文章编号:1000-5862(2017)02-0175-05

Lipshitz 带形区域上的 Hardy 空间

邓冠铁,王翠巧

(北京师范大学数学科学学院,数学与复杂系统教育部重点实验室,北京　100875)

摘要: 对 Lipshitz 带形区域 Ω_a 上的 Hardy 空间 $H^p(\Omega_a)(0<p<+\infty)$,证明了 $H^p(\Omega_a)$ 的完备性,对解析函数 $f\in H^p(\Omega_a)(0<p<+\infty)$ 在边界点的非切向极限 f^* 的存在性和 f 能由边界函数 f^* 的 Cauchy 积分表示也给出了证明.

关键词: Lipshitz 带形区域; Hardy 空间; 非切向极限; Cauchy 积分表示

中图分类号: O 174.52　　**文献标志码**: A　　**DOI**: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.02.12

0　引言

设 $0<a<+\infty$,$S_a=\{x+\mathrm{i}y: x\in\mathbf{R},0<y<a\}$ 为复平面上的带形区域,S_a 的边界记为 ∂S_a. 设 $0<p<+\infty$,S_a 中的 Hardy 空间 $H^p(S_a)$ 是指在 S_a 中解析,且满足

$$\sup_{0<y<a}\left(\int_{\mathbf{R}}|f(x+\mathrm{i}y)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}<+\infty$$

的函数 $f(z)$ 全体. 记

$$\|f\|_{H^p(S_a)}=\sup_{0<y<a}\left(\int_{\mathbf{R}}|f(x+\mathrm{i}y)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

关于 Hardy 空间的研究最早是从研究单位圆盘和上半平面[1-3]上的 Hardy 空间开始的. 李真等[4]考虑了带形区域上的 Hardy 空间,并利用带形区域到上半平面的保形映射,得到了带形区域上的 Hardy 空间的一系列性质. 比如对 $1\leqslant p<+\infty$,$H^p(S_a)$ 以 $\|\cdot\|_{H^p(S_a)}$ 为范数构成 Banach 空间; 对 $0<p<1$,$H^p(S_a)$ 以 $\rho(f,g)=\|f-g\|_{H^p(S_a)}^p$ 为距离构成 Fréchet 空间. $\forall f\in H^p(S_a)$,它在 ∂S_a 上几乎处处存在非切向极限 $f^*(t)$,$f^*(t+\mathrm{i}a)$,且 $f^*(t)$,$f^*(t+\mathrm{i}a)\in L^p(\mathbf{R})$. 对 $1\leqslant p<+\infty$,$f\in H^p(S_a)$ 可以表示为它的非切向极限 $f^*(t)$,$f^*(t+\mathrm{i}a)$ 的 Cauchy 积分等.

设 $b(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的 Lipschitz 函数,即 $\exists M>0$,使得 $\forall x,y\in\mathbf{R}$,有 $|b(x)-b(y)|\leqslant M|x-y|$. 记 Γ 是 Lipschitz 函数 $b(x)$ 的曲线. 称 M 是函数 $b(x)$ 对应的 Lipshitz 常数. 对曲线 Γ 上的区域 $\Omega=\{z+\mathrm{i}\tau: z=x+\mathrm{i}b(x)\in\Gamma,\tau>0\}$ 上的 Hardy 空间 $H^p(\Omega)(1<p<+\infty)$,A. P. Calderón[5] 首先在 M 很小的条件下,证明了 Lipschitz 曲线 Γ 上的 Cauchy 积分算子的 L^2 有界性,引入了现在被称为 Calderón-Zygmund 算子的研究. C. E. Kenig[6] 在 A. P. Calderón 的指导下,对一般的 M 继续进行这方面的研究,得到了很有意义的结果. R. R. Coifman 等[7]以及 G. David 等[8]重新证明了这些结果. Y. Meyer 和 R. Coifman 在他们的《小波与算子》[9]一书中,用调和函数极大函数的方法,对 A. P. Calderón 和 C. E. Kening 的工作进行了归纳和总结,对 $f\in H^p(\Omega)$,证明了在 $\partial\Omega$ 上几乎处处存在竖直极限,从而证明 f 能由竖直边界函数的 Cauchy 积分表示. 然而他们的研究并没有涉及非切向极限.

设 $0<a<+\infty$,$\Omega_a=\{z+\mathrm{i}\tau: z=x+\mathrm{i}b(x)\in\Gamma,0<\tau<a\}$ 为复平面中的 Lipshitz 带形区域. 设 $0<p<+\infty$,$H^p(\Omega_a)$ 表示在 Ω_a 中解析,且满足

$$\|f\|_{H^p(\Omega_a)}=\sup_{0<\tau<a}\left(\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau}|f(z)|^p\mathrm{d}s\right)^{1/p}<+\infty$$

的函数 $f(z)$ 全体,其中 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+b'^2(x)}\,\mathrm{d}x$. 记 $L^p(\Gamma)\overset{\triangle}{=}\{f: \|f\|_p=\left(\int_\Gamma|f(z)|^p\mathrm{d}s\right)^{1/p}<+\infty\}$.

受 Y. Meyer 等思想和带形区域上的 Hardy 空间的结果启发,对 Lipshitz 带形区域 Ω_a 上的 Hardy 空间 $H^p(\Omega_a)(0<p<+\infty)$,在本文中用复分析的方法,证明了 $H^p(\Omega_a)$ 的完备性,并且对解析函数 $f\in H^p(\Omega_a)(1<p<+\infty)$,证明了 f 在边界上的 Lebesgue 点处的非切向极限 f^* 存在且能由边界函数 f^* 的 Cauchy 积分表示. 本文定理 2 证明了解析函数 $f\in H^p(\Omega_a)(1<p<+\infty)$ 在边界上的 Lebesgue 点处存在非切向极限 f^*. 这一结果是 Y. Meyer 等在 $\partial\Omega$ 上几乎处处存在竖直极限的本质推广.

收稿日期: 2016-11-28

基金项目: 国家自然科学基金(11271045)资助项目.

作者简介: 邓冠铁(1959-),湖南永兴人,教授,博士生导师,主要从事复分析方向的研究. E-mail: denggt@bnu.edu.cn

1 主要结果

定理 1 当 $1 \leqslant p < +\infty$ 时，$H^p(\Omega_a)$ 是范数为 $\|\cdot\|_{H^p(\Omega_a)}$ 的 Banach 空间; 当 $0 < p < 1$ 时，$H^p(\Omega_a)$ 是度量为 $\rho(f,g) = \|f-g\|_{H^p(\Omega_a)}^p$ 的 Fréchet 空间.

定理 2 设 Γ 的参数方程为 $\Gamma = \{w(t) = t + \mathrm{i}b(t): t \in \mathbf{R}\}$，$f \in L^p(\Gamma)$. 如果 t_0 是 $f(w(t))$ 的 Lebesgue 点且 $w'(t_0)$ 存在，记 $w(t_0) = w_0$，$w'(t_0) = |w'(t_0)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t_0)}$. 设 $0 < \varphi_0 < \pi/2$，$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$r > 0$. 令 $\Omega_{\varphi_0} = \{w(t_0) + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}: r > 0, \varphi_0 < \theta - \varphi(t_0) < \pi - \varphi_0\}$. 设

$$K_z(w,w_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\frac{1}{w-(w_0+z)} - \frac{1}{w-(w_0-z)}\right],$$

则

$$\lim_{\substack{w_0+z \in \Omega_{\varphi_0} \\ z \to 0}} \int_\Gamma K_z(w,w_0) f(w)\,\mathrm{d}w = f(w_0).$$

定理 3 设 $1 < p < +\infty$，$f \in H^p(\Omega_a)$，则 $f(z)$ 在 $\partial\Omega_a = \Gamma_0 \cup \Gamma_a$ 上几乎处处存在非切向极限，其中 $\Gamma_b = \{\zeta + \mathrm{i}b: \zeta \in \Gamma\}(b \in \mathbf{R})$ 表示与 Γ 平行的曲线. $f(z)$ 在 Γ_0 和 Γ_a 上的非切向极限分别记为 $f^*(\zeta)$，$f^*(\zeta+\mathrm{i}a)$，有 $f^*(\zeta)$，$f^*(\zeta+\mathrm{i}a) \in L^p(\Gamma)$，且

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f^*(\zeta+\mathrm{i}a)}{\zeta+\mathrm{i}a-z}\mathrm{d}\zeta, z \in \Omega_a. \tag{1}$$

为了证明如上定理，需用如下引理.

引理 1 如果 $v(z)$ 在 Ω_a 内次调和，且

$$C = \sup_{0<\tau<a}\int_\Gamma |v(\zeta+\mathrm{i}\tau)|\,\mathrm{d}s < +\infty,$$

则

$$v(\zeta+\mathrm{i}\tau) \leqslant \frac{2C(1+M^2)}{\pi\min\{\tau, a-\tau\}}, \zeta \in \Gamma, 0 < \tau < a.$$

2 引理和定理的证明

引理 1 的证明 任取 $\zeta \in \Gamma$，$0 < \tau < a$，以 $\zeta + \mathrm{i}\tau$ 为中心，$r = \min\{\tau, a-\tau\}/\sqrt{1+M^2}$ 为半径作圆盘 $D(\zeta+\mathrm{i}\tau, r)$. 由次调和函数的均值性质，有

$$v(\zeta+\mathrm{i}\tau) \leqslant \int_{D(\zeta+\mathrm{i}\tau,r)} v(\zeta_1)\,\mathrm{d}\lambda(\zeta_1)/(\pi r^2) \leqslant$$

$$\int_{D(\zeta+\mathrm{i}\tau,r)} |v(\zeta_1)|\,\mathrm{d}\lambda(\zeta_1)/(\pi r^2) \leqslant$$

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_{\tau-\sqrt{1+M^2}r}^{\tau+\sqrt{1+M^2}r}\int_\Gamma |v(\xi_1+\mathrm{i}\eta_1)|\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\eta_1 \leqslant$$

$$2C(1+M^2)/(\pi\min\{\tau, a-\tau\}).$$

故引理 1 成立.

定理 1 的证明 $\forall a, b > 0$，有如下不等式成立

$$(a+b)^p \leqslant \begin{cases} a^p + b^p, & 0 < p < 1, \\ 2^{p-1}(a^p+b^p), & p \geqslant 1. \end{cases} \tag{2}$$

事实上，令 $g(x) = (1+x)^p/(1+x^p)$，$x > 0$. 对 $g(x)$ 求导知，当 $p \geqslant 1$ 时，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x) \leqslant g(1) = 2^{p-1}$; 当 $0 < p < 1$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增. 由于 $g(0) = 1$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$，所以 $g(x) \leqslant 1$.

由(2)式知，当 $0 < p < 1$ 时，

$$\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |f(z)+g(z)|^p\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} (|f(z)|+|g(z)|)^p\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |f(z)|^p\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |g(z)|^p\,\mathrm{d}s,$$

从而 $f + g \in H^p(\Omega_a)$，且

$$\|f+g\|_{H^p(\Omega_a)}^p \leqslant \|f\|_{H^p(\Omega_a)}^p + \|g\|_{H^p(\Omega_a)}^p.$$

当 $p \geqslant 1$ 时，

$$\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |f(z)+g(z)|^p\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} (|f(z)|+|g(z)|)^p\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} 2^{p-1}(|f(z)|^p + |g(z)|^p)\,\mathrm{d}s =$$

$$2^{p-1}\left(\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |f(z)|^p\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |g(z)|^p\,\mathrm{d}s\right).$$

故 $f + g \in H^p(\Omega_a)$. 当 $p > 1$ 时，设 $1/p + 1/q = 1$，由 Hölder 不等式得

$$\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |f(z)+g(z)|^p\,\mathrm{d}s =$$

$$\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |f(z)+g(z)|\cdot|f(z)+g(z)|^{p-1}\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |f(z)|\,|f(z)+g(z)|^{p-1}\,\mathrm{d}s +$$

$$\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |g(z)|\,|f(z)+g(z)|^{p-1}\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\left(\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |f(z)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}\left(\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |f(z)+g(z)|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}s\right)^{1/q} +$$

$$\left(\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |g(z)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}\left(\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |f(z)+g(z)|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}s\right)^{1/q} =$$

$$\left(\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |f(z)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}\left(\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |f(z)+g(z)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/q} +$$

$$\left(\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |g(z)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}\left(\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |f(z)+g(z)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/q},$$

从而

$$\left(\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |f(z)+g(z)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1-1/q} \leqslant$$

$$\left(\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |f(z)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p} + \left(\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau} |g(z)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}.$$

对 $0 < \tau < a$ 取上确界，则

$$\|f+g\|_{H^p(\Omega_a)} \leqslant \|f\|_{H^p(\Omega_a)} + \|g\|_{H^p(\Omega_a)} .$$

当 $p=1$ 时,上述不等式显然成立. 下证完备性.

设 $\{f_n\}$ 是 Ω_a 中的 Cauchy 列,即

$$\|f_n - f_m\|_{H^p(\Omega_a)} \to 0(n,m\to+\infty),$$

对任意的紧集 $K\subset\Omega_a$, $\exists\ 0<\tau_1<\tau_2<a$,使得 $K\subset\{\zeta+\mathrm{i}\tau:\zeta\in\Gamma,\tau_1<\tau<\tau_2\}$. 由于 $|f_n-f_m|^p$ 在 Ω_a 中是次调和的并且连续的,故由引理 1, $\forall z\in K$,有

$$|f_n(z)-f_m(z)|^p \leqslant 2\|f_n-f_m\|^p_{H^p(\Omega_a)}(1+M^2)/(\pi\min\{\tau_1,a-\tau_2\})\to 0(n,m\to+\infty).$$

于是 $\{f_n\}$ 在 Ω_a 中内闭一致收敛到 $f\in H(\Omega_a)$. $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$,使得 $\forall n,m>N$,有 $\|f_n-f_m\|^p_{H^p(\Omega_a)}<\varepsilon$. 于是由 Fatou 引理,有

$$\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau}|f(z)-f_n(z)|^p\mathrm{d}s \leqslant \liminf_{m\to+\infty}\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau}|f_m(z)-f_n(z)|^p\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon .$$

从而 $\|f_n-f\|_{H^p(\Omega_a)}\to 0(n\to\infty)$. 即完备性得证.

故定理 1 成立.

定理 2 的证明　$\exists\delta>0$,使得当 $z\in\Omega_{\varphi_0}$, $0<|z|<\delta$ 时, $w(t)+z\in\Omega$, $w(t)-z\notin\overline{\Omega}$. 类似文献[9] 中的证明方法,容易验证 $\int_\Gamma K_Z(w,w_0)\,\mathrm{d}w=1$. 令

$$y_1 = |z|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi(t_0)-\theta\right) = |z|\sin(\theta-\varphi(t_0)),$$

则 $y_1\geqslant|z|\sin\varphi_0$. 取 $M_1>1/\sin\varphi_0$,于是

$$\int_\Gamma K_z(w,w_0)f(w)\,\mathrm{d}w - f(w_0) = \int_\Gamma K_z(w,w_0)(f(w)-f(w_0))\,\mathrm{d}w =$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\left[\frac{1}{w-(w_0+z)}-\frac{1}{w-(w_0-z)}\right](f(w)-f(w_0))\,\mathrm{d}w =$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|t-t_0|\geqslant M_1y_1}\frac{2z[f(w(t))-f(w(t_0))]w'(t)\,\mathrm{d}t}{[w(t)-w(t_0)]^2-z^2} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|t-t_0|\leqslant M_1y_1}\frac{2z[f(w(t))-f(w(t_0))]w'(t)\,\mathrm{d}t}{[w(t)-w(t_0)-z][w(t)-w(t_0)+z]} = I_1+I_2 .$$

当 $|t-t_0|\geqslant M_1y_1$ 时,令 $M_2=(M_1^2\sin^2\varphi_0-1)/[(1+M_1^2)\sin^2\varphi_0]$,则

$$|[w(t)-w(t_0)]^2-z^2|\geqslant|w(t)-w(t_0)|^2-|z|^2\geqslant|t-t_0|^2-y_1^2/\sin^2\varphi_0\geqslant$$

$$|t-t_0|^2-|t-t_0|^2/(M_1^2\sin^2\varphi_0) = \frac{1-1/(M_1^2\sin^2\varphi_0)}{1+1/M_1^2}\left(1+\frac{1}{M_1^2}\right)|t-t_0|^2\geqslant M_2(|t-t_0|^2+y_1^2).$$

从而

$$I_1\leqslant\frac{|z|}{\pi}\int_{|t-t_0|\geqslant M_1y_1}\frac{|f(w(t))-f(w(t_0))|\,|w'(t)|\,\mathrm{d}t}{|[w(t)-w(t_0)]^2-z^2|}\leqslant$$

$$\frac{y_1\sqrt{1+M^2}}{\pi\sin^2\varphi_0}\int_{|t-t_0|\geqslant M_1y_1}\frac{|f(w(t))-f(w(t_0))|\,\mathrm{d}t}{M_2(|t-t_0|^2+y_1^2)} = \frac{\sqrt{1+M^2}}{M_2\sin^2\varphi_0}\int_{\mathbf{R}}|f(w(t))-f(w(t_0))|P_{y_1}(t-t_0)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $P_y(x)=y/[\pi(x^2+y^2)]$ 是上半平面的 Poisson 核. 由上半平面 Poisson 积分的性质知, $I_1\to 0(y_1\to 0)$.

下面估计 I_2. 由于

$$w'(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{w(t)-w(t_0)}{t-t_0},$$

故 $w(t)=w(t_0)+w'(t_0)(1+o(1))(t-t_0)$. 取 $\varepsilon>0$,满足 $\sqrt{1+M^2}M_1\varepsilon\leqslant 1/2$. 对上述 ε, $\exists\delta_1>0$,使得当 $|t-t_0|<\delta_1$ 时, $|o(1)|\leqslant\varepsilon$. 因此,当 $y_1\leqslant\delta_1/M_1$, $|t-t_0|\leqslant M_1y_1$ 时,

$$|w(t)-w(t_0)-z| = |w'(t_0)(1+o(1))(t-t_0)-z| = |r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-|w'(t_0)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t_0)}(1+o(1))(t-t_0)| =$$

$$|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi(t_0))}-|w'(t_0)|(1+o(1))(t-t_0)|\geqslant$$

$$|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi(t_0))}-|w'(t_0)|(t-t_0)|-|w'(t_0)|\,|o(1)|\,|(t-t_0)|\geqslant$$

$$r\sin(\theta-\varphi(t_0))-\sqrt{1+M^2}\varepsilon M_1y_1 = y_1-\sqrt{1+M^2}\varepsilon M_1y_1\geqslant y_1/2 .$$

同理可得, $|w(t)-w(t_0)+z|\geqslant y_1/2$. 从而

$$I_2\leqslant\frac{|z|}{\pi}\int_{|t-t_0|\leqslant M_1y_1}[|f(w(t))-f(w(t_0))|\,|w'(t)|\,\mathrm{d}t/|w(t)-w(t_0)-z|\,|w(t)-w(t_0)+z|]\leqslant$$

$$\frac{y_1\sqrt{1+M^2}}{\pi\sin^2\varphi_0}\int_{|t-t_0|\leqslant M_1y_1}\frac{|f(w(t))-f(w(t_0))|\,\mathrm{d}t}{y_1^2/4} = \frac{4\sqrt{1+M^2}M_1}{\pi\sin^2\varphi_0}\frac{1}{M_1y_1}\int_{|t-t_0|\leqslant M_1y_1}|f(w(t))-f(w(t_0))|\,\mathrm{d}t .$$

由 Lebesgue 点的定义知,当 $y_1\to 0$ 时, $I_2\to 0$. 显然当 $z\to 0$ 时, $y_1\to 0$,从而

$$\int_\Gamma K_z(w,w_0)f(w)\,\mathrm{d}w\to f(w_0) .$$

定理 2 得证.

定理 3 的证明　取 q 为 p 的共轭指数. 因为 $f\in H^p(\Omega_a)$,所以

$$\int_0^a\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau}|f(z)|^p\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\leqslant a\|f\|^p_{H^p(\Omega_a)}<+\infty$$

由 Fubini 定理,

$$\int_0^a\int_{\Gamma+\mathrm{i}\tau}|f(z)|^p\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = \int_0^a\int_\Gamma|f(z+\mathrm{i}\tau)|^p\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = \int_\Gamma\int_0^a|f(z+\mathrm{i}\tau)|^p\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s =$$

$$\int_0^{+\infty} x\left[\int_0^a |f(x+\mathrm{i}b(x)+\mathrm{i}\tau)|^p\sqrt{1+b'^2(x)}\mathrm{d}\tau+\int_0^a |f(-x+\mathrm{i}b(-x)+\mathrm{i}\tau)|^p\sqrt{1+b'^2(-x)}\mathrm{d}\tau\right]\frac{\mathrm{d}x}{x}<+\infty$$

所以

$$\liminf_{x\to+\infty} x\left[\int_0^a |f(x+\mathrm{i}b(x)+\mathrm{i}\tau)|^p\sqrt{1+b'^2(x)}\mathrm{d}\tau+\int_0^a |f(-x+\mathrm{i}b(-x)+\mathrm{i}\tau)|^p\sqrt{1+b'^2(-x)}\mathrm{d}\tau\right]=0.$$

存在正数列 $\{x_n\}$，$x_n\uparrow+\infty, n\to+\infty$，使得

$$\lim_{n\to+\infty} x_n\left[\int_0^a |f(x_n+\mathrm{i}b(x_n)+\mathrm{i}\tau)|^p\sqrt{1+b'^2(x_n)}\mathrm{d}\tau+\int_0^a |f(-x_n+\mathrm{i}b(-x_n)+\mathrm{i}\tau)|^p\sqrt{1+b'^2(-x_n)}\mathrm{d}\tau\right]=0.$$

$$\int_0^a |f(x_n+\mathrm{i}b(x_n)+\mathrm{i}\tau)|^p\sqrt{1+b'^2(x_n)}\mathrm{d}\tau+\int_0^a |f(-x_n+\mathrm{i}b(-x_n)+\mathrm{i}\tau)|^p\sqrt{1+b'^2(-x_n)}\mathrm{d}\tau\to 0(n\to+\infty).\tag{3}$$

考虑区域 $\Lambda_{x_n,\varepsilon}=\{x+\mathrm{i}b(x)+\mathrm{i}\tau: x\in\mathbf{R}, |x|<x_n, \varepsilon<\tau<a-\varepsilon\}$，其中 $n\in\mathbf{N}$，$\varepsilon\in(0,a/2)$．固定 $z\in\Omega_a$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\varepsilon_0\in(0,a/2)$，当 $n>N$ 且 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 时，均有 $z\in\Lambda_{x_n,\varepsilon}$．由 Cauchy 积分公式，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Lambda_{x_n,\varepsilon}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-x_n}^{x_n}\frac{f(\xi+\mathrm{i}b(\xi)+\mathrm{i}\varepsilon)(1+\mathrm{i}b'(\xi))}{\xi+\mathrm{i}b(\xi)+\mathrm{i}\varepsilon-z}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^{a-\varepsilon}\frac{f(x_n+\mathrm{i}b(x_n)+\mathrm{i}\tau)}{x_n+\mathrm{i}b(x_n)+\mathrm{i}\tau-z}\mathrm{d}\tau-$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-x_n}^{x_n}\frac{f(\xi+\mathrm{i}b(\xi)+\mathrm{i}(a-\varepsilon))(1+\mathrm{i}b'(\xi))}{\xi+\mathrm{i}b(\xi)+\mathrm{i}(a-\varepsilon)-z}\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^{a-\varepsilon}\frac{f(-x_n+\mathrm{i}b(-x_n)+\mathrm{i}\tau)}{-x_n+\mathrm{i}b(-x_n)+\mathrm{i}\tau-z}\mathrm{d}\tau.\tag{4}$$

对(4)式的各项进行讨论．先令 $n\to\infty$，由于 $|b'(x)|\leqslant M$，利用 Hölder 不等式及(3)式，有

$$\left|\int_\varepsilon^{a-\varepsilon}\frac{f(x_n+\mathrm{i}b(x_n)+\mathrm{i}\tau)}{x_n+\mathrm{i}b(x_n)+\mathrm{i}\tau-z}\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\left(\int_0^a|f(x_n+\mathrm{i}b(x_n)+\mathrm{i}\tau)|^p\mathrm{d}\tau\right)^{1/p}M_1a^{1/q}\to 0,$$

其中 $M_1=1/|\mathrm{Re}\,z-x_n|$，则

$$\int_\varepsilon^{a-\varepsilon}\frac{f(x_n+\mathrm{i}b(x_n)+\mathrm{i}\tau)}{x_n+\mathrm{i}b(x_n)+\mathrm{i}\tau-z}\mathrm{d}\tau\to 0(n\to+\infty).$$

类似地，

$$\int_\varepsilon^{a-\varepsilon}\frac{f(-x_n+\mathrm{i}b(-x_n)+\mathrm{i}\tau)}{-x_n+\mathrm{i}b(-x_n)+\mathrm{i}\tau-z}\mathrm{d}\tau\to 0(n\to+\infty).$$

因此，对(4)式令 $n\to+\infty$，得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi+\mathrm{i}b(\xi)+\mathrm{i}\varepsilon)(1+\mathrm{i}b'(\xi))}{\xi+\mathrm{i}b(\xi)+\mathrm{i}\varepsilon-z}\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi+\mathrm{i}b(\xi)+\mathrm{i}(a-\varepsilon))(1+\mathrm{i}b'(\xi))}{\xi+\mathrm{i}b(\xi)+\mathrm{i}(a-\varepsilon)-z}\mathrm{d}\xi=$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{f(\zeta+\mathrm{i}\varepsilon)}{\zeta+\mathrm{i}\varepsilon-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{f(\zeta+\mathrm{i}(a-\varepsilon))}{\zeta+\mathrm{i}(a-\varepsilon)-z}\mathrm{d}\zeta, z\in\Omega_a.\tag{5}$$

当 $z\notin\Omega_a$ 时，$\forall n\in\mathbf{N}$ $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<a/2)$，均有 $z\notin\Lambda_{x_n,\varepsilon}$．由 Cauchy 定理，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Lambda_{x_n,\varepsilon}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=0.$$

类似上面的讨论，得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{f(\zeta+\mathrm{i}\varepsilon)}{\zeta+\mathrm{i}\varepsilon-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{f(\zeta+\mathrm{i}(a-\varepsilon))}{\zeta+\mathrm{i}(a-\varepsilon)-z}\mathrm{d}\zeta=0.$$

由 $f\in H^p(\Omega_a)$ 知，$f_\tau(\zeta)=f(\zeta+\mathrm{i}\tau)$ 的 L^p 范数关于 τ 一致有界．注意到 $L^p(\Gamma)$ 是可分的 Banach 空间．所以，任取正数列 $\{\tau_k\}$，$\tau_k\downarrow 0$，$k\to+\infty$，$\{f_{\tau_k}\}$ 作为 $L^p(\Gamma)$ 上的有界线性泛函是弱* 列紧的．因此存在 $\{f_{\tau_k}\}$ 的子列 $\{f_{\tau_{k_j}}\}$ 及 $g_1\in L^p(\Gamma)$，使得 $\{f_{\tau_{k_j}}\}$ 弱* 收敛于 g_1，即 $\forall h\in L^p(\Gamma)$，

$$\lim_{j\to+\infty}\int_\Gamma f(\zeta+\mathrm{i}\tau_{k_j})h(\zeta)\mathrm{d}s=\int_\Gamma g_1(\zeta)h(\zeta)\mathrm{d}s.$$

现取

$$h(\zeta)=[1+\mathrm{i}b'(\xi)]/[(\zeta-z)\sqrt{1+b'^2(\xi)}],$$

其中 $\xi=\mathrm{Re}\,\zeta$，则

$$\lim_{j\to+\infty}\int_\Gamma\frac{f(\zeta+\mathrm{i}\tau_{k_j})}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\int_\Gamma\frac{g_1(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.\tag{6}$$

可以证明，当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{f(\zeta+\mathrm{i}\varepsilon)}{\zeta+\mathrm{i}\varepsilon-z}\mathrm{d}\zeta\to\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{g_1(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.\tag{7}$$

事实上，

$$\left|\int_\Gamma\frac{f(\zeta+\mathrm{i}\varepsilon)}{\zeta+\mathrm{i}\varepsilon-z}\mathrm{d}\zeta-\int_\Gamma\frac{g_1(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant\left|\int_\Gamma\frac{f(\zeta+\mathrm{i}\varepsilon)}{\zeta+\mathrm{i}\varepsilon-z}\mathrm{d}\zeta-\int_\Gamma\frac{f(\zeta+\mathrm{i}\varepsilon)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right|+\left|\int_\Gamma\frac{f(\zeta+\mathrm{i}\varepsilon)-g_1(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right|=I_1+I_2.$$

由(6)式知，

$$I_2\to 0, \varepsilon\to 0^+.\tag{8}$$

下面讨论 I_1．由于 $1/(\zeta-z)\in L^p(\Gamma)$，利用 Hölder 不等式，

$$I_1=\left|\int_\Gamma f(\zeta+\mathrm{i}\varepsilon)\cdot\frac{-\mathrm{i}\varepsilon}{(\zeta+\mathrm{i}\varepsilon-z)(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant M_2\varepsilon\left(\int_\Gamma|f(\zeta+\mathrm{i}\varepsilon)|^p\mathrm{d}s\right)^{1/p}\left(\int_\Gamma\frac{\mathrm{d}s}{|\zeta-z|^q}\right)^{1/q}\to 0, \varepsilon\to 0^+.\tag{9}$$

其中 $M_2=\sqrt{1+M^2}/|\mathrm{Im}(z-x-\mathrm{i}b(x))-\varepsilon_0|>0$，$x=\mathrm{Re}\,z$，$M$ 是函数 $b(x)$ 对应的 Lipshitz 常数．

由(8)式和(9)式可推出(7)式．类似地，$\exists g_2(\cdot+\mathrm{i}a)\in L^p(\Gamma)$，当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{f(\zeta+\mathrm{i}(a-\varepsilon))}{\zeta+\mathrm{i}(a-\varepsilon)-z}\mathrm{d}\zeta\to\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{g_2(\zeta+\mathrm{i}a)}{\zeta+\mathrm{i}a-z}\mathrm{d}\zeta.$$

在(5) 式中令 $\varepsilon \to 0^+$,得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g_1(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g_2(\zeta + ia)}{\zeta + ia - z}d\zeta, z \in \Omega_a. \tag{10}$$

同理

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g_1(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g_2(\zeta + ia)}{\zeta + ia - z}d\zeta = 0, z \notin \bar{\Omega}_a.$$

当 $w \in \Gamma, w + z \in \Omega_{\varphi_0} \cap \Omega_a$ 时,两式相减,有

$$f(w + z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{g_1(\zeta)}{\zeta - (w + z)} - \frac{g_1(\zeta)}{\zeta - (w - z)}\right]d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g_2(\zeta + ia) \cdot \left[\frac{1}{\zeta + ia - (w + z)} - \frac{1}{\zeta + ia - (w - z)}\right]d\zeta = \int_\Gamma g_1(\zeta) K_z(\zeta, w)\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g_2(\zeta + ia) \cdot \left[\frac{1}{\zeta + ia - (w + z)} - \frac{1}{\zeta + ia - (w - z)}\right]d\zeta.$$

由定理 2,对几乎所有的 $w \in \Gamma$,

$$\lim_{z\to 0}\int_\Gamma g_1(\zeta) K_z(\zeta, w)\, d\zeta = g_1(w).$$

显然

$$\lim_{\substack{w+z \in \Omega_{\varphi_0}\cap\Omega_a \\ z\to 0}}\int_\Gamma g_2(\zeta + ia) \cdot \left[\frac{1}{\zeta + ia - (w + z)} - \frac{1}{\zeta + ia - (w - z)}\right]d\zeta = 0.$$

所以 f 在 Γ_0 上的非切向极限 $f^*(\zeta) = g_1(\zeta) \in L^p(\Gamma)$ 几乎处处存在. 同理,f 在 Γ_a 上的非切向极限 $f^*(\zeta + ia) = g_2(\zeta + ia) \in L^p(\Gamma)$ 几乎处处存在. 由(10) 式立即得到(1) 式成立. 定理 3 证毕.

3 参考文献

[1] Rosenblum M, Rovnyak J. Topics in Hardy classes and univalent functions [M]. Berlin: Birkhäuser Verlag, 1994.

[2] Duren P L. Theory of H^p spaces [M]. New York: Academic Press, 1970.

[3] 邓冠铁. 复分析 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2010.

[4] 李真,邓冠铁. 带形区域上的 Hardy 空间 [J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2011, 47(6): 558-562.

[5] Calderón A P. Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1977, 74(4): 1324-1327.

[6] Kenig C E. Weighted H^p spaces on Lipschitz domains [J]. American Journal of Mathematics, 1980, 102(1): 129-163.

[7] Coifman R R, Jones P W, Semmes S. Two elementary proofs of the L^2 boundedness of Cauchy integrals on Lipschitz curves [J]. Journal of the American Mathematical Society, 1989, 2(3): 553-564.

[8] David G. Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe [C]. Annales Ccientifiques de l'École Normale Supérieure, 1984, 17(1): 157-189.

[9] Meyer Y, Coifman R. Wavelets: Calderón-Zygmund and multilinear operators [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

The Hardy Space in a Lipshitz Strip Domain

DENG Guantie, WANG Cuiqiao

(School of Mathematical Sciences, Key Laboratory of Mathematics and Complex Systems of Ministry of Education, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: For Hardy space $H^p(\Omega_a)$ $(0 < p < +\infty)$ of the Lipshitz strip domain Ω_a, the completeness, the existence of the nontangential limit f^* of the function $f(z)$ in $H^p(\Omega_a)$ is proved. And it is shown that the function $f(z)$ in $H^p(\Omega_a)$ can be represented by the Cauchy integral of its boundary value f^* of class.

Key words: Lipshitz strip; Hardy space; nontangential limit; Cauchy representation

(责任编辑: 王金莲)