文章编号:1000-5862(2017)03-0252-04

涉及小函数的无限级随机 Dirichlet 级数

金其余[1],孔荫莹[2*]

(1. 内蒙古大学数学科学学院,内蒙古 呼和浩特　010021;2. 广东财经大学统计与数学学院,广东 广州　510320)

摘要: 利用无穷级型函数对随机 Dirichlet 级数的值分布进行了研究,得出结论:在右半平面上的无限级随机 Dirichlet 级数,几乎必然(a. s.)以虚轴上的每一点为没有有限例外小函数的强 Borel 点. 此结论推广了 Borel 点的结果.

关键词: 随机 Dirichlet 级数;小函数;强 Borel 点

中图分类号: O 174.5　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.03.08

0　引言

随机 Dirichlet 的值分布理论已经被应用于许多基础性研究[1-3],文献[4]在对于右半平面上有限正级 Dirichlet 级数,已知它必然以虚轴上每一点为没有有限例外值的 Borel 点的基础上推导出结论:右半平面上有限正级 Dirichlet 级数,也必然以虚轴上每一点为没有有限例外小函数的强 Borel 点. 在无限级时是不是也有同样的结论?本文在文献[5-7]已知结论的基础上得到了相类似的结论. 最近,Dirichlet 的增长性和值分布也开始推广到 Laplace-Stieltjes 变换[8-12].

1　主要结果

设 Dirichlet 级数

$$f_\omega(s)=\sum_{n=0}^{\infty}Z_n(\omega)\,e^{-\lambda_n s}(s=x+iy),\qquad(1)$$

其中 $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n\uparrow+\infty$,$\{Z_n(\omega)\}$ 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 内一独立数列和对称的非退化随机变量序列,满足 $\forall n\geqslant 0$,$EZ_n>0$,存在 1 个正数 d,使得

$$d^2\sigma^2=d^2E\,|Z_n|^2\leqslant E^2|Z_n|<+\infty$$

为方便,引入辅助级数

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n e^{-\lambda_n s}.\qquad(2)$$

设 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(\ln n)/\lambda_n=0$,

$$\lim_{n\to+\infty}(\ln^+\sigma_n)/\lambda_n=0,\qquad(3)$$

则级数(2)的收敛坐标及绝对收敛横坐标等于 0,它定义了一个右半平面的解析函数,令

$M(x,f)=\sup\{|f(x+iy)|\,|-\infty<y<+\infty\}$,

$m(x,f)=\max\{\sigma_n e^{-\lambda_n s}\,|\,n\in\mathbf{N}\}$,

$M(x,f_\omega)=\sup\{|f_\omega(x+iy)|\,|-\infty<y<+\infty\}$,

$m(x,f_\omega)=\max\{|Z_n(\omega)|\,e^{-\lambda_n s}\,|\,n\in\mathbf{N}\}$.

定义 1　设级数 $f(s)$ 于右半平面 $\mathrm{Re}\,s>0$ 内全纯,若

$$\overline{\lim_{x\to0^+}}\ln^+\ln^+M(x,f)/\ln(1/x)=+\infty,$$

则称 $f(s)$ 为右半平面 $\mathrm{Re}\,s>0$ 内无限级全纯函数.

引进函数 $U(r)=r^{\rho(r)}$,其中 $\rho(r)$ 为非负、连续的增函数并且满足

(i) $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r)=+\infty$;

(ii) $\lim\limits_{r\to+\infty}\ln U(R)/\ln U(r)=1$,其中 $R=r(1+1/\ln U(r))$,如果

$$\overline{\lim_{x\to0^+}}\ln^+\ln^+M(x,f)/\ln U(1/x)=1,$$

则称 $f(s)$ 在右半平面 $\mathrm{Re}\,s>0$ 上具有 $\rho(1/x)$ 级,称 $U(1/x)$ 为 $f(s)$ 的型函数.

定义 2　设 $f(s)$ 为右半平面 $\mathrm{Re}\,s>0$ 内无限级全纯函数,$U(1/x)$ 为其型函数,如果对任意复数

收稿日期: 2017-02-20

基金项目: 国家自然科学基金(61661039),内蒙古自治区自然科学基金(2016MS0107),内蒙古自治区高等学校科学研究(NJZY16017),广东省高等学校优秀青年教师培养计划(Yqgdufe1405),广东省自然科学基金(2015A030313628)和国家高等教育质量常态监测数据中心(广州)开放基金(G1613)资助项目.

通信作者: 孔荫莹(1979-),男,广东广州人,教授,主要从事大数据,单复变函数论(Laplace-Stieltjes 变换增长性)及值分布的研究. E-mail: kongcoco@hotmail.com

$a \in \mathbf{C}$(至多除去 1 个例外)以及 $\forall \varepsilon > 0$,有

$$\varlimsup_{x\to 0^+}\frac{\ln n(x,|\mathrm{Im}\, s - y| < \varepsilon, f(s) = a)}{\ln U(1/x)} = 1,$$

则称 $s = \mathrm{i}y$ 为 $f(s)$ 的 $\rho(1/x)$ 级的 Borel 点,简称为 $f(s)$ 的 Borel 点. 这里 $n(x,|\mathrm{Im}\, s - y| < \varepsilon, f(s) = a)$ 表示 $f(s) - a$ 在半带型区域 $\Delta(y,s) := \{s \mid \mathrm{Re}\, s > x, |\mathrm{Im}\, s - y| < \varepsilon\}$ 内的零点个数,置 $H_1 = \{\{\varphi(s)\} \cap C \mid \varphi(s)$ 在 $\mathrm{Re}\, s > 0$ 内全纯,$\varphi(s)$ 的级低于 $\rho(1/x)\}$. 若 $\forall \varphi \in H_1$(至多除去 1 个例外)以及 $\forall \varepsilon > 0$,有

$$\varlimsup_{x\to 0^+}\frac{\ln n(x,|\mathrm{Im}\, s - y| < \varepsilon, f = \varphi)}{\ln U(1/x)} = 1, \quad (4)$$

则称 $s = \mathrm{i}y$ 为 $f(s)$ 的强 Borel 点.

2 引理

引理 1[5] 设 $\{Z_n\}$ 是独立随机变量列,满足 $\sup\limits_{n\geqslant 0} E|Z_n|^2 < \infty$,则

$$C(\omega) = \sup_{n\geqslant 1}|Z_n(\omega)/n| < +\infty \quad \text{a. s.},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}|Z_n(\omega)| \geqslant \varliminf_{n\to\infty} E|Z_n(\omega)| \quad \text{a. s.}.$$

引理 2[7] 设 Dirichlet 级数(2),满足条件(3)及

$$\lim_{n\to+\infty}(\ln\ln n)/\ln\lambda_n = l < 1, \quad (5)$$

则

$$\varlimsup_{x\to 0^+}\frac{\ln\ln M(x,f)}{\ln(1/x)} = 1 \Leftrightarrow \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\ln^+\lambda_n}{\ln U(\lambda_n/\ln^+|\sigma_n|)} = 1.$$

引理 3[4] 设 $f(z)$ 于 $|z| < 1$ 内亚纯,$a_j(z)$ $(j = 1,2,\cdots,q)$ 为 $f(z)$ 的小函数,且 $a_j(z)$ $(1 \leqslant j \leqslant q)$ 互相判别,则 $\forall r(0 < r < 1)$,有

$$(q - 1 - o(1))T(r,f) < \sum_{j=1}^{q} N\left(r,\frac{1}{f - a_j}\right) + q\overline{N}(r,f) + o\left(\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)T(r,f)\right),$$

当 f 为无穷级时,可能除去 1 列满足

$$\sum_{\mu}\int_{J_\mu}\frac{\mathrm{d}r}{(1-r)^k} < \infty$$

的集 J_μ.

引理 4[6] 设 $f(s)$ 为 $\mathrm{Re}\, s > 0$ 内无限级全纯函数,$U(1/x)$ 为其型函数,若 $s = \mathrm{i}y$ 为 $f(s)$ 的 1 个 Borel 点,则它也必然为其强 Borel 点.

设 (C_n, B) $(n \in \mathbf{N}_+)$ 是一个随机可测空间 $\{Z_n(\omega)\}$ 定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 上分别在 $\{(C_n,B_n)\}$ 上取值的独立随机变量序列,则 $Z(\omega) = \{Z_1(\omega), Z_2(\omega),\cdots\}$ 是 ω 到 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ 的映照,置 $\mu_n(B_n) = P(Z_n^{-1}(B_n))$ $(\forall n \in \mathbf{N}_+, \forall B_n \in B_n)$,于是 $\{C_n, B_n, \mu_n\}$ 为一概率空间序列,假定 $\{B_n\}$ 是完备的.

设 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ 是 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ 中由如下形式的集

$$B = \{(Z_1,Z_2,\cdots) \mid (Z_1,Z_2,\cdots) \in \prod_{n=1}^{\infty} C_n : Z_j \in B_j \in B_j, \forall j \in \{1,2,\cdots,n_0\}, n_0 \in \mathbf{N}_+\}$$

生成的最小 σ–代数.

因为 $\forall B \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} B_n$,$Z^{-1}(B) = \{\omega \mid Z_j(\omega) \in B_j, j \in (1,2,\cdots,n_0), n_0 \in \mathbf{N}_+\} = \prod\limits_{j=1}^{n_0}\{Z^{-1}(B_j)\} \in \mathscr{A}$,从而 $\forall B \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} B_n$,就有 $Z^{-1}(B) \in \mathscr{A}$. ,因此 $Z(\omega)$ 是定义在 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 上并在乘积空间 $\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty} C_n, \prod\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right)$ 上取得的一个随机变量,置

$$\mu(B) = P(Z^{-1}(B)), \forall B \in \prod_{n=1}^{\infty} B_n,$$

则对于任何 $B \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} B_n$,

$$\mu(B) = P(\{\omega \mid Z(\omega) \in B\}) = \prod_{j=1}^{n_0}\mu_j(B_j),$$

故 $\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty} C_n, \prod\limits_{n=1}^{\infty} B_n, \mu\right)$ 是概率空间序列 (C_n, B_n, μ_n) 的乘积概率空间.

引理 5 设随机 Dirichlet 级数(1)满足条件(5),若 $\mathrm{i}y_0(y \in \mathbf{R})$ 几乎必然是 $f_\omega(s)$ 的强 Borel 点,即对几乎必然的 $\omega \in \Omega$,$\forall \delta > 0$,,有

$$\varlimsup_{x\to 0^+}\frac{\ln(x,|\mathrm{Im}\, s - y| < \varepsilon, f(s) = a)}{\ln U(1/x)} = 1,$$

则 $\mathrm{i}y$ 几乎必然是 1 个没有例外小函数的强 Borel 点,其中 $\varphi \in H_1$.

证 假定 $\mathrm{i}y$ 就是 $f_\omega(s)$ 得一个强 Borel 点,若不然只需排除 1 个零测度事件,令 $k = \sup\{P(Z_n(\omega) = c) \mid c \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}_+\} < 1$. $\forall c \in (0,1)$,取 $N > \ln c/\ln K$,对于任何复数序列 $\{c_n\}$,如果 $\{\omega \mid Z_n = c_n, n = N+1, N+2,\cdots\} = \varnothing$,令 $P(\{c_n\}_{N+1}^{\infty}) = \varnothing$,如果 $\exists \omega_0 \in \Omega$,使 $Z_n(\omega_0) = c_n, n = N+1, N+2,\cdots$,置 $\Gamma(\{c_n\}_{N+1}^{\infty}) = \{(Z_1,Z_2,\cdots,Z_n) \mid$ 对于 $\sum\limits_{n=1}^{N} X_n \mathrm{e}^{-\lambda_n s} + \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\lambda_n s}$,$\mathrm{i}y$ 为其 1 个具有例外小函数的强 Borel 点.

现在证明 $\Gamma(\{c_n\}_{N+1}^{\infty})$ 中不可能具有 2 个不同的元素,否则若存在 2 个不同的元素 $(c_{j1},c_{j2},\cdots,c_{jN})\in\Gamma(\{c_n\}_{N+1}^{\infty})$,$j=1,2$,则对应着 2 个解析函数 $\varphi_j\in H_1(j=1,2)$ 及 $\delta>0$,使得 $n(x,y_0,\delta,f_\omega=\varphi_j)$ 的级小于 ρ,即 $n(x,y_0,\delta,\sum_{n=1}^{N}C_{jn}\mathrm{e}^{-\lambda_n}\sum_{n=N+1}^{\infty}Z_n(\omega_0)\mathrm{e}^{-\lambda_n s}=\varphi_j)$ 的级小于 ρ,令

$\psi_j(s)=\sum(Z_n(\omega_0)-c_{jn})\mathrm{e}^{-\lambda_n s}+\varphi_j(s)$,$j=1,2$,

则 $n(x,y_0,\delta,f_{\omega_0}(s)=\psi_j(s))$ 的级小于 $\rho(1/x)$.

任取 $\delta\in(0,\pi/2)$,则变换

$$Z(s,y_0,\delta)=\frac{\mathrm{e}^{\pi(\mathrm{i}y_0-s)/\delta}-1+2\mathrm{e}^{\pi(\mathrm{i}y_0-s)/2\delta}}{-\mathrm{e}^{\pi(\mathrm{i}y_0-s)/\delta}-1+2\mathrm{e}^{\pi(\mathrm{i}y_0-s)/2\delta}}$$

把带形区域 $\Delta(t_0,\delta)=\{s\,|\,\mathrm{Re}\,s=x>0,|\mathrm{Im}\,s-y_0|<\delta\}$ 保形变换单位圆 $|z|<1$,它的逆变换

$$S(z,y_0,\delta)=\mathrm{i}y_0-\frac{2\delta}{\pi}\ln\frac{-1+z+\sqrt{z+2z^2}}{1+z} \qquad (6)$$

把 $|z|<1$ 保形变换为带形区域 $\Delta(t_0,\delta)$,(6) 式中对数函数是 $(0,1)$ 上取值的那一解析分支.

这时 $g_{\omega_0}(z)=f(S(z,y_0,\delta))$,$g_j(z)=\psi_j(S(z,y_0,\delta))$ 是 $|z|<1$ 内的解析函数,且 $n(r,g_{\omega_0}(z)=g_i(z))$ 的级小于 $\rho(1/z)$,由文献[7]中引理,$N(r,g_{\omega_0}(z)=g_j(z))$ 的级与 $(1-r)n(r,g_{\omega_0}(z)=g_j(z))$ 的级相同,即 $N(r,g_{\omega_0}(z)=g_j(z))$ 的级小于 $\rho(1/x)(j=1,2)$,应用引理3,解析函数 $g_{\omega_0}(z)$ 亦即 $f_{\omega_0}(s)$ 的级小于 $\rho(1/x)$,从而导致矛盾.

置 $H=\{\omega\,|$ 对于 $f_{\omega_0}(s)$,$\mathrm{i}y_0$ 是 1 个具有有限例外小函数的强 Borel 点$\}$,要使引理5成立,只需证明 $P(H)=0$. 令

$Y=\{(c_1,c_2,\cdots)\,|\,c_j\in\mathbf{C}(j\in\mathbf{N}_+)$,
$(c_1,c_2,\cdots,c_N)\in\Gamma(\{c_n\}_{N+1}^{\infty})\}$,
$Q=\{\omega\,|\,Z_1(\omega),Z_2(\omega),\cdots)\in Y\}$.

因为 $\forall\omega\in H$,$(Z_1(\omega),Z_2(\omega),\cdots,Z_N(\omega))\in\Gamma(\{c_n\}_{N+1}^{\infty})\}$,则有 $(Z_1(\omega),Z_2(\omega),\cdots)\in Y$,所以 $H\subset Q$,于是

$$P(H)\leqslant P(Q)=\mu(I_Y)=$$
$$\lim_{m\to\infty}\int\cdots\int I_Y\mu_1(\mathrm{d}Z_1)\mu_2(\mathrm{d}Z_2)\cdots\mu_m(\mathrm{d}Z_m)\ (m>N)=$$
$$\lim_{m\to\infty}\int\cdots\int I_Y\mu_{N+1}(\mathrm{d}Z_{N+1})\cdots\mu_m(\mathrm{d}Z_m)\int\cdots\int I_{\Gamma(\{c_n\}_{N+1}^{\infty})}\cdot$$
$$\mu_1(\mathrm{d}Z_1)\cdots\mu_N(\mathrm{d}Z_N)\leqslant\lim_{m\to\infty}\int\cdots\int\sum_j\prod_{n=2}^{N}\mu_n(Z_n=c_{jn})\cdot$$
$$\mu_{n=N+1}^{\infty}(\mathrm{d}Z_{N+1})\cdots\mu_m(\mathrm{d}Z_m)\leqslant 2K^N\leqslant\varepsilon.$$

引理 5 得证.

3 定理及证明

定理 1 设随机 Dirichlet 级数(2),满足条件(3)及(5),则

$$\overline{\lim_{x\to0^+}}\frac{\ln\ln M(x,f_\omega)}{\ln U(1/x)}=1\ \mathrm{a.s.}\Leftrightarrow$$
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\ln^+\lambda_n}{\ln U(\lambda_n/\ln^+|\sigma_n|)}=1.$$

证 先证

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\ln^+\lambda_n}{\ln U(\lambda_n/\ln^+|\sigma_n|)}\geqslant1\Rightarrow$$
$$\overline{\lim_{x\to0^+}}\frac{\ln\ln M(x,f_\omega)}{\ln(1/x)}\geqslant1. \qquad (7)$$

设 $X_n(\omega)=Z_n(\omega)/\sigma_n$,并设

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\ln^+\lambda_n}{\ln U(\lambda_n/\ln^+|\sigma_n|)}=$$
$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\ln^+\lambda_{n_k}}{\ln U(\lambda_{n_k}/\ln^+|\sigma_{n_k}|)},$$

其中 $\frac{\ln^+\lambda_{n_k}}{\ln U(\lambda_{n_k}/\ln^+|\sigma_{n_k}|)}>0$.

由引理 1 $\overline{\lim_{k\to\infty}}|X_{n_k}(\omega)|\geqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}E|X_{n_k}|\geqslant\alpha$ a.s..

$\forall\omega\in\Omega$,对于 $\{X_{n_k}(\omega)\}$ 有子序列 $\{X_{n_{kl}}\}$,$|X_{n_{kl}}|\geqslant\alpha/2$,$\{n_{kl}\}$ 为 $\{n_k\}$ 的子序列(但依赖于 ω 的选择). 对于 $\frac{2}{\alpha}f_\omega(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{\alpha}Z_n(\omega)\mathrm{e}^{-\lambda_n s}$ 有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\ln^+\lambda_n}{\ln U(\lambda_n/\ln^+|2Z_n(\omega)/\alpha|)}\geqslant$$
$$\overline{\lim_{l\to+\infty}}\frac{\ln^+\lambda_{n_{kl}}}{\ln U(\lambda_{n_{kl}}/\ln^+|2\sigma_{n_{kl}}X_{n_{kl}}/\alpha|)}\geqslant$$
$$\overline{\lim_{l\to+\infty}}\frac{\ln^+\lambda_{n_{kl}}}{\ln U(\lambda_{n_{kl}}/\ln^+\sigma_{n_{kl}})}=$$
$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\ln^+\lambda_{n_{kl}}}{\ln U(\lambda_{n_{kl}}/\ln^+|\sigma_{n_{kl}}|)}=$$
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\ln^+\lambda_n}{\ln U(\lambda_n/\ln^+|\sigma_n|)}\geqslant1.$$

由引理 2 可知

$$\overline{\lim_{x\to0^+}}\frac{\ln\ln M(x,f_\omega)}{\ln U(1/x)}=$$
$$\overline{\lim_{x\to0^+}}\frac{\ln\ln M(x,2f_\omega/\alpha)}{\ln U(1/x)}\geqslant1\ \mathrm{a.s.},$$

即(7)式得证.

现在证明

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\ln^+\lambda_n}{\ln U(\lambda_n/\ln^+|\sigma_n|)}\leqslant 1\Leftrightarrow$$

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\ln\ln M(x,f_\omega)}{\ln(1/x)}\leqslant 1.$$

设 $X=\dfrac{\ln U(1/x)}{1+\ln U(1/x)}(x>0)$,由条件(5)可知,$\forall\varepsilon\in(0,1-l)$,$\exists K>0$,使得当 $n>K$ 时,有 $-\lambda n\leqslant-\ln^{1/(1-\varepsilon)}n=-\ln n(\ln n)^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}$.

因此结合引理 1,有

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}Z_n(\omega)e^{-\lambda_n x}\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n X_n(\omega)e^{-\lambda_n x}\right|\leqslant$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|X_n(\omega)||\sigma_n e^{-\lambda_n X}\exp\left(-\frac{\lambda_n x}{1+\ln U(1/x)}\right)\leqslant$$

$$m(X,f)\sum_{n=0}^{\infty}|X_n(\omega)|\exp\left(-\frac{\lambda_n x}{1+\ln U(1/X)}\right)\leqslant$$

$$m(X,f)\left(X_0(\omega)+\sum_{N=1}^{\infty}C(\omega)n\cdot\right.$$

$$\left.\exp\left(-\frac{\ln n(\ln n)^{\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)}}x}{1+\ln U(1/x)}\right)\right)\text{a.s.}\leqslant m(X,f)\left(X_0(\omega)+\right.$$

$$\left.\sum_{n=1}^{\infty}C(\omega)n\exp(-\sigma\ln n(\ln n)^{\varepsilon/(1-\varepsilon)})\right),$$

其中 $\delta=\dfrac{x}{1+\ln U(1/x)}$. 为了使得 $\delta\ln\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}>3$,可取 $T=\exp((3/\delta)^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}})$,则

$$M(x,f_\omega)\leqslant M(X,f)(|X_0(\omega)|+C(\omega)\sum_{N=1}^{K-1}n+$$

$$\sum_{n>T}C(\omega)\frac{1}{n^2}+\sum_{K\leqslant n\leqslant T}C(\omega)n^{1-\delta})\text{a.s.}\leqslant$$

$$M(X,f)\left(B(\omega)+C(\omega)\int_K^T t^{1-\delta}dt\right)\leqslant$$

$$M(X,f)\left(B(\omega)+C(\omega)\frac{1}{2-\delta}T^{2-\delta}\right),$$

其中 $B(\omega)$ 是 1 个 a.s. 有界正随机函数,故有 $\ln M(x,f_\omega)\leqslant\ln M(X,f)+\ln B(\omega)+(2-\delta)\ln T=\ln M(X,f)+\ln B(\omega)+(2-\delta)(3/\delta)^{(1-\varepsilon)/\varepsilon}$.

故结合引理 2,有

$$\varlimsup_{x\to0^+}\frac{\ln\ln M(x,f_\omega)}{\ln(1/x)}\leqslant\varlimsup_{x\to0^+}\frac{\ln\ln M(x,f)}{\ln(1/x)}\leqslant 1\quad\text{a.s.}.$$

定理 2　设随机 Dirichlet 级数(2),满足条件(3)和(5)及

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\ln\lambda_n}{\ln U(\lambda_n/\ln^+\sigma_n)}=1,\tag{8}$$

则 $\forall y_0\in\mathbf{R}$,有

$$\varlimsup_{x\to0^+}\frac{\ln^+\ln^+|f_\omega(x+iy_0)|}{\ln U(1/x)}=1\quad\text{a.s.}.\tag{9}$$

证　由定理 1 可知

$$\varlimsup_{x\to0^+}\frac{\ln^+\ln^+|f_\omega(x+iy_0)|}{\ln U(1/x)}\leqslant 1\quad\text{a.s.}.$$

用推广的 Palay-Zygmund 引理[1],类似于文献[6]定理 3.2 可证(9)式成立.

由于 $\{Z_n\}$ 为非退化及文献[6]中定理 2.1 和定理 3.3 可得.

定理 3　设随机 Dirichlet 级数(1)满足条件(3),(5)及(8),则 $\forall y\in\mathbf{R}$,iy 几乎必然是 $f_\omega(s)$ 的没有有限例外值的 $\rho(1/x)$ 级 Borel 点,即 $\forall\varepsilon\in\Omega/E$,$\forall\varepsilon>0$ 以及 $\forall a\in\mathbf{C}$,有

$$\varlimsup_{x\to0^+}\frac{\ln(x,|\operatorname{Im}s-y|<\varepsilon,f_\omega(s)=a)}{\ln U(1/x)}=1,$$

这里 $P(E)=0$.

引理 2 中的条件(5)比文献[6]中的定理 2.4 的条件 $\varlimsup_{n\to+\infty}\ln\ln n/\ln\lambda_n<1/2$ 要弱一些.

定理 4　设随机 Dirichlet 级数(1)满足条件(3),(5)及(8),则级数(1)几乎必然以虚轴上每一点为没有例外小函数的强 Borel 点,即对于几乎必然的 $\omega\in\Omega$,$\forall y\in\mathbf{R}$,$\delta>0$ 及 $\forall\varphi\in H_1$(没有例外小函数),(4)式恒成立.

证　已知随机 Dirichlet 级数满足条件(5)和(8),则由定理 3 得 $\forall y\in\mathbf{R}$,iy 几乎必然是 $f_\omega(s)$ 的没有有限例外值的 $\rho(1/x)$ 级 Borel 点. 再由引理 4,$\forall y\in\mathbf{R}$,iy 几乎必然是 $f_\omega(s)$ 的没有有限例外值的 $\rho(1/x)$ 级强 Borel 点(至多只有 1 个例外小函数). 结合引理 5 即可得出定理 4 结论.

4　参考文献

[1] 余家荣,丁晓庆,田范基. Dirichlet 级数与随机 Dirichlet 级数的值分布[M]. 武汉: 武汉大学出版社,2004.

[2] 孔荫莹,霍颖莹. 慢增长的随机 Dirichlet 级数[J]. 数学年刊,2012,33A(3):323-328.

[3] Sun Daochun,Yu Jiarong. On the distribution of values of random Dirichlet series[J]. Chin Ann of Math,1990,11B(1):33-44.

[4] 高宗升,孙道椿. 涉及小函数的随机 Dirichlet 级数[J]. 数学学报,2003,46(2):397-402.

[5] 田范基. 半平面上的无限级 Dirichlet 级数的值分布[J]. 数学物理学报,2000,20(2):278-287.

[6] 高宗升,孙道椿. 无限级随机 Dirichlet 级数的值分布[J]. 数学年刊 A 辑: 中文版,1993,14A:(6)677-685.

[7] 孙道椿. 半平面上的随机 Dirichlet 级数的增长性[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,1995,19(2):128-134.

(下转第 264 页)

The Study on Provincial Technology Innovation Spillover Effect under FDI and Governmental Support

ZHOU Xuan,TAO Changqi*

(School of Statistics,Jiangxi University of Finance and Economics,Nanchang Jiangxi 330013,China)

Abstract: Through using the spatial econometric model and the panel threshold model,the empirical study is done on the non-linear threshold effect of FDI and governmental support as well as the spatial correlation of technological innovation capability index variable. The results show that GOV,FDI and provincial technology innovation spillover effect have strong spatial autocorrelation. Their impact strength expresses as double threshold and triple threshold respectively. The keys to efficient spillover of provincial technology innovation are optimizing the spatial structure of government support and foreign investment when GOV and FDI are coupled.

Key words: provincial technology innovation; governmental support; FDI; spatial spillover; threshold characteristics

(责任编辑:曾剑锋)

(上接第 255 页)

[8] Xu Hongyan,Kong Yinying,Wang Hua. The approximation problem of Dirichlet series with regular growth [J]. Journal of Computational Analysis and Applications,2017,23(6):1016-1028.

[9] Huo Yingying,Kong Yinying. On the generalized order of Dirichlet series [J]. Acta Mathematica Scientia. 2015,35B(1):133-139.

[10] Kong Yinying,Yang Yan. On the growth properties of the Laplace-Stieltjes transform [J]. Complex Variables and Elliptic Equations,2014,59(4):553-563.

[11] 孔荫莹,洪勇. On the growth of Laplace-Stieltjes transforms and the singular direction of complex analysis(英文) [M]. 广州:暨南大学出版社,2010.

[12] 孔荫莹,霍颖莹. 右半平面解析的 Laplace-Stieltjes 变换的广义级与型 [J]. 数学学报:中文版,2016,59(1):91-98.

The Random Dirichlet Series of Infinite Order Dealing with Small Function

JIN Qiyu[1],KONG Yinying[2*]

(1. School of Mathematical Science,Inner Mongolia University,Hohhot Neimonggu,010021,China;

2. School of Statistics and Mathematics,Guangdong University of Finance and Economics,Guangzhou Guangdong 510320,China)

Abstract: The infinite order function is used to study the value distribution of the random Dirichlet series. It is concluded that for random Dirichlet series of infinite order in the right half plane,every point iy is almost surely a strong Borel point without finite exceptional small functions,which extended some results of Borel points.

Key words: random Dirichlet series; small functions; strong Borel point

(责任编辑:王金莲)