第 41 卷 第 2 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 41 No. 2
2017 年 3 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Mar. 2017

文章编号: 1000-5862(2017) 02-0212-03

约束广义 Birkhoff 系统的运动稳定性

王嘉航[1,2],张 毅[1*]

(1. 苏州科技大学土木工程学院,江苏 苏州 215011; 2. 河海大学土木与交通学院,江苏 南京 210098)

摘要: 利用 Noether 理论对约束广义 Birkhoff 系统的稳定性问题进行了研究,给出了约束广义 Birkhoff 系统的受扰运动方程; 得到了约束广义 Birkhoff 系统的 1 次近似方程,利用 Lyapnnov 1 次近似理论,建立了约束广义 Birkhoff 系统稳定性的判据; 利用 Noether 守恒量构造 Lyapnnov 函数,建立了直接法的系统平衡状态稳定性的判据,并举例说明它的应用.

关键词: 广义 Birkhoff 系统; 运动稳定性; 1 次近似法; 直接法

中图分类号: O 316 **文献标志码:** A **DOI:** 10. 16357/j. cnki. issn1000-5862. 2017. 02. 19

0 引言

力学系统的稳定性是一个重要但困难的问题. 1892 年 A. M. Lyapnnov 首次从理论上对稳定性问题进行了严格的论证和系统的分析,提出了解决稳定性问题的 2 个方法: Lyapnnov 第一方法和 Lyapnnov 第二方法(又称直接法) [1]. 广义 Birkhoff 系统是 Birkhoff 系统的一种推广,系统的运动方程比较容易构造,且有更多的自由度,对广义 Birkhoff 系统动力学的研究具有更普遍的意义[2]. 梅凤翔等[3]研究了 Birkhoff 系统的稳定性问题,张毅[4]利用 Noether 守恒量研究了广义 Birkhoff 系统的运动稳定性问题,曹秋鹏等[5]应用梯度系统方法研究了约束自治广义 Birkhoff 系统的平衡稳定性. 关于 Birkhoff 系统的稳定性已经取得了许多研究成果[6-15]. 本文利用系统的 Noether 守恒量构造 Lyapnnov 函数,建立系统受扰时的运动方程,给出了约束广义 Birkhoff 系统运动稳定性判定的一些命题.

1 约束广义 Birkhoff 系统的受扰运动方程

广义 Pfaff-Birkhoff-d´Alembert 原理为

$$[\partial R_\nu/\partial a^\mu - \partial R_\mu/\partial a^\nu)\dot{a}^\nu - \partial B/\partial a^\mu - \partial R_\mu/\partial t + \Lambda_\mu]\delta a^\mu = 0(\mu,\nu = 1,2,\cdots,2n), \quad (1)$$

其中 $B = B(a,t)$ 为 Birkhoff 函数,$R_\mu = R_\mu(a,t)$ 为 Birkhoff 函数组,Λ_μ 为附加项. 如果变量 $a^\mu(\mu = 1,2,\cdots,2n)$ 不是全部独立的,而是受到一些条件限制,限制条件用约束方程表示为

$$f_\beta(a,t) = 0(\beta = 1,2,\cdots,g), \quad (2)$$

约束(2) 对虚位移 δa^μ 的限制条件为

$$\delta a^\mu \partial f_\beta/\partial a^\mu = 0(\mu = 1,2,\cdots,2n). \quad (3)$$

根据广义 Pfaff-Birkhoff-d´Alembert 原理(1) 和(3) 式,并利用 Lagrange 乘子法可得

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}\dot{a}^\nu - \partial B/\partial a^\mu - \partial R_\mu/\partial t + \Lambda_\mu = \lambda_\beta \partial f_\beta/\partial a^\mu(\mu,\nu = 1,2,\cdots,2n;\beta = 1,2,\cdots,g), \quad (4)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu} = \partial R_\nu/\partial a^\mu - \partial R_\mu/\partial a^\nu$,称(4) 式为约束广义 Birkhoff 系统的运动方程,这里 λ_β 为约束乘子.

假设系统非奇异,即 $\det|\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}| \neq 0$,则在运动微分方程积分之前可由方程(2) 和(4) 求出 λ_β 为 a^μ 和时间 t 的函数. 由方程(4) 可得

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}\dot{a}^\nu = \partial B/\partial a^\mu + \partial R_\mu/\partial t - \Lambda_\mu + \lambda_\beta \partial f_\beta/\partial a^\mu(\mu,\nu = 1,2,\cdots,2n;\beta = 1,2,\cdots,g).$$

假设方程(4) 有解

$$a^\nu = a_0^\nu(t)(\nu = 1,2,\cdots,2n), \quad (5)$$

则有

$$(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu})_0\dot{a}_0^\nu - (\partial B/\partial a^\mu + \partial R_\mu/\partial t - \Lambda_\mu + \lambda_\beta\partial f_\beta/\partial a^\mu)_0 = 0(\mu,\nu = 1,2,\cdots,2n),$$

下标 0 表示其中的 a^ν 用 $a_0^\nu(t)$ 替代的结果. 将方程(5) 作为无扰运动,令

$$a^\nu = a_0^\nu(t) + \xi^\nu(\nu = 1,2,\cdots,2n), \quad (6)$$

收稿日期: 2016-12-26

基金项目: 国家自然科学基金(10972151,11272227) 资助项目.

通信作者: 张 毅(1964-) ,男,江苏吴江人,教授,博士生导师,主要从事数学物理方程的研究. E-mail: weidiezh@ gmail. com

将(6)式代入约束广义 Birkhoff 系统的运动方程(4)得到

$$(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu})_1(\dot{a}_0^\nu+\dot{\xi}^\nu)-(\partial B/\partial a^\mu+\partial R_\mu/\partial t-\boldsymbol{\Lambda}_\mu+\lambda_\beta\partial f_\beta/\partial a^\mu)_1=0, \tag{7}$$

下标 1 表示其中的 a^ν 用 $a_0^\nu(t)+\xi^\nu$ 替代的结果.

将 $\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}$，$\partial B/\partial a^\mu$，$\partial R_\mu/\partial t$，$\boldsymbol{\Lambda}_\mu$ 等在 $a^\nu=a_0^\nu(t)$ 处附近用 Taylor 公式展开，有

$$(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu})_1=(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu})_0+(\partial\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}/\partial a^\rho)_0\xi^\rho+\cdots,$$
$$(\partial B/\partial a^\mu)_1=(\partial B/\partial a^\mu)_0+(\partial^2B/(\partial a^\mu\partial a^\nu))_0\xi^\nu+\cdots,$$
$$(\partial R_\mu/\partial t)_1=(\partial R_\mu/\partial t)_0+(\partial^2R_\mu/(\partial t\partial a^\nu))_0\xi^\nu+\cdots,$$
$$(\boldsymbol{\Lambda}_\mu)_1=(\boldsymbol{\Lambda}_\mu)_0+(\partial\boldsymbol{\Lambda}_\mu\partial a^\nu)_0\xi^\nu+\cdots,(\lambda_\beta\partial f_\beta/\partial a^\mu)_1=(\lambda_\beta\partial f_\beta/\partial a^\mu)_0+(\partial(\lambda_\beta\partial f_\beta/\partial a^\mu)/\partial a^\nu)_0\xi^\nu+\cdots, \tag{8}$$

其中未写出的项为 ξ^ν 的 2 阶项和更高阶小项，将(8)式代入(7)式得到受扰动方程

$$(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu})_0\dot{\xi}^\nu-[\partial^2B/(\partial a^\mu\partial a^\nu))_0+(\partial^2R_\mu/(\partial t\partial a^\nu))_0-(\partial\boldsymbol{\Lambda}_\mu/\partial a^\nu)_0+(\partial(\lambda_\beta\partial f_\beta/\partial a^\mu)/\partial a^\nu)_0]\xi^\nu=P_\mu(\xi,\dot{\xi},t), \tag{9}$$

(9)式写为

$$(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu})_0\dot{\xi}^\nu+(\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\mu\nu})_0\xi^\nu=P_\mu(\xi,\dot{\xi},t),$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\mu\nu}=\dot{a}_\rho\partial\boldsymbol{\Omega}_{\mu\rho}/\partial a^\nu-[\partial^2B/(\partial a^\mu\partial a^\nu)+\partial^2R_\mu/(\partial t\partial a^\nu)-\partial\boldsymbol{\Lambda}_\mu/(\partial a^\nu)+\partial(\lambda_\beta\partial f_\beta/\partial a^\mu)/\partial a^\nu].$$

2　运动稳定性 1 次近似方法

一般情况下，约束广义 Birkhoff 系统的受扰运动方程明显依赖于时间 t，但有时也可能不依赖于时间 t. 对于前一种情况，稳定性研究比较困难；但对于后一种情况，可由 Lyapnnov 1 次近似理论来研究.

假设 $P_\mu=P_\mu(\xi,\dot{\xi})$，$(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu})_0=$ 常数，$(\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\mu\nu})_0=$ 常数，则 1 次近似方程为

$$(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu})_0\dot{\xi}^\nu+(\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\mu\nu})_0\xi^\nu=0(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n), \tag{10}$$

方程(10)的特征方程为

$$\Delta(\lambda)=\det|(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu})_0\lambda+(\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\mu\nu})_0|. \tag{11}$$

假设

$$\begin{cases}(\partial^2B_\mu/(\partial a^\mu\partial a^\nu))_0=(\partial^2B_\nu/(\partial a^\nu\partial a^\mu))_0,\\(\partial^2R_\mu/(\partial t\partial a^\nu))_0=(\partial^2R_\nu/(\partial t\partial a^\mu))_0,\\(\partial\boldsymbol{\Lambda}_\mu/\partial a^\nu)_0=(\partial\boldsymbol{\Lambda}_\nu/\partial a^\mu)_0,\\(\partial(\lambda_\beta\partial f_\beta/\partial a^\mu)/\partial a^\nu)_0=(\partial(\lambda_\beta\partial f_\beta/\partial a^\nu)/\partial a^\mu)_0,\end{cases} \tag{12}$$

则有 $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\mu\nu}=\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\nu\mu}$. 由于矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}$ 的反对称性和 $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\mu\nu}$ 的对称性得

$$\Delta(\lambda)=\Delta(-\lambda),$$

因此，特征方程(11)可写为

$$b_0\lambda^{2n}+b_1\lambda^{2n-2}+\cdots+b_{n-1}\lambda^2+b_n=0,$$

其中 $b_0,b_1,\cdots,b_n$ 可以用 $(\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\mu\nu})_0$ 和 $(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu})_0$ 表示.

命题 1　约束广义 Birkhoff 系统若满足(12)式，则 1 次近似方程的特征方程的根成对出现，即若有根 λ，则必有根 $(-\lambda)$.

根据 Lyapnnov 1 次近似方法理论，有

命题 2　约束广义 Birkhoff 系统满足(12)式，若 1 次近似方程的特征方程的根都是负实部的，则系统的无扰运动(5)是稳定的；若 1 次近似方程的特征方程的根至少有 1 个是正实部的，则系统的无扰运动(5)是不稳定的.

3　运动稳定性的直接法

可应用 Noether 理论，构造适当的 Lyapnnov 函数，取时间 t 和变量 a^μ 的无限小变换为

$$t^*=t+\varepsilon f(t,a),a^\mu(t^*)=a^\mu(t)+\varepsilon F_\mu(t,a).$$

对于约束广义 Birkhoff 系统，Noether 等式为

$$(\dot{a}^\mu\partial R_\mu/\partial t-\partial B/\partial t)f+(\dot{a}^\nu\partial R_\nu/\partial a^\mu-\partial B/\partial a^\mu)F_\mu-B\dot{f}+R_\mu\dot{F}_\mu+(\boldsymbol{\Lambda}_\mu-\lambda_\beta\partial f_\beta/\partial a^\mu)(F_\mu-\dot{a}^\mu f)+\dot{G}_N=0, \tag{13}$$

Noether 守恒量为

$$I_N=R_\mu F_\mu-Bf+G_N=\text{常数},$$

可取 Lyapnnov 函数为

$$V=R_\mu F_\mu-Bf+G_N,$$

则有

$$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t=0.$$

若函数 V 在平衡位置附近是正定或负定的，则其平衡位置是稳定的.

命题 3　约束广义 Birkhoff 系统，若有满足(13)式的无限小生成元 f,F_μ 和规范函数 G_N，使函数 $V=R_\mu F_\mu-Bf+G_N$ 在 $a^\nu=a_0^\nu(t)(\nu=1,2,\cdots,2n)$ 上为 0，在 $a^\nu=a_0^\nu(t)$ 附近是正定或负定的，则系统的无扰运动是稳定的.

若 $(V)_0=(R_\mu F_\mu-Bf+G_N)_0\neq0$，则可取函数 V 为 $V=R_\mu F_\mu-Bf+G_N-(R_\mu F_\mu-Bf+G_N)_0$. 从而由命题 3 可得如下结论.

命题 4　约束广义 Birkhoff 系统，若有满足(13)式的无限小生成元 f,F_μ 和规范函数 G_N，使函数 $V=R_\mu F_\mu-Bf+G_N-(R_\mu F_\mu-Bf+G_N)_0$ 在 $a^\nu=a_0^\nu(t)(\nu=1,2,\cdots,2n)$ 附近是正定或负定的，则系统的无扰运动是稳定的.

4 算例

4 阶的约束广义 Birkhoff 系统为

$$B = [(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2]/2,$$
$$R_1 = a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0,$$
$$\Lambda_1 = -t, \Lambda_2 = -t, \Lambda_3 = t, \Lambda_4 = t,$$

约束方程为

$$f_1 = a^1 + a^2 = 0, f_2 = a^3 + a^4 = 0, \quad (14)$$

试研究运动稳定性.

由运动方程(2)和(4)可知,约束广义 Birkhoff 方程为

$$-\dot{a}^3 - a^1 - t = \lambda_1, -\dot{a}^4 - a^2 - t = \lambda_1,$$
$$\dot{a}^1 - a^3 + t = \lambda_2, \dot{a}^2 - a^4 + t = \lambda_2, \quad (15)$$

由(14)式和(15)式可得

$$\lambda_1 = (-a^1 - a^2 - 2t)/2, \lambda_2 = (-a^3 - a^4 + 2t)/2,$$

约束广义 Birkhoff 方程(15)式有解:

$$a_0^1 = \sin t, a_0^2 = -\sin t, a_0^3 = \cos t, a_0^4 = -\cos t,$$

取其为无扰运动,研究其稳定性.

由(11)式可得

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 & -\lambda & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & \lambda & 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} =$$
$$\lambda^2(\lambda^2 + 1/2) = 0, \quad (16)$$

(16)式的解为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{2}\mathrm{i}/2, \lambda_3 = -\sqrt{2}\mathrm{i}/2$,根据命题 2 无法判定该系统是否稳定.

可用 Noether 理论研究系统的稳定性,由(13)式得

$$-a^1F_1 - a^2F_2 + (\dot{a}^1 - a^3)F_3 + (\dot{a}^2 - a^4)F_4 - B\dot{f} + a^3\dot{F}_1 + a^4\dot{F}_2 + (-t - \lambda_1)(F_1 - \dot{a}^1 f) + (-t - \lambda_1)(F_2 - \dot{a}^2 f) + (t - \lambda_2)(F_3 - \dot{a}^3 f) + (t - \lambda_2)(F_4 - \dot{a}^4 f) + \dot{G}_N = 0,$$

取生成元 $f = -1, F_\mu = 0(\mu = 1,2)$,则规范函数为

$$G_N = -[(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2]/4 - (a^1a^2 + a^3a^4)/2,$$

取 Lyapnnov 函数为

$$V = R_\mu F_\mu - Bf + G_N = [(a^1 + a^2)^2 + (a^3 + a^4)^2]/4,$$

且在 $a_0^\nu = a_0^\nu(t)$ 上 V 为 0,在 $a_0^\nu = a_0^\nu(t)$ 附近 V 为正定函数,由命题 3 知无扰运动是稳定的.

5 结束语

A. M. Lyapnnov 给出了稳定性的严格数学定义,提出了研究稳定性的 Lyapnnov 第 2 方法(直接法),但直接法的 Lyapnnov 函数有时很难构造. 本文利用系统的 Noether 守恒量构造 Lyapnnov 函数,建立了当系统受扰时的运动方程,研究约束广义 Birkhoff 系统的运动稳定性,命题 1 和命题 2 给出 1 次近似方法的运动稳定性的判据,命题 3 和命题 4 给出稳定性直接法的判据.

6 参考文献

[1] 梅凤翔,史荣昌,张永发,等. 约束力学系统的运动稳定性 [M]. 北京:北京理工大学出版社,1997:33-290.

[2] 梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统动力学 [M]. 北京:科学出版社 2013:65-203.

[3] 梅凤翔. 关于受约束 Birkhoff 系统的平衡稳定性 [J]. 北京理工大学学报:自然科学版,1996(3):242-250.

[4] Zhang Yi. Stability of motion for generalized Birkhoffian systems [J]. J China Ordnance,2010,6(3):161-165.

[5] 曹秋鹏,张毅,陈向炜. 约束自治广义 Birkhoff 系统平衡稳定性的梯度系统方法 [J]. 云南大学学报:自然科学版,2015,37(2):228-232.

[6] 金世欣,张毅. 受约束的自治广义 Birkhoff 系统的平衡稳定性 [J]. 扬州大学学报:自然科学版,2013,16(2):21-25.

[7] 王嘉航,张毅. 受约束的广义 Birkhoff 系统平衡稳定性 [J]. 苏州科技学院学报,2014,31(4):10-14.

[8] 崔金超,梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统的平衡稳定性 [J]. 动力学与控制学报,2010,8(4):297-299.

[9] Sanchez D A. Ordinary differential equations and stability theory: an introduction [M]. New York: Dover Publications Inc,2012:91-117.

[10] 张毅. 自治广义 Birkhoff 系统的平衡稳定性 [J]. 物理学报,2010,59(1):20-25.

[11] Li Yanmin,Mei Fengxiang. Stability for manifolds of equilibrium states of generalized Birkhoff system [J]. Chin Phys B,2010,19(8):1-3.

[12] Mei Fengxiang,Wu Huibin. Form invariance and new conserved quantity of generalized Birkhoffian system [J]. Chin Phys B,2010,19(5):1-4.

[13] Jiang Wenan,Luo Shaokai. Stability for manifolds of equilibrium states of generalized Hamiltonian system [J]. Meccanica,2012,47(2):379-383.

[14] Mei Fengxiang,Wu Huibin,Shang Mei. Stability with respect to partial variables for Birkhoffian system [J]. Chin Phys B,2006,15(9):1932-1934.

[15] Mei Fengxiang,Xie Jiafang,Gang Tieqiang. Stability of motion of a nonholonomic system [J]. Chin Phys Lett,2007,24(5):1133-1135.

(下转第 220 页)

and impulse [J]. Journal of the Franklin Institute,2008,345(1):39-59.
[15] Li Yongkun,Xing Zhiwei. Existence and global exponential stability of periodic solutions for CNNS with impulse [J]. Chaos,Solitons and Fractals,2007,33(5):1686-1693.

The Analysis on Global Exponential Stability of Periodic Solutions for a Class of Non-Autonomous Higher-Order BAM Neural Networks with Impulse

JIA Xiuling[1],WANG Jiyu[1],LI Yaotang[2*]
(1. Department of Public Basic Education,Zhengzhou Technology and Business University,Zhengzhou Henan 451400,China;
2. School of Mathematics and Statistics,Yunnan University,Kunming Yunnan 650091,China)

Abstract: By constructing a new Lyapunov functional,employing the *M*-matrix theory and some inequality techniques,the global exponential stability of periodic solutions for non-autonomous higher-order BAM neural networks with impulse is considered,and it has greatly improve the previous results in the literature.
Key words: higher-order BAM neural networks; periodic solutions; *M*-matrix; impulse; exponential stability

(责任编辑:曾剑锋)

(上接第 214 页)

The Stability of Motion for the Generalized Birkhoffian System with Constrains

WANG Jiahang[1,2],ZHANG Yi[1*]
(1. College of Civil Engineering,Suzhou University of Science and Technology,Suzhou Jiangsu 215011,China;
2. College of Civil and Transportation Engineering,Hohai University,Nanjing Jiangsu 210098,China)

Abstract: The problem on the stability of motion for a generalized Birkhoffian system with constrains are studied by the Noether theong. The disturbed equations of motion and their first approximation for the system are established. The criterion of stability of motion for the system was set up by using Lyapnnov´s first approximation theory. The Lyapnnov´s function was constructed by the Noether conserved quantity and the criterion of stability of motion for the system was also set up by using Lyapnnov´s direct method. Finally,the example is given to illustrate the application of the results.
Key words: generalized Birkhoffian system; stability of motion; first approximation theory; direct method

(责任编辑:曾剑锋)