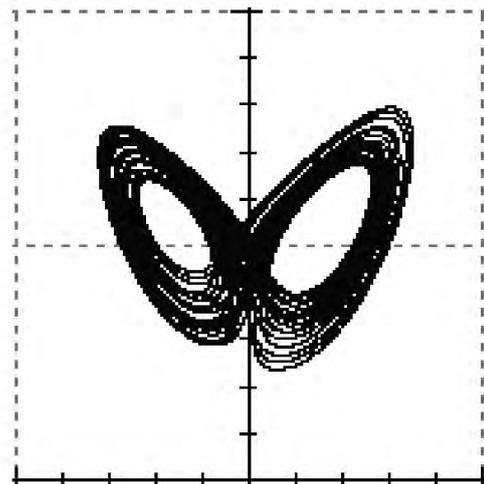
图 6 异分数阶 chen 系统的链型电路及仿真结果



(a) 异分数阶chen系统的树型电路图



(b) x-y平面投影



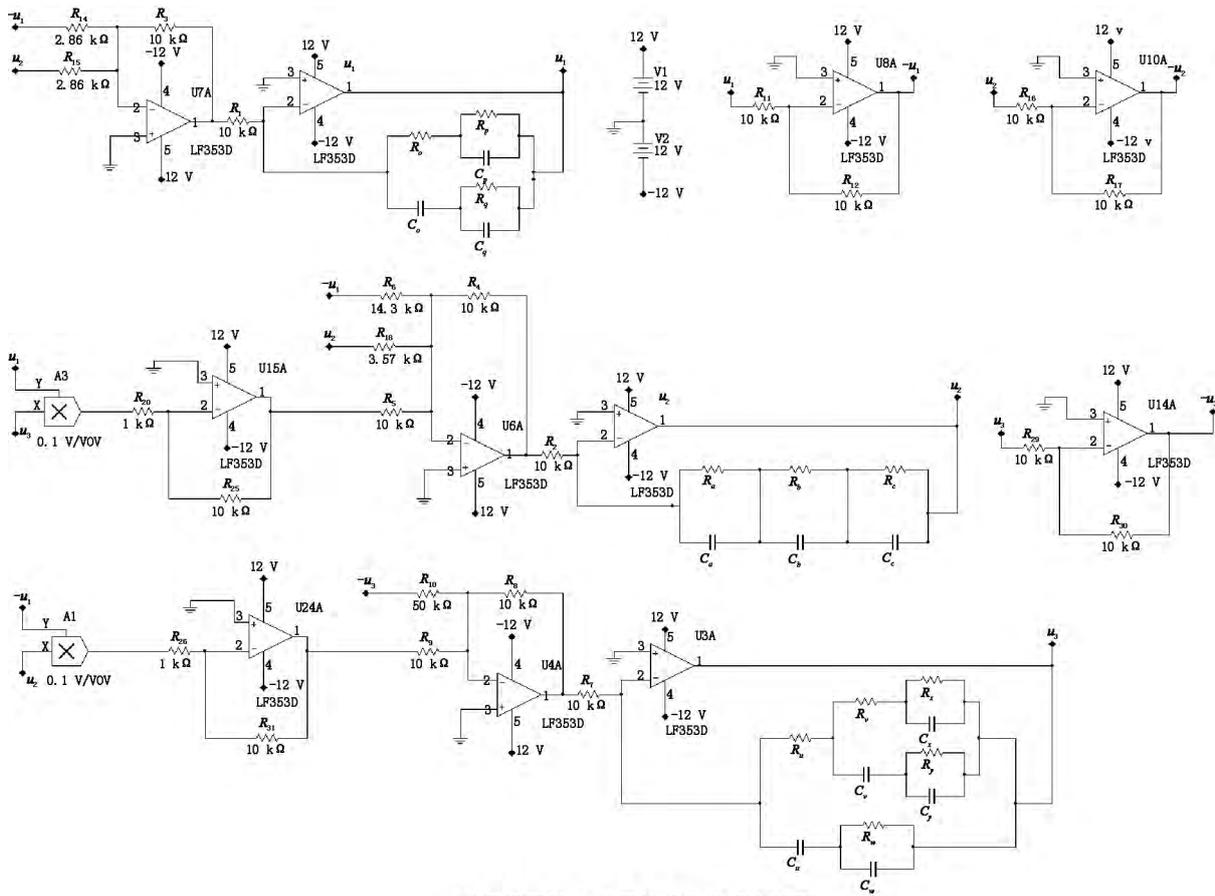
(c) x-z平面投影

图 7 异分数阶 chen 系统的树型电路及仿真结果

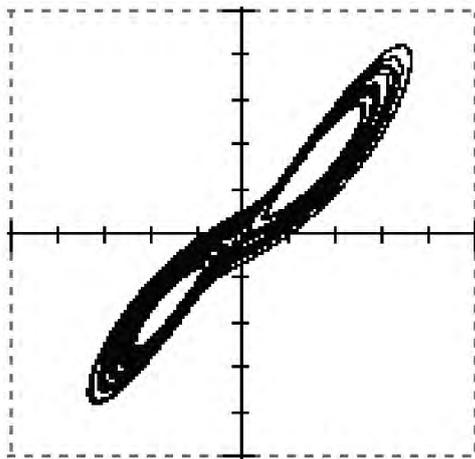
其余组合方式为树型和链型单元电路混合在一起时实现的异分数阶 chen 系统的混合电路。鉴于篇幅限制, 本文只给出了该系统的组合 6 混合电路, 其中第 1、3 路电路选用树形单元电路, 第 2 路电路选用链型单元电路, 如图 8(a) 所示, 通过 Multisim 仿真得到吸引子相图, 如图 8(b) ~ 图 8(c) 所示。此

外, 对表 1 的其他 5 种混合电路也都进行了电路仿真实验, 得到了相同的吸引子相图。

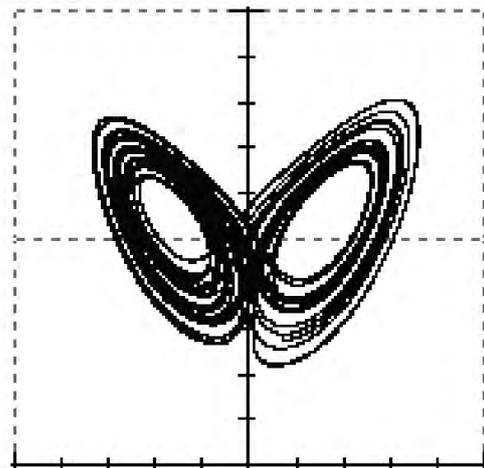
可以看出, 以上 3 种组合电路得到的分数阶 chen 系统的吸引子相图是一致的, 说明多种不同形式的电路组合均能较好地实现该系统的电路仿真, 并且所得的结果与 Matlab 数值仿真得到的结果符合较好。



(a) 异分数阶chen系统的混合型电路图



(b) x-y平面投影



(c) x-z平面投影

图8 异分数阶 chen 系统的混合型电路及仿真结果(组合6)

4 结论

与整数阶系统相比,分数阶系统不仅能更准确更真实地反映出系统的动力学特性,而且具有更好的加密效果.因而分数阶系统在信息加密领域具有更广泛的应用价值.本文对阶数不同的异分数阶chen系统的动力学特性进行了分析,对该系统的链型、树型、混合型多元电路进行研究,多种不同形式

的组合电路仿真结果均与数值仿真结果相符合,不仅验证了所设计电路的有效性,也为实现该系统的实际应用奠定了基础.

5 参考文献

[1] Chen Diyi, Liu Yuxiao, Ma Xiaoyi et al. Control of a class of fractional-order chaotic systems via sliding mode [J]. Nonlinear Dynamics 2012 67(1): 893-901.

- [2] Zhang Ruoxun, Yang Shiping. Robust synchronization of two different fractional-order chaotic systems with unknown parameters using adaptive sliding mode approach [J]. *Nonlinear Dynamics* 2013, 71(1/2): 269-278.
- [3] 陆安山, 陆益民. 一种变形 Liu 混沌系统的分析及电路实现 [J]. *江西师范大学学报: 自然科学版*, 2014, 38(5): 468-471.
- [4] 李东, 邓良明, 杜永霞, 等. 分数阶超混沌 chen 系统和分数阶超混沌 Rossler 系统的异结构同步 [J]. *物理学报* 2012, 61(5): 50502-50511.
- [5] Sun Kehui, Wang Xia, Sprott J C. Bifurcations and chaos in fractional-order simplified Lorenz system [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, 20(4): 1209-1219.
- [6] 屈双惠, 吴淑花, 杨志宏, 等. 一个新 4 维超混沌系统的行为特性及其同步 [J]. *江西师范大学学报: 自然科学版* 2012, 36(1): 87-91.
- [7] Li Chunguang, Chen Guanrong. Chaos and hyperchaos in the fractional order Rossler equations [J]. *Physica A*, 2006, 27(1): 685-688.
- [8] 贺少波, 孙克辉, 王会海. 分数阶混沌系统的 Adomian 分解法求解及其复杂性分析 [J]. *物理学报* 2014, 63(3): 30502-30509.
- [9] 孙克辉, 杨静利, 丘水生. 分数阶混沌系统的仿真方法研究 [J]. *系统仿真学报* 2011, 23(11): 2361-2370.
- [10] 黄丽莲, 辛方, 王霖郁. 新分数阶混沌系统的异结构同步及其电路仿真 [J]. *系统仿真学报* 2012, 24(7): 1479-1484.
- [11] 陈向荣, 刘崇新, 王发强, 等. 分数阶 Liu 混沌系统及其电路实验的研究与控制 [J]. *物理学报* 2008, 57(3): 1416-1422.
- [12] 张若洵, 杨世平. 分数阶共轭 Chen 混沌系统中的混沌及其电路实验仿真 [J]. *物理学报* 2009, 58(5): 2957-2962.
- [13] 邵书义, 闵富红, 马美玲, 等. 分数阶 Chua's 系统错位同步无感模块化电路实现及应用 [J]. *物理学报*, 2013, 62(13): 130504-130511.
- [14] 贾红艳, 陈增强, 薛薇. 分数阶 Lorenz 系统的分析及电路实现 [J]. *物理学报* 2013, 62(14): 140503-140509.
- [15] 行鸿彦, 王秋辉, 徐伟, 等. 新蝶翼混沌系统的分数阶电路实现与控制分析 [J]. *科学技术与工程* 2014, 14(14): 69-75.

The Dynamic Properties of the Heterogeneous Fractional Order chen System and Its Plural Circuit Implementation

YANG Zhihong, ZHANG Caixia, QU Shuanghui, WANG Li

(School of Physics and Electromechanical Engineering, Shijiazhuang University, Shijiazhuang Heibei 050035, China)

Abstract: By taking different values of the fractional-orders q ($q_1 = 0.9$, $q_2 = 0.9$, $q_3 = 0.8$), the dynamic properties of the three-dimensional heterogeneous fractional order chen system are investigated via phase diagram, bifurcation and Poincaré diagrams. The tree type, chain type and mixed type plural analog circuit are designed using Multisim electronics platform to implement the new system. The plural circuit experimental results are all consistent with Matlab numerical simulation results, which show the effectiveness of the proposed circuit and prove that chaos actually exists in the heterogeneous fractional order chen system.

Key words: heterogeneous fractional order; dynamic properties; bifurcation; Poincaré diagrams; plural analog circuit

(责任编辑: 冉小晓)