第 41 卷 第 2 期
2017 年 3 月

江西师范大学学报(自然科学版)
Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)

Vol. 41 No. 2
Mar. 2017

文章编号:1000-5862(2017)02-0184-05

一类 2 阶线性微分方程解的增长性

涂鸿强,刘慧芳*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:研究 2 阶微分方程 $f''+A_1(z)f'+A_0(z)f=0$ 解的增长性.假设 $A_1(z)=h_1e^{Q_1(z)}+h_2e^{Q_2(z)}$,其中 $Q_j(j=1,2)$ 为 $n(n\geqslant1)$ 次多项式,$h_j(j=1,2)$ 为级小于 n 的整函数,A_0 为满足下级 $\mu(A_0)\neq n$ 的超越整函数或 A_0 为满足 Denjoy 猜想极值情况的整函数,得到上述方程的每个非零解都具有无穷级,同时对解的超级进行了估计.

关键词:微分方程;整函数;Denjoy 猜想;增长级

中图分类号:O 174.52　　文献标志码:A　　DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.02.14

0 引言及主要结果

本文使用 Nevanlinna 值分布理论的标准记号和基本结果[1-2],并用 $\rho(f)$,$\mu(f)$ 分别表示亚纯函数 f 的级和下级,$\rho_2(f)$ 表示 f 的超级.

考虑 2 阶线性微分方程

$$f''+A_1(z)f'+A_0(z)f=0, \tag{1}$$

其中 $A_1(z)$,$A_0(z)$ 为有限级整函数.由文献[2]知:方程(1)的每 1 个解都是整函数,且当 $A_0(z)$ 为超越整函数时,方程(1)的任意2个线性无关的解中至少有1个为无穷级,因此方程(1)的大多数解都为无穷级.但也有形如(1)的方程具有有穷级解,如:$f(z)=e^{2z}$ 和 $f(z)=e^{-z}$ 分别满足方程 $f''+2e^zf'-(4e^z+4)f=0$ 和 $f''+(e^{2z}+e^z)f'+(e^{2z}+e^z-1)f=0$.一个自然的问题是:当 $A_1(z)$,$A_0(z)$ 满足什么条件时才能保证方程(1)的每个非零解都具有无穷级?

许多学者对上述问题进行了研究[3-11],其中 M. Ozawa[3] 研究了下述类型的方程

$$f''+e^{-z}f'+A_0(z)f=0, \tag{2}$$

证明了当 A_0 为 1 次多项式时,方程(2)的每个非零解都具有无穷级.J. K. Langley[4] 将 M. Ozawa 的结果推广到 $A_0(z)$ 为一般多项式的情形.当 $A_0(z)$ 为超越整函数时,G. G. Gundersen 证明了

定理 A[5]　设 $A_0(z)$ 为超越整函数且 $\rho(A_0)\neq1$,则方程(2)的每个非零解 f 都具有无穷级.

定理 B[6]　设 $Q(z)$ 为 $n(n\geqslant1)$ 次多项式,$h(\neq0)$ 为级小于 n 的整函数,$A_0(z)$ 为超越整函数且 $\rho(A_0)\neq n$,则方程

$$f''+h(z)e^{Q(z)}f'+A_0(z)f=0 \tag{3}$$

的每个非零解 f 都具有无穷级.

本文继续研究方程(1)解的增长性,考虑 $A_1(z)=h_1e^{Q_1(z)}+h_2e^{Q_2(z)}$ 的情形,得到

定理 1　设 $A_1(z)=h_1e^{Q_1(z)}+h_2e^{Q_2(z)}(\neq0)$,其中 $Q_j(z)=b_{jn}z^n+\cdots+b_{j0}$,$j=1,2$ 为 $n(n\geqslant1)$ 次多项式满足 $b_{2n}/b_{1n}>0$,h_j,$j=1,2$ 为级小于 n 的整函数,$A_0(z)$ 为超越整函数.若 $\mu(A_0)\neq n$,则方程(1)的每个非零解 f 满足

$$\rho(f)=\infty,\mu(A_0)\leqslant\rho_2(f)\leqslant\max\{\rho(A_0),n\}.$$

由定理 1 的证明方法可得

推论 1　设 $Q(z)$ 为 $n(n\geqslant1)$ 次多项式,$h(\neq0)$ 为级小于 n 的整函数,$A_0(z)$ 为超越整函数.若 $\mu(A_0)\neq n$,则方程(3)的每个非零解 f 满足 $\rho(f)=\infty$,$\mu(A_0)\leqslant\rho_2(f)\leqslant\max\{\rho(A_0),n\}$.

当 $\rho(A_0)=n$ 或 $\mu(A_0)=n$ 时,由前面的例子知定理 B 和定理 1 可能不成立,则当 $\rho(A_1)=\rho(A_0)$ 时,方程(1)的系数还应满足什么条件才能保证其每个非零解都具有无穷级?文献[7]考虑了系数的零点收敛指数小于其增长级的情形,得到

定理 C　设 $h_j(\neq0)(j=0,1)$ 为级小于1的整函数,a,b 为非零复常数满足 $a\neq b$,则方程 $f''+h_1e^{az}f'+h_0e^{bz}f=0$ 的每个非零解 f 都具有无穷级.

文献[9]运用整函数的渐近值理论研究了方程(1)解的增长性,得到

收稿日期:2016-10-10

基金项目:国家自然科学基金(11661044)资助项目.

通信作者:刘慧芳(1973-),女,江西丰城人,教授,博士,主要从事复分析研究.E-mail:liuhuifang73@sina.com

定理 D　假设 $A_1(z)$ 是方程 $\omega''+P(z)\omega=0$ 的非零解，其中 $P(z)$ 为非常数多项式，$A_0(z)$ 为满足 Denjoy 猜想极值情况的整函数. 若 $\rho(A_1)\neq\rho(A_0)$，则方程(1) 的每个非零解 f 都具有无穷级.

Denjoy 猜想　如果 $\rho(<\infty)$ 级整函数 f 具有 k 个判别的有穷渐近值，则 $k\leqslant 2\rho$.

该猜想是 A. Denjoy 于 1907 年提出，1930 年被 L. V. Ahlfors 证明[12]. 设 $\rho(<\infty)$ 级整函数 f 具有 $k(\geqslant 1)$ 个判别的有穷渐近值，若 $k=2\rho$，则称 f 为满足 Denjoy 猜想极值情况的整函数.

受定理 D 的启发，得到

定理 2　设 $A_1(z)=h_1(z)e^{Q_1(z)}+h_2(z)e^{Q_2(z)}(\neq 0)$，$Q_j(z)=b_{jn}z^n+\cdots+b_{j0}(j=1,2)$ 为 $n(n\geqslant 1)$ 次多项式，$h_j(z)(j=1,2)$ 为级小于 n 的整函数，$A_0(z)$ 为满足 Denjoy 猜想极值情况的整函数. 若 $b_{2n}/b_{1n}\neq$ 实数或 $b_{2n}/b_{1n}>0$，则方程(1) 的每个非零解 f 满足

$$\rho(f)=\infty,\rho(A_0)\leqslant\rho_2(f)\leqslant\max\{\rho(A_0),n\}.$$

由定理 2 的证明方法可得

推论 2　设 $Q(z)$ 为 $n(n\geqslant 1)$ 次多项式，$h(z)(\neq 0)$ 为级小于 n 的整函数，$A_0(z)$ 为满足 Denjoy 猜想极值情况的整函数，则方程(3) 的每个非零解 f 满足

$$\rho(f)=\infty,\rho(A_0)\leqslant\rho_2(f)\leqslant\max\{\rho(A_0),n\}.$$

下面的例子表明存在满足 Denjoy 猜想极值情况的整函数.

例 1[12]　设

$$f(z)=\int_0^z\frac{\sin t^q}{t^q}dt,$$

其中 q 为正整数，则有 $\rho(f)=q$，且 f 有 $2q$ 个不同的有限渐近值

$$a_l=\exp\{l\pi i/q\}\int_0^\infty\frac{\sin r^q}{r^q}dr,l=1,2,\cdots,2q.$$

注 1　由例 1 知定理 2 可能出现 $\rho(A_1)=\rho(A_0)$ 情形，且由于例 1 中的函数 f 满足 $\lambda(f)=\rho(f)$，故定理 2 是定理 C 的补充.

1　引理

引理 1[13]　设 $f(z)$ 是开平面上的超越亚纯函数，$\Gamma=\{(k_1,j_1),(k_2,j_2)\cdots,(k_m,j_m)\}$ 是由不同整数对组成的有限集，满足 $k_i>j_i\geqslant 0(i=1,\cdots,m)$，又设 $\alpha>1$ 是给定的实常数及 $\varepsilon>0$ 为任意给定的正数，则

(i) 存在线测度为 0 的集合 $E_1\subset[0,2\pi)$ 和仅依赖于 α 和 Γ 的常数 $B>0$，使得若 $\varphi_0\in[0,2\pi)\backslash E_1$，则存在常数 $R_0=R_0(\varphi_0)>1$，对满足 $\arg z=\varphi_0$ 及 $|z|=r\geqslant R_0$ 的所有 z 及所有 $(k,j)\in\Gamma$，都有

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\leqslant B\left(\frac{T(\alpha r,f)}{r}\log^\alpha r\cdot\log T(\alpha r,f)\right)^{k-j}.\quad(4)$$

特别地，如果 $f(z)$ 的级 $\rho(f)<\infty$，则

$$|f^{(k)}(z)/f^{(j)}(z)|\leqslant|z|^{(k-j)(\rho(f)-1+\varepsilon)};\quad(5)$$

(ii) 存在对数测度有限的集合 $E_2\subset(1,\infty)$ 和仅依赖于 α 和 Γ 的常数 $B>0$，使得对满足 $|z|=r\notin E_2\cup[0,1]$ 的所有 z 及所有 $(k,j)\in\Gamma$，(4) 式成立. 特别地，如果 $f(z)$ 的级 $\rho(f)<\infty$，则(5) 式成立.

引理 2[7]　设 $Q(z)=(\alpha+i\beta)z^m+\cdots$ 为 $m(\geqslant 1)$ 次多项式，$h(z)(\neq 0)$ 为整函数且 $\rho(h)<m$. 令 $g(z)=h(z)e^{Q(z)}$，$z=re^{i\theta}$，$\delta(Q,\theta)=\alpha\cos(m\theta)-\beta\sin(m\theta)$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在线测度为 0 的集合 $E_1\subseteq[0,2\pi)$，使得当 $\theta\in[0,2\pi)\backslash(E_1\cup E_2)$ 且 $|z|=r$ 充分大时，有

(i) 若 $\delta(Q,\theta)>0$，则 $\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q,\theta)r^m\}\leqslant|g(z)|\leqslant\exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q,\theta)r^m\}$；

(ii) 若 $\delta(Q,\theta)<0$，则 $\exp\{(1+\varepsilon)\delta(Q,\theta)r^m\}\leqslant|g(z)|\leqslant\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q,\theta)r^m\}$，

其中 $E_2=\{\theta\in[0,2\pi):\delta(Q,\theta)=0\}$.

引理 3[14]　设 $f(z)$ 为整函数满足 $0\leqslant\mu(f)<1/2$，记 $m(r)=\inf_{|z|=r}\log|f(z)|$，$M(r)=\sup_{|z|=r}\log|f(z)|$. 如果 $\mu(f)<\alpha<1/2$，则

$$\overline{\log d_{ens}}\{r\in[1,\infty):m(r)>M(r)\cos(\alpha\pi)\}\geqslant 1-\mu(f)/\alpha.$$

引理 4[9]　设 $f(z)$ 为整函数满足 $1/2\leqslant\mu(f)<\infty$，则存在区域 $S(\alpha,\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}$，满足 $\beta-\alpha\geqslant\pi/\mu(f)$，且对所有 $\theta\in(\alpha,\beta)$，有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log|f(re^{i\theta})|}{\log r}\geqslant\mu(f),$$

其中 $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi$.

引理 5[15]　设 $A_j(j=0,\cdots,k-1)$ 为有限级整函数，则方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=0$$

的任意非零解 f 满足 $\rho_2(f)\leqslant\max\{\rho(A_j):j=0,1,\cdots,k-1\}$.

引理 6　设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 为整函数，满足

$$\max\{\rho(A_j):j=1,2,\cdots,k-1\}<\mu(A_0)<\infty,$$

则方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=0$$

的任意超越整函数解 f 满足 $\rho(f)=\infty$ 和 $\rho_2(f)\geqslant\mu(A_0)$.

证　由引理 1，存在对数测度有限的集合 $E_1\subset$

$(1,\infty)$ 和常数 $B>0$,使得对所有满足 $|z|=r\notin E_1\cup[0,1]$ 的点 z,有

$$|f^{(j)}(z)/f(z)|\leqslant B(T(2r,f))^{2k}(j=1,\cdots,k).\quad(6)$$

另一方面,取实数 a,b 满足 $\max\{\rho(A_j):j=1,2,\cdots,k-1\}<a<b<\mu(A_0)$,由级的定义,$\exists R>1$,使得当 $|z|=r>R$ 时,有

$$M(r,A_0)\geqslant\exp\{r^b\},$$

$$|A_j(z)|\leqslant\exp\{r^a\}(j=1,2,\cdots,k-1).\quad(7)$$

由(6)~(7)式得:对满足 $|z_r|=r\notin E_1\cup[0,R]$ 和 $|A_0(re^{i\theta_r})|=M(r,A_0)$ 的点 $z_r=re^{i\theta_r}$,有

$$\exp\{r^b\}\leqslant|A_0(re^{i\theta_r})|\leqslant d(T(2r,f))^{2k}\exp\{r^a\},\quad(8)$$

其中 $d>0$ 为常数.再由(8)式得 $\rho(f)=\infty$ 和 $\rho_2(f)\geqslant\mu(A_0)$.引理 6 得证.

引理 7 设 $Q_j(z)=b_{jn}z^n+\cdots+b_{j0}(j=1,2)$ 为 $n(\geqslant1)$ 次多项式,其中 $b_{jn},\cdots,b_{j0}$ 为复常数,令 $z=re^{i\theta}$,$\delta(Q_j,\theta)=|b_{jn}|\cos(\varphi_j+n\theta)$,其中 $\varphi_j=\arg b_{jn}\in[0,2\pi)$.若 $b_{2n}/b_{1n}\neq$ 实数或 $b_{2n}/b_{1n}>0$,则存在实数 $\theta_1,\theta_2(\theta_1<\theta_2)$,使得对每一个 $\theta\in(\theta_1,\theta_2)$,有 $\delta(Q_1,\theta)<0$ 和 $\delta(Q_2,\theta)<0$.

证 令

$$\theta_{jk}=(2k-1)\frac{\pi}{2n}-\frac{\varphi_j}{n}(k=0,1,\cdots,2n-1,$$

$$\theta_{j(2n)}=\theta_{j0}+2\pi,j=1,2),$$

则对 $j=1,2$,有

(i) $\delta(Q_j,\theta_{jk})=0$ 且 $\theta_{j(k+1)}-\theta_{jk}=\pi/n$;

(ii) 当 $\theta\in(\theta_{jk},\theta_{j(k+1)})$ 且 k 为偶数时,$\delta(Q_j,\theta)>0$;当 $\theta\in(\theta_{jk},\theta_{j(k+1)})$ 且 k 为奇数时,$\delta(Q_j,\theta)<0$.

若 $b_{2n}/b_{1n}>0$,则由 $\delta(Q_2,\theta)/\delta(Q_1,\theta)=|b_{2n}|/|b_{1n}|$ 知结论显然成立.

若 $b_{2n}/b_{1n}\neq$ 实数,则 $\varphi_1\neq\varphi_2$ 且 $|\varphi_1-\varphi_2|\neq\pi$.不妨设 $\varphi_1>\varphi_2$,由于对每一个 $k\in\{0,1,\cdots,2n-1\}$,有 $\theta_{2k}-\theta_{1k}=(\varphi_1-\varphi_2)/n$,故当 $0<\varphi_1-\varphi_2<\pi$ 时,由(i)和(ii)可知 $\theta_{2k}\in(\theta_{1k},\theta_{1(k+1)})$,因此当 $\theta\in(\theta_{2k},\theta_{1(k+1)})$ 且 k 为奇数时,有 $\delta(Q_1,\theta)<0$ 和 $\delta(Q_2,\theta)<0$;当 $\pi<\varphi_1-\varphi_2<2\pi$ 时,由(i)和(ii)可知 $\theta_{2k}\in(\theta_{1(k+1)},\theta_{1(k+2)})$,因此当 $\theta\in(\theta_{1(k+1)},\theta_{2k})$ 且 k 为偶数时,有 $\delta(Q_1,\theta)<0$ 和 $\delta(Q_2,\theta)<0$.

引理 7 得证.

引理 8[12] 设 f 为满足 Denjoy 猜想极值情况的整函数,则 $\forall\theta\in[0,2\pi)$,或者射线 $\arg z=\theta$ 是 f 的 1 条 $\rho(f)$ 级 Borel 方向;或者存在实数 $\sigma\in(0,\pi/4)$,使

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ z\in(S(\theta-\sigma,\theta+\sigma)-E)}}\frac{\log\log|f(z)|}{\log r}=\rho(f),$$

其中 E 为 $S(\theta-\sigma,\theta+\sigma)$ 的子集满足 $\lim\limits_{r\to\infty}m(S(\theta-\sigma,\theta+\sigma;r,\infty)\cap E)=0$,这里 $S(\theta-\sigma,\theta+\sigma;r,\infty)=\{z:\theta-\sigma<\arg z<\theta+\sigma,r<|z|<\infty\}$,$mE$ 表示集合 E 的测度.

引理 9[12] 设 f 为 $\rho(0<\rho<\infty)$ 级整函数,角域 $S(\phi_1,\phi_2)=\{z:\phi_1<\arg z<\phi_2\}$ 满足 $\phi_2-\phi_1<\pi/\rho$.如果角域 $S(\phi_1,\phi_2)$ 内存在 f 的 1 条 ρ 级 Borel 方向,则射线 $L_j:\arg z=\phi_j(j=1,2)$ 中至少有 1 条,不妨设为 L_2,满足

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log|f(re^{i\phi_2})|}{\log r}=\rho.$$

2 定理的证明

定理 1 的证明 设 $f(\not\equiv0)$ 为方程(3)的任一整函数解,由 $\rho(A_1)=n$ 和引理 5 得 $\rho_2(f)\leqslant\max\{\rho(A_0),n\}$.接下来证明 $\rho(f)=\infty$ 和 $\rho_2(f)\geqslant\mu(A_0)$.首先证明 f 不可能为非零多项式.假设 $f(\not\equiv0)$ 为多项式,则由(1)式得 $\mu(A_0)=\mu(A_0f+f'')=\mu(-A_1f')=n$,矛盾.故 $f(\not\equiv0)$ 为超越整函数.从而由引理 1,存在线测度为 0 的集合 $E_1\subset[0,2\pi)$ 和常数 $B>0$,使得对每一个 $\psi_0\in[0,2\pi)\setminus E_1$,$\exists r_0=r(\psi_0)>0$,当 z 满足 $\arg z=\psi_0$ 和 $|z|\geqslant r_0$ 时,有

$$|f^{(j)}(z)/f(z)|\leqslant B[T(2r,f)]^{2j}(j=1,2).\quad(9)$$

令 $\delta(Q_j,\theta)=|b_{jn}|\cos(\arg b_{jn}+n\theta)(j=1,2)$,则存在实数 $\theta_1,\theta_2(\theta_1<\theta_2)$ 满足 $\theta_2-\theta_1=\pi/n$,且对每一个 $\theta\in(\theta_1,\theta_2)$ 有 $\delta(Q_j,\theta)<0(j=1,2)$.从而由引理 2 得,存在线测度为 0 的集合 E_2,使得当 $\arg z=\theta\in(\theta_1,\theta_2)\setminus E_2$ 且 $|z|=r$ 充分大时,有

$$|A_1(z)|\leqslant\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_1,\theta)r^n\}+\exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q_2,\theta)r^n\}\to0.\quad(10)$$

下面分情形讨论:

情形 1 $\mu(A_0)=0$.显然有 $\rho_2(f)\geqslant\mu(A_0)$.下面证明 $\rho(f)=\infty$ 假设 $\rho(f)<\infty$,由引理 1,存在对数测度有限的集合 H_0,使得对所有满足 $|z|=r\notin H_0\cup[0,1]$ 的点 z,有

$$|f^{(j)}(z)/f(z)|\leqslant|z|^{j\rho(f)}(j=1,2).\quad(11)$$

另一方面,由引理 3,存在集合 H_1 满足 $\overline{\log d_{ens}}H_1=1$,且当 $|z|=r\in H_1$ 时,有

$$|A_0(z)|>M(r,A_0)^{\sqrt{2}/2}.\quad(12)$$

于是由(1),(10)~(12)式得:当 z 满足 $\arg z=\psi_0\in(\theta_1,\theta_2)\setminus E_2$ 和 $|z|=r\in H_1\setminus([0,r_0]\cup H_0)$ 充分大时,有

$$M(r,A_0)^{\sqrt{2}/2} \leqslant |A_0(re^{i\psi_0})| \leqslant r^M,$$

其中 $M>0$ 为常数，在不同地方出现可代表不同常数. 这与 A_0 为超越整函数矛盾. 故 $\rho(f)=\infty$

情形 2　$0<\mu(A_0)<1/2$，则由引理 3，取 $\alpha_0=(\mu(A_0)+1/2)/2$，从而存在集合 H_2 满足 $\overline{\log d_{ens}}H_2 \geqslant 1-\mu(A_0)/\alpha_0$，且当 $|z|=r\in H_2$ 时，有

$$\log|A_0(z)| > \cos(\pi\alpha_0)\log M(r,A_0),$$

再结合 $\mu(A_0)$ 的定义知，对任意给定的 $\varepsilon(0<4\varepsilon<\mu(A_0))$，$\exists r_1>r_0$，使得当 $|z|=r\in H_2\setminus[0,r_1]$ 时，有

$$|A_0(z)| \geqslant \exp\{r^{\mu(A_0)-\varepsilon}\}. \qquad (13)$$

于是由(1)，(9)～(10)和(13)式得：当 z 满足 $\arg z=\theta\in(\theta_1,\theta_2)\setminus(E_1\cup E_2)$ 且 $|z|=r\in H_2\setminus[0,r_1]$ 充分大时，有

$$\exp\{r^{\mu(A_0)-\varepsilon}\} \leqslant |A_0(z)| \leqslant M[T(2r,f)]^4.$$

由上式可得 $\rho(f)=\infty$ 和 $\rho_2(f)\geqslant\mu(A_0)$.

情形 3　$1/2\leqslant\mu(A_0)<n$，则由引理 4，存在角域 $S(\alpha_1,\beta_1)=\{z:\alpha_1<\arg z<\beta_1\}$ 满足 $\beta_1-\alpha_1\geqslant\pi/\mu(A_0)$，且当 $\theta\in(\alpha_1,\beta_1)$ 时，有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log|A_0(re^{i\theta})|}{\log r} \geqslant \mu(A_0).$$

从而 $\forall\theta\in(\alpha_1,\beta_1)$，存在无穷点列 $z_n=r_ne^{i\theta}$ 满足 $r_n\to\infty(n\to\infty)$，且当 r_n 充分大时，有

$$|A_0(r_ne^{i\theta})| \geqslant \exp\{r_n^{\mu(A_0)-\varepsilon}\}. \qquad (14)$$

由于 $\pi/\mu(A_0)>\pi/n$ 和 $\delta(Q_j,\theta)(j=1,2)$ 的最小正周期为 $2\pi/n$，所以必存在角域 $S(\alpha_2,\beta_2)$，使得当 $\theta\in(\alpha_2,\beta_2)$ 时，有(14)式成立及 $\delta(Q_j,\theta)<0(j=1,2)$，从而由引理 2 知(10)式仍成立. 于是由(1)，(9)～(10)和(14)式得：当 $\theta\in(\alpha_2,\beta_2)\setminus(E_1\cup E_2)$ 且 r_n 充分大时，有

$$\exp\{r_n^{\mu(A_0)-\varepsilon}\} \leqslant |A_0(r_ne^{i\theta})| \leqslant M[T(2r_n,f)]^4.$$

由上式可得 $\rho(f)=\infty$ 和 $\rho_2(f)\geqslant\mu(A_0)$.

情形 4　$\mu(A_0)>n$，则由 $\rho(A_1)=n$ 得 $\mu(A_0)>\rho(A_1)$. 再由引理 6 得 $\rho(f)=\infty$ 和 $\rho_2(f)\geqslant\mu(A_0)$.

定理 1 得证.

定理 2 的证明　设 $f(\not\equiv 0)$ 为方程(1)的任一整函数解，由 $\rho(A_1)=n$ 和引理 5 得 $\rho_2(f)\leqslant\max\{\rho(A_0),n\}$. 下面证明 $\rho(f)=\infty$ 和 $\rho_2(f)\geqslant\rho(A_0)$.

(i) 证明 $\rho(f)=\infty$ 假设 $\rho(f)<\infty$，则由引理 1，存在线测度为 0 的集合 $E_1\subset[0,2\pi)$，使得对每一个 $\psi_0\in[0,2\pi)\setminus E_1$，$\exists r_0=r(\psi_0)>0$，当 z 满足 $\arg z=\psi_0$ 和 $|z|\geqslant r_0$ 时，有

$$|f^{(j)}(z)/f(z)| \leqslant |z|^{j\rho(f)}(j=1,2). \qquad (15)$$

又由引理 2 和引理 7 得：存在实数 $\theta_1,\theta_2(\theta_1<\theta_2)$ 和线测度为 0 的集合 E_2，使得当 $\arg z=\theta\in(\theta_1,\theta_2)\setminus E_2$ 且 $|z|=r$ 充分大时，仍有(10)式成立. 任取射线 $\arg z=\theta\in(\theta_1,\theta_2)$，对 $A_0(z)$ 运用引理 8 可得：

情形 1　射线 $\arg z=\theta$ 是 A_0 的 1 条 $\rho(A_0)$ 级 Borel 方向. 取实数 ϕ_1,ϕ_2 满足 $\phi_1\in(\theta_1,\theta)\setminus(E_1\cup E_2)$，$\phi_2\in(\theta,\theta_2)\setminus(E_1\cup E_2)$ 且 $\phi_2-\phi_1<\pi/\rho(A_0)$，则由引理 9 可知：射线 $\arg z=\phi_j(j=1,2)$ 中至少有 1 条射线，不妨设为 $\arg z=\phi_2$，满足

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log|A_0(re^{i\phi_2})|}{\log r}=\rho(A_0),$$

从而存在一无穷点列 $z_n=r_ne^{i\phi_2}$，满足 $r_n\to\infty(n\to\infty)$，且当 r_n 充分大时，有

$$|A_0(r_ne^{i\phi_2})| \geqslant \exp\{r_n^{\rho(A_0)-\varepsilon}\}. \qquad (16)$$

于是由(1)，(10)，(15)和(16)式得：当 r_n 充分大时，有

$$\exp\{r_n^{\rho(A_0)-\varepsilon}\} \leqslant |A_0(r_ne^{i\phi_2})| \leqslant \left|\frac{f''(r_ne^{i\phi_2})}{f(r_ne^{i\phi_2})}\right| + |A_1(r_ne^{i\phi_2})|\left|\frac{f'(r_ne^{i\phi_2})}{f(r_ne^{i\phi_2})}\right| \leqslant r_n^M,$$

矛盾. 所以 $\rho(f)=\infty$

情形 2　存在 $\sigma\in(0,\min\{(\theta-\theta_1)/2,(\theta_2-\theta)/2,\pi/4\})$，使

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ z\in(S(\theta-\sigma,\theta+\sigma)-E_3)}}\frac{\log\log|A_0(z)|}{\log r}=\rho(A_0),$$

其中 E_3 为 $S(\theta-\sigma,\theta+\sigma)$ 的子集，满足 $\lim\limits_{r\to\infty}m(S(\theta-\sigma,\theta+\sigma;r,\infty)\cap E_3)=0$，则当 $z\in S(\theta-\sigma,\theta+\sigma)-E_3$ 且 $|z|=r$ 充分大时，有

$$|A_0(z)| \geqslant \exp\{r^{\rho(A_0)-\varepsilon}\}. \qquad (17)$$

于是由(1)，(10)，(15)和(17)式得：当 $z\in S(\theta-\sigma,\theta+\sigma)-E_3-\{z:\arg z\in E_1\cup E_2\}$ 且 $|z|=r$ 充分大时，有

$$\exp\{r^{\rho(A_0)-\varepsilon}\} \leqslant |A_0(z)| \leqslant r^M,$$

矛盾. 所以 $\rho(f)=\infty$

(ii) 证明 $\rho_2(f)\geqslant\rho(A_0)$. 类似于(i)的证明方法，将情形 1 和情形 2 中所用(15)式替换为(9)式即得该结论.

3　参考文献

[1] Yang Chungchun，Yi Hongxun. Uniqueness theory of meromorphic functions [M]. New York: Kluwer Academic Publishers，2003.

[2] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equa-

tions [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.

[3] Ozawa M. On a soultion of $w'' + e^{-z}w' + (az + b)w = 0$ [J]. Kodai Math J, 1980, 3(2): 295-309.

[4] Langley J K. On complex oscillation and a problem of Ozawa [J]. Kodai Math J, 1986, 9(3): 430-439.

[5] Gundersen G G. On the question of whether $f'' + e^{-z}f' + B(z)f = 0$ can admit a solution $f(\neq 0)$ of finite order [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect, 1986, 102A(1/2): 9-17.

[6] Gundersen G G. Finite order solutions of second order linear differential equations [J]. Trans Amer Math Soc, 1988, 305(1): 415-429.

[7] Chen Zongxuan. The growth of solutions of $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$ where the orde $r(Q) = 1$ [J]. Sicence in China, Ser A, 2002, 45(3): 290-300.

[8] Wu Pengcheng, Zhu Jun. On the growth of solutions to the complex differential equation $f'' + Af' + Bf = 0$ [J]. Science in China: Ser A, 2011, 54(5): 939-947.

[9] Wu Xiubi, Long Jianren, Heittokangas J, et al. Second-order complex linear differential equations with special function or extremal function as coefficients [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2015, 2015(143): 1-15.

[10] 易才凤，钟文波. 2 阶微分方程$f'' + Af' + Bf = 0$解的增长性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2015, 39(4): 340-344.

[11] 钟文波，易才凤. 一类高阶线性微分方程解的增长级 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2014, 38(4): 399-402.

[12] Zhang Guanghou. Theory of entire and meromorphic functions, deficient values, asymptotic values and singular directions [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[13] Gundersen G G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates [J]. J London Math Soc, 1988, 37(2): 88-104.

[14] Barry P D. Some theorems related to the cos $(\pi\rho)$ theorem [J]. Proc London Math Sco, 1970, 21(3): 334-360.

[15] Chen Zongxuan. On the hyper order of higher order differential equations [J]. Chin Ann Math, 2003, 24B(4): 501-508.

On Growth of Solutions of Some Second Order Linear Differential Equations

TU Hongqiang, LIU Huifang*

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The growth of solutions of second order linear differential equations $f'' + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0$ is investigated. Let $A_1(z) = h_1 e^{Q_1(z)} + h_2 e^{Q_2(z)}$, where $Q_j(z)$ $(j = 1, 2)$ are polynomials with degree $n(n \geqslant 1)$, $h_j(j = 1, 2)$ are entire functions with order less than n, and let A_0 be a transcendental entire function with lower order $\mu(A_0) \neq n$ or A_0 be a function extremal for Denjoy's conjecture, then every nontrivial solution of such equations is of infinite order. Some estimates on hyper-order of its solutions are also obtained.

Key words: differential equation; entire function; Denjoy's conjecture; order of growth

(责任编辑: 王金莲)