第 41 卷 第 2 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 41 No. 2
2017 年 3 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　Mar. 2017

文章编号:1000-5862(2017)02-0180-04

Laplace-Stieltjes 变换的对数级与对数型

徐洪焱

(景德镇陶瓷大学信息工程学院,江西 景德镇 333403)

摘要:讨论了 Laplace-Stieltjes 变换所定义的整函数的对数级与对数型等问题,得到了关于 Laplace-Stieltjes 变换的对数级、对数型的 2 个等价定理.

关键词:Laplace-Stieltjes 变换;对数级;对数型

中图分类号:O 174.55　　文献标志码:A　　DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.02.13

0 引言

对于 Dirichlet 级数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{\lambda_n s}(a_n\in\mathbf{C},0<\lambda_n\uparrow+\infty,$$
$$s=\sigma+\mathrm{i}t,\sigma,t\in\mathbf{R})$$

的增长性与值分布的研究一直非常活跃,国内外许多学者在此方面获得了许多有意义的结果[1-7].如:余家荣得到了关于最大模、最大项与最大项指标的一些关系定理;孙道椿等讨论了 Dirichlet 级数所表示的整函数与解析函数的有限级、无穷级等;孔荫莹等研究了 Dirichlet 级数的 Hadamard 乘积的增长性等;徐洪焱等讨论了 Dirichlet 级数的逼近等问题.

Dirichlet 级数与 Laplace-Stieltjes 变换(以下简称 L-S 变换)有着非常密切的联系.近年来,对 L-S 变换的增长性也有许多的研究成果[8-18].考虑如下形式的 L-S 变换

$$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{sx}\mathrm{d}\alpha(x),\tag{1}$$

其中 $s=\sigma+\mathrm{i}t$,σ,t 是实变数,$\alpha(x)$ 是对于有定义的实数值或复数值函数,且在任何区间 $[0,x](0<x<\infty)$ 上是囿变的.文献[14]讨论了 L-S 变换(1)的增长性,得到它的型与级的估计定理.本文将继续讨论(1)的对数级与对数型等问题,在介绍结果前,先给出一些记号及定义.

令

$$A_n^*=\sup_{\lambda_n<x\leqslant\lambda_{n+1},-\infty<t<+\infty}\left|\int_{\lambda_n}^{x}e^{\mathrm{i}ty}\mathrm{d}\alpha(y)\right|,$$

其中序列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n\uparrow+\infty\tag{2}$$

若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=h<+\infty,\overline{\lim_{n\to\infty}}(\log n)/\lambda_n=D<+\infty,\tag{3}$$

且

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}(\log A_n^*)/\lambda_n=-\infty,\tag{4}$$

则由文献[8]知 $F(s)$ 的一致收敛横坐标 $\sigma_u^F=-\infty$,即 $F(s)$ 在全平面内收敛,为整函数.

令

$$M_u(\sigma,F)=\sup_{0<x<+\infty,-\infty<t<+\infty}\left|\int_0^x e^{(\sigma+\mathrm{i}t)y}\mathrm{d}\alpha(y)\right|,$$
$$\mu(\sigma,F)=\max_{1\leqslant n<+\infty}A_n^*e^{\lambda_n\sigma},$$
$$n(\sigma)=\max_k\{k\mid\mu(\sigma,F)=A_k^*e^{\lambda_k\sigma}\}.$$

定义 1　如果变换(1)满足 $\sigma_u^F=-\infty$,即序列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足(2)~(4)式,令

$$\tau_u=\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{\log^+\log^+M_u(\sigma,F)}{\sigma},$$

若 $\tau_u=0$,则称 $F(s)$ 为零级 Laplace-Stietjes 变换.

定义 2　设变换(1)满足(2)~(4)式且 $\tau_u=0$,则定义 $F(s)$ 的对数级 ρ 为

$$\rho=\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{\log^+\log^+M_u(\sigma,F)}{\log\sigma}.$$

注 1　由定义 1 和定义 2 可知 $1\leqslant\rho\leqslant\infty$

本文得到了 $F(s)$ 的对数级 ρ 与其 $\mu(\sigma,F)$ 以及 λ_n 的如下几个关系定理.

定理 1　设变换(1)满足(2)~(4)式且 $\tau_u=0$,若变换(1)的对数级为 $\rho(1\leqslant\rho\leqslant+\infty)$,则

$$\rho=\limsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\log^+\log^+\mu(\sigma,F)}{\log\sigma},$$

且若 $0\leqslant\gamma<1$ 时,有

收稿日期:2016-12-05

基金项目:国家自然科学基金(11561033),江西省自然科学基金(20151BAB201008)和江西省教育厅科技(GJJ150902,GJJ150918)资助项目.

作者简介:徐洪焱(1980-),男,江西乐平人,副教授,主要从事复分析理论及应用研究.E-mail:xhyhhh@126.com

$$\rho = 1/(1-\gamma), \tag{5}$$

其中

$$\gamma = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log \lambda_n}{\log \log(1/A_n^*)}.$$

定义 3　设变换(1)满足(2)~(4)式且 $\tau_u = 0$ 及 $1 \leqslant \rho < \infty$,则定义 $F(s)$ 的对数型 χ 为

$$\chi = \limsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\log^+ M_u(\sigma,F)}{\sigma^\rho}.$$

注 2　当 $\rho = 1$ 时,很容易得到 $\chi = \infty$

同时,还得到了如下关于对数型 χ 的结果.

定理 2　设变换(1)满足(2)~(4)式且 $\tau_u = 0$ 及 $1 < \rho < \infty$,则 $F(s)$ 的对数型 χ 满足

$$\chi = (\rho-1)^{\rho-1}\rho^{-\rho}L(\rho),$$

其中

$$L(\rho) = \limsup_{n\to+\infty} \log\frac{1}{A_n^*}\left(\frac{1}{\lambda_n}\log\frac{1}{A_n^*}\right)^{-\rho}.$$

1　定理的证明

定理 1 的证明　类似于文献[8]容易得到对 $\sigma > 0$ 有 $\mu(\sigma,F)/2 \leqslant M_u(\sigma,F)$,即

$$\limsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\log^+\log^+\mu(\sigma,F)}{\log\sigma} \leqslant \limsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\log^+\log^+ M_u(\sigma,F)}{\log\sigma}. \tag{6}$$

此外,令

$$I_m(x;\mathrm{i}t) = \int_{\lambda_m}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ty}\mathrm{d}\alpha(y)\ (\lambda_m < x \leqslant \lambda_{m+1}).$$

由 A_n^* 的定义知,有

$$|I_m(x;\mathrm{i}t)| \leqslant A_m^* \leqslant \mu(\sigma,F)\exp(-\lambda_m\sigma).$$

由(3)式知,$\forall \varepsilon > 0$,存在一常数 $\eta > 1/(D+\varepsilon)$ 及 $N_1 \in \mathbf{N}_+$,使得当 $m > N_1$ 时,有 $\lambda_m > \eta\log m$ 或 $\exp(-\lambda_m) < m^{-\eta}$. 又由(4)式,$\exists N_2 \in \mathbf{N}_+$,当 $m > N_2$ 时,有 $\lambda_{m+1} < (1+\varepsilon)\lambda_m$. 于是对 $\sigma \geqslant p/(\varepsilon\eta)$,$p > 1$ 及 $m > \max\{N_1,N_2\}$,有

$$\left|\int_0^x \mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}t)y}\mathrm{d}\alpha(y)\right| = \left|\sum_{m=1}^{n-1}\int_{\lambda_m}^{\lambda_{m+1}} \mathrm{e}^{\sigma y}\mathrm{d}_y I_m(y;\mathrm{i}t) + \int_{\lambda_n}^{x} \mathrm{e}^{\sigma y}\mathrm{d}_y I_n(y;\mathrm{i}t)\right| =$$

$$\left|\sum_{m=1}^{n-1}\left[\mathrm{e}^{\sigma\lambda_{m+1}}I_m(\lambda_{m+1};\mathrm{i}t) - \sigma\int_{\lambda_m}^{\lambda_{m+1}}\mathrm{e}^{\sigma y}I_m(y;\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}y\right] + \mathrm{e}^{\sigma x}I_n(x;\mathrm{i}t) - \sigma\int_{\lambda_n}^{x}\mathrm{e}^{\sigma y}I_n(y;\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}y\right|.$$

于是

$$\left|\int_0^x \mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}t)y}\mathrm{d}\alpha(y)\right| \leqslant \sum_{m=1}^{n-1}\left[A_m^*\mathrm{e}^{\lambda_{m+1}\sigma} + A_m^*\mathrm{e}^{\sigma y}\Big|_{\lambda_m}^{\lambda_{m+1}}\right] + 2A_n^*\mathrm{e}^{\sigma\lambda_{n+1}} - A_n^*\mathrm{e}^{\sigma\lambda_n} \leqslant 2\sum_{m=1}^{+\infty}A_m^*\mathrm{e}^{\lambda_{m+1}\sigma} \leqslant 2\sum_{m=1}^{N}A_m^*\mathrm{e}^{\lambda_{m+1}\sigma} +$$

$$2\sum_{m=N+1}^{+\infty}\mu((1+2\varepsilon)\sigma,F)\,\mathrm{e}^{-(1+2\varepsilon)\lambda_m\sigma}\mathrm{e}^{\lambda_{m+1}\sigma} \leqslant$$

$$K\mu(\sigma,F) + 2\mu((1+2\varepsilon)\sigma,F)\sum_{m=N+1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_m\varepsilon\sigma} \leqslant$$

$$K\mu(\sigma,F) + 2\mu((1+2\varepsilon)\sigma,F)\sum_{m=N+1}^{+\infty}\frac{1}{m^p},$$

其中 K 为一正常数. 因为 $p > 1$,于是

$$M_u(\sigma,F) \leqslant K'\mu((1+2\varepsilon)\sigma,F),$$

则

$$\limsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\log^+\log^+ M_u(\sigma,F)}{\log\sigma} \leqslant$$

$$\limsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\log^+\log^+ K\mu((1+2\varepsilon)\sigma,F)}{\log(1+2\varepsilon)\sigma}\cdot$$

$$\limsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\log(1+2\varepsilon)\sigma}{\log\sigma} =$$

$$\limsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\log^+\log^+\mu(\sigma,F)}{\log\sigma}. \tag{7}$$

由(6)~(7)式可得

$$\rho = \limsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\log^+\log^+ M_u(\sigma,F)}{\log\sigma} = \limsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\log^+\log^+\mu(\sigma,F)}{\log\sigma}.$$

接下来证明(5)式. 当 $\gamma > 0$ 时,先证

$$\rho \geqslant 1/(1-\gamma). \tag{8}$$

由 γ 的定义知,$\forall\varepsilon(0 < \varepsilon < \min\{\gamma,1-\gamma\})$,存在一子列 $\{\lambda_{n_k}\}$ 满足 $\lambda_{n_k}\to\infty(k\to\infty)$,使得

$$\gamma - \varepsilon \leqslant \log\lambda_{n_k}/\log\log(A_{n_k}^*)^{-1},$$

即

$$\log A_{n_k}^* \geqslant -(\lambda_{n_k})^{1/(\gamma-\varepsilon)},\ k = 1,2,\cdots. \tag{9}$$

于是由(9)式有

$$\log^+ M_u(\sigma,F) \geqslant \log A_{n_k}^* + \lambda_{n_k}\sigma - \log 2,\ k = 1,2,\cdots. \tag{10}$$

取 $\sigma_k = (\lambda_{n_k})^{(1-\gamma+\varepsilon)/(\gamma-\varepsilon)}/(\gamma-\varepsilon)$,由(10)式得

$$\log^+ M_u(\sigma_k,F) \geqslant \frac{1-\gamma+\varepsilon}{\gamma-\varepsilon}[(\gamma-\varepsilon)\sigma_k]^{1/(1-\gamma+\varepsilon)} - \log 2. \tag{11}$$

由(11)式有

$$\rho + o(1) \geqslant \frac{\log^+\log^+ M_u(\sigma_k,F)}{\log\sigma_k} \geqslant \frac{1}{1-\gamma+\varepsilon}(1+o(1)),\ k\to+\infty$$

由上式及 ε 的任意性可证得(8)式.

接下来证明

$$\rho \leqslant 1/(1-\gamma). \tag{12}$$

$\forall\varepsilon(0 < \varepsilon < \min\{\gamma,1-\gamma\})$,由 γ 的定义知,$\exists n_0$,当 $n > n_0$ 时,有

$$\gamma + \varepsilon \geqslant \log\lambda_n/\log\log(A_n^*)^{-1},$$

即

$$\log A_n^* \leqslant -(\lambda_n)^{1/(\gamma+\varepsilon)},\ n > n_0. \tag{13}$$

由(3)式知,存在一常数 $\eta > 0$,使得 $\lambda_n > \eta\log n$

或 $\exp\{-\lambda_n\} < n^{-\eta}$. 又由(4)式知,有 $\lambda_{n+1} \leqslant (1+\varepsilon)\lambda_n$,对所有的 $n \in \mathbf{N}_+$. 另一方面,当 σ 充分大时,$\exists N > n_0$,使得 $\lambda_{N+1} \leqslant [(1+\varepsilon)\sigma + p/\eta]^{\frac{\gamma+\varepsilon}{1-\gamma-\varepsilon}} \leqslant \lambda_{N+2}$. 由第一部分的证明得

$$M_u(\sigma,F) \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^* \mathrm{e}^{\lambda_{n+1}\sigma} \leqslant 2\Big(\sum_{n=1}^{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{N} + \sum_{n=N+1}^{+\infty}\Big) A_n^* \mathrm{e}^{\lambda_{n+1}\sigma} = I_0 + I_1 + I_2, \quad (14)$$

其中 I_0 为有界量,以及

$$\{I_1 \leqslant 2\mathrm{e}^{\lambda_{N+1}\sigma} \sum_{n=n_0+1}^{N} A_n^* \leqslant 2\exp\{\sigma[(1+\varepsilon)\sigma + p/\eta]^{(\gamma+\varepsilon)/(1-\gamma-\varepsilon)}\}\sum_{n=n_0+1}^{N} \exp\{-\lambda_n^{1/(\gamma+\varepsilon)}\},$$

因为 $\lambda_n > 0$ 及 $\gamma + \varepsilon > 0$,则由上式可得

$$I_1 \leqslant K_2 \exp\{\sigma[(1+\varepsilon)\sigma + p/\eta]^{(\gamma+\varepsilon)/(1-\gamma-\varepsilon)}\}, \quad (15)$$

这里 K_2 为有界常数;另外,记 $\lambda_n > [(1+\varepsilon)\sigma + p/\eta]^{(\gamma+\varepsilon)/(1-\gamma-\varepsilon)}$ $(n \geqslant N+2)$,则由(13)式有

$$I_2 \leqslant 2A_{N+1}^* \mathrm{e}^{\lambda_{N+2}\sigma} + 2\sum_{n=N+2}^{+\infty} \exp\{-\lambda_n^{1/(\gamma+\varepsilon)}\} \cdot \exp\{\lambda_{n+1}\sigma\} \leqslant K_3 \exp\{(1+\varepsilon)\lambda_{N+1}\sigma\} + 2\sum_{n=N+2}^{+\infty} \exp\{-\lambda_n[(1+\varepsilon)\sigma + p/\eta]\}\exp\{\lambda_{n+1}\sigma\} \leqslant$$
$$K_3 \exp\{(1+\varepsilon)\sigma[(1+\varepsilon)\sigma + p/\eta]^{(\gamma+\varepsilon)/(1-\gamma-\varepsilon)}\} + 2\sum_{n=N+1}^{+\infty} \exp\{(\lambda_{n+1} - (1+\varepsilon)\lambda_n)\sigma - \lambda_n p/\eta\} \leqslant$$
$$K_3 \exp\{(1+\varepsilon)\sigma[(1+\varepsilon)\sigma + p/\eta]^{(\gamma+\varepsilon)/(1-\gamma-\varepsilon)}\} + 2\sum_{n=N+1}^{+\infty} \exp\{-\lambda_n p/\eta\} \leqslant K_4 \exp\{(1+\varepsilon)\sigma \cdot [(1+\varepsilon)\sigma + p/\eta]^{(\gamma+\varepsilon)/(1-\gamma-\varepsilon)}\} + 2\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (16)$$

这里 K_3,K_4 为常数及 $p > 1$. 于是由(14)~(16)式可得

$$M_u(\sigma,F) \leqslant K_5 \exp\{(1+\varepsilon)\sigma[(1+\varepsilon)\sigma + p/\eta]^{(\gamma+\varepsilon)/(1-\gamma-\varepsilon)}\}, \quad (17)$$

这里 K_5 为常数. 由(17)式及 ε 的任意性容易得到(12)式.

对 $\gamma = 0$ 类似可证. 至此,定理 1 证毕.

定理 2 的证明 令 $\vartheta = (\rho-1)^{\rho-1}\rho^{-\rho}L(\rho)$,则

$$\vartheta = (\rho-1)^{\rho-1}\rho^{-\rho} \limsup_{n\to+\infty} \log\frac{1}{A_n^*}\left(\frac{1}{\lambda_n}\log\frac{1}{A_n^*}\right)^{-\rho} = \limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{\lambda_n}{\rho}\right)^{\rho}\left(\frac{\rho-1}{\lambda_n^{-1}\log(A_n^*)^{-1}}\right)^{\rho-1}.$$

先证明 $\chi \geqslant \vartheta$. 以下只证 $\chi < +\infty$ 的情形,对 $\chi = +\infty$ 的情形类似可证之. 由对数型 χ 的定义可知,对于任意给定的 $T > \chi$,$\exists \sigma_0 > 0$,使得对 $\sigma > \sigma_0$,有

$$M_u(\sigma,F) \leqslant \exp\{T\sigma^\rho\}.$$

再由 $\mu(\sigma,F)/2 \leqslant M_u(\sigma,F)$ 得到

$$A_n^* \leqslant \exp\{T\sigma^\rho - \lambda_n\sigma\}. \quad (18)$$

取 $\sigma_n = (\lambda_n/(\rho T))^{1/(\rho-1)}$,由(18)式得

$$A_n^* \leqslant \exp 2\{T(\lambda_n/(\rho T))^{\rho/(\rho-1)}(1-\rho)\},$$

即

$$(\log(A_n^*)^{-1})^{\rho-1} \geqslant T^{-1}(\lambda_n/\rho)^\rho(\rho-1)^{\rho-1},$$

对 $\sigma_n > \sigma_0$. 由上式容易得到 $\chi \geqslant \vartheta$.

假设等号不成立,即 $\exists T'$,使得 $\chi > T' > \vartheta$,则 $\exists N_3 \in \mathbf{N}_+$,使得当 $n > N_3$ 时,有

$$T' \geqslant \left(\frac{\lambda_n}{\rho}\right)^\rho\left(\frac{\rho-1}{\lambda_n^{-1}\log(A_n^*)^{-1}}\right)^{\rho-1},$$

即

$$A_n^* \leqslant \exp\{-(\rho-1)(\lambda_n/\rho)^{\rho/(\rho-1)}T'^{-1/(\rho-1)}\}, n > N_3.$$

由(3)式知,存在一常数 $\eta > 0$,使得 $\lambda_n > \eta\log n$ 或 $\exp\{-\lambda_n\} < n^{-\eta}$. 又由(4)式,有 $\lambda_{n+1} \leqslant (1+\varepsilon)\lambda_n$,对所有的 $n \in \mathbf{N}_+$. 类似于(14)式有

$$M_u(\sigma,F) \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^* \mathrm{e}^{\lambda_{n+1}\sigma} \leqslant 2\left(\sum_{n=1}^{N_3} + \sum_{n=N_3+1}^{N_4} + \sum_{n=N_4+1}^{+\infty}\right)A_n^* \mathrm{e}^{\lambda_{n+1}\sigma} = J_0 + J_1 + J_2, \quad (19)$$

其中 J_0 为有界量,且

$$I_1 \leqslant 2\sum_{n=N_3+1}^{N_4} A_n^* \mathrm{e}^{\lambda_{n+1}\sigma} \leqslant 2N_4 \exp\{-(\rho-1)(\lambda_n/\rho)^{\rho/(\rho-1)}T'^{-1/(\rho-1)} + (1+\varepsilon)\lambda_n\sigma\}.$$

取 $\sigma = (1+\varepsilon)^{-1}(\lambda_n/(\rho T'))^{1/(\rho-1)}$,代入上式可得

$$I_1 \leqslant K_6 \exp\{T'\sigma^\rho\}, \quad (20)$$

其中 K_6 为一常数;另外,记

$$\lambda_n > \rho T'\left[\frac{\rho}{\rho-1}\left((1+\varepsilon)\sigma + \frac{p}{\eta}\right)\right]^{\rho-1} (n \geqslant N_4 + 1),$$

则

$$J_2 \leqslant 2\sum_{n=N_4+1}^{+\infty} \exp\{-(\rho-1)(\lambda_n/\rho)^{\rho/(\rho-1)}T'^{-1/(\rho-1)}\} \cdot \exp\{\lambda_{n+1}\sigma\} \leqslant 2\sum_{n=N_4+1}^{+\infty} \exp\{(\lambda_{n+1} - (1+\varepsilon)\lambda_n)\sigma - \lambda_n p/\eta\} \leqslant 2\sum_{n=N_4+1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}. \quad (21)$$

由(19)~(21)式及 $p > 1$,对充分大的 σ 有

$$\log M_u(\sigma,F)/\sigma^\rho \leqslant T'(1+o(1)).$$

由上式可得 $\chi \leqslant T'$,矛盾,故 $\chi = \vartheta$,即定理 2 得证.

2 参考文献

[1] 余家荣,丁晓庆,田范基. Dirichlet 级数与随机 Dirichlet 级数的值分布[M]. 武汉:武汉大学出版社,2004.

[2] 高宗升. Dirichlet 级数表示的整函数的增长性[J]. 数学学报,1999,42(4):741-748.

[3] 孙道椿,高宗升. 半平面上 Dirichlet 级数的增长级[J]. 数学物理学报,2002,22(4):557-563.
[4] 孙道椿,陈特为. 无限级 Dirichlet 级数[J]. 数学学报,2001,44(2):259-268.
[5] 孔荫莹. Dirichlet-Hadamard 乘积的 q-级与 q-型[J]. 数学学报,2009,52(6):1165-1172.
[6] 孔荫莹,邓冠铁. Dirichlet 级数的 Dirichlet-Hadamard 乘积[J]. 数学年刊,2014,35(2):145-152.
[7] 徐洪焱,易才凤. 半平面上有限级 Dirichlet 级数的逼近[J]. 数学学报,2010,53(3):617-624.
[8] 余家荣. Laplace-Stieltjes 变换所定义的整函数之 Borel 线[J]. 数学学报,1963,13(3):471-489.
[9] 尚丽娜,高宗升. Laplace-Stieltjes 变换所表示的解析函数的值分布[J]. 数学学报,2008,51A(5):993-1000.
[10] Kong Yinying, Sun Daochun. On type-function and the growth of Laplace-Stieltjes transformations convergent in the right half-plane[J]. 数学进展,2007,37(2):197-205.
[11] Kong Yinying, Sun Daochun. On the growth of zero order Laplace-Stieltjes transform convergent in the right half-plane[J]. Acta Mathematica Scientia, 2008, 28B(2):431-440.
[12] 孔荫莹,霍颖莹. 右半平面解析的 Laplace-Stieltjes 变换的广义级与型[J]. 数学学报,2016,59(1):91-98.
[13] 孔荫莹. 平面上解析的无穷级 Laplace-Stieltjes 变换[J]. 数学学报,2013,56A(1):53-60.
[14] 罗茜,孔荫莹. 全平面上慢增长的 Laplace-Stieltjes 变换的级与型[J]. 数学物理学报,2012,32A(3):601-607.
[15] Zhang Hongshen, Sun Daochun. The value distribution of Laplace-Stieltjes transforms in the right half plane[J]. Acta Math Sinica, 2012, 55A(3):535-542.
[16] Xu Hongyan, Yi Caifeng, Cao Tingbin. On proximate order and type functions of Laplace-Stieltjes transformations convergent in the right half-plane[J]. Math Commun, 2012, 17(2):355-369.
[17] Xu Hongyan, Xuan Zuxing. The singular points of analytic functions with finite X-Order defined by Laplace-Stieltjes transformations[J]. Journal of Function Spaces 2015, 2015:1-9.
[18] Xu Hongyan, Xuan Zuxing. The growth and value distribution of Laplace-Stieltjes transformations with infinite order in the right half-plane[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2013(1):1-15.

The Logarithmic Order and Logarithmic Type of Laplace-Stieltjes Transform

XU Hongyan
(Department of Informatics and Engineering, Jingdezhen Ceramic Institute, Jingdezhen Jiangxi 333403, China)

Abstract: The purpose of this paper is to study the growth of entire functions represented by Laplace-Stieltjes transform with zero order, and two theorems about logarithmic order, logarithmic type, the maximal term of Laplace-Stieltjes transform are obtained.

Key words: Laplace-Stieltjes transform; logarithmic order; logarithmic type

(责任编辑: 王金莲)