文章编号:1000-5862(2017)03-0275-05

一类区间 2 次-线性双层规划的解法

高小妮,孙玉华*

(北京科技大学数理学院,北京 100083)

摘要:针对上层目标函数含有区间系数的 2 次-线性双层规划问题,提出了区间 2 次-线性双层规划的最优值区间的定义,在此基础上把区间 2 次-线性双层规划模型转化为求解最好最优值和最差最优值的 2 个确定性模型,进而利用混合整数规划方法求解. 最后给出数值算例验证该方法的有效性.

关键词:2 次-线性双层规划; 最好最优值; 最差最优值; 最优值区间

中图分类号:O 221 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.03.12

0 引言

双层规划问题在经济管理、物流领域、交通管理以及其他领域有着广泛应用,其中非线性双层规划问题在工程中应用比较广泛,而 2 次双层规划问题是非线性双层规划问题中最常见的一种数学规划问题. 目前,求解 2 次双层规划的主要算法有分支定界法、罚函数法、信赖域算法和遗传算法. 李宏等[1] 考虑了下层目标函数为线性、上层目标函数为非线性的双层规划模型,并提出了将遗传算法与单纯形法相结合的混合遗传算法. 王广民等[2] 对双层规划研究现状做了总结. A. S. Strekalovsky 等[3] 提出了求解 2 次-线性双层规划的局部搜索方法,利用 K-T 条件将双层规划转化为单层规划,再通过局部搜索方法得到最优解. 胡长英[4] 总结了双层规划的基本理论、算法及其在实际问题中的应用. 孟敏等[5] 在文献 [1] 的基础上,提出了基于正态分布的分布估计算法,求解了上层目标函数为 2 次的双层规划问题,提高了遗传算法的效率.

虽然确定型双层规划问题得到了解决,但在实际生活中不确定性因素出现的几率越来越大,所以众多学者开始对区间规划模型做出了研究. 对于区间线性规划,文献 [6-7] 定义了区间线性规划的标准型,并求解了区间线性规划的最好最优值和最差最优值,进而确定了其最优值区间. R. E. Moore 等[8] 提出的区间算法是解决区间规划的重要手段. 王建忠[9] 在文献 [6-7] 的基础上对区间线性双层规划模型做了进一步的总结和探究,并且设计了求解最好最优值 kth-best 算法. H. I. Calvete 等[10] 设计了 KBB 和 KBW 算法求得区间线性双层规划的最好最优解和最差最优解. 对于区间 2 次规划,文献 [11-12] 讨论了区间 2 次规划问题,利用对偶定理和最优性条件将原问题转化为求解其上界和下界的 2 个确定性的 2 次规划问题,并给出了数值解法. 徐晓宁等[13] 针对市场上不允许卖空的情况,提出了证券投资组合的区间 2 次规划模型,通过应用区间数排序方法,将区间 2 次规划模型转化为确定性的 2 次规划模型进行求解. Li Wei 等[14] 提出了含有等式和不等式约束的区间 2 次规划模型,并提出了一种检验零对偶间隙简单有效的方法,最后用其求得了区间 2 次规划模型的精确上界. 但是在实际问题中,随着递阶决策过程的复杂化,如经济中价格的变动、物流中配送成本的变化、生产商实际需求量的变动等都会引起收益的变化,双层规划中的目标函数并非都是线性函数,单纯的区间线性双层规划模型和单层区间 2 次规划模型已经不能很好解决这些问题,所以有必要研究区间非线性双层规划模型.

目前,对区间 2 次-线性双层规划做出的研究还很少. 本文将最优值区间的方法推广到区间 2 次-线性双层规划模型,首先提出最优值区间的概念,并给出区间 2 次-线性双层规划的模型; 然后利用最优值区间求解; 最后给出数值算例,验证该方法的有效性.

收稿日期:2016-12-28

基金项目:国家自然科学基金(11471010)资助项目.

通信作者:孙玉华(1968-),女,河北任丘人,副教授,博士,主要从事最优化理论与应用方面的研究. E-mail:318875341@qq.com

1 预备知识

定义1[9] 称 $a=[a^L,a^U]=\{x: a^L\leqslant x\leqslant a^U\}$ 为区间数,a^L 和 a^U 分别称为区间数 a 的下界和上界. 当 $a^L=a^U$ 时,区间数退化为一个实数; 当 $a^L\geqslant 0$ 时,称 a 为正区间数. 区间数的全体记为 $I(R)$.

定义2[9] 令 $a=[a^L,a^U]$ 和 $b=[b^L,b^U]$ 为区间数,它们之间的2元运算关系如下:

$$a+b=[a^L,a^U]+[b^L,b^U]=[a^L+b^L,a^U+b^U],$$
$$a-b=[a^L,a^U]-[b^L,b^U]=[a^L-b^U,a^U-b^L],$$
$$ka=\begin{cases}[ka^L,ka^U],k\geqslant 0,\\ [ka^U,ka^L],k<0.\end{cases}$$

非线性规划-分支定界算法[15](NLP-BB):

Step 1 节点选择. 搜索分支定界树,选择某一节点,在此节点处求解 NLP 问题. 若此问题不可行,删除此节点,并重新搜索分支定界树; 否则,得到的解为$(\hat{x},\hat{y})$.

Step 2 剪枝. 若在此点处目标函数大于当前上界,这部分可行域显然不包含最优解,则剪枝.

Step 3 分支. 主要对整数约束变量 $\hat{y}$ 进行检验. 若 $\hat{y}$ 不满足整数约束条件,不妨设 $\hat{y}$ 为小数,则问题分支为左右2个子节点,分别添加左分支约束 $y_i\leqslant[\hat{y}_i]$ 及右分支约束 $y_i\geqslant[\hat{y}_i]+1$; 否则,若 $\hat{y}$ 满足整数约束条件,且目标函数值小于当前的最优值,则更新上界,并且删去目标函数值大于当前上界的分支.

Step 4 检查分支定界树是否为空. 若分支定界树非空,返回第1步; 否则,算法终止并输出当前最优解.

2 区间2次-线性双层规划模型

本文考虑如下形式的区间2次-线性双层规划模型:

$$\min_{x} F=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm T},\boldsymbol{y}^{\mathrm T})\boldsymbol{Q}^I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm T}+(\boldsymbol{c}_1^I)^{\mathrm T}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}_1^I)^{\mathrm T}\boldsymbol{y}$$
$$\min_{y} f=\boldsymbol{c}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{y}$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{h},$$
$$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}, \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_{n_1})^{\mathrm T}$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_{n_2})^{\mathrm T}$,$\boldsymbol{Q}^I$,$\boldsymbol{c}_1^I$,$\boldsymbol{d}_1^I$ 为区间数. $\boldsymbol{Q}^I=(q_{ij}^I)_{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}=[\boldsymbol{Q}^L,\boldsymbol{Q}^U]$,记 $\boldsymbol{Q}^L=(q_{ij}^L)_{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}$,$\boldsymbol{Q}^U=(q_{ij}^U)_{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}$. $\forall q_{ij}\in q_{ij}^I$,确定性矩阵 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})_{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}$ 是半正定矩阵. $\boldsymbol{c}_1^I=[\boldsymbol{c}_1^L,\boldsymbol{c}_1^U]$,记 $\boldsymbol{c}_1^L=(c_{11}^L,c_{12}^L,\cdots,c_{1n_1}^L)^{\mathrm T}$,$\boldsymbol{c}_1^U=(c_{11}^U,c_{12}^U,\cdots,c_{1n_1}^U)^{\mathrm T}$. $\boldsymbol{d}_1^I=[\boldsymbol{d}_1^L,\boldsymbol{d}_1^U]$,记 $\boldsymbol{d}_1^L=(d_{11}^L,d_{12}^L,\cdots,d_{1n_2}^L)^{\mathrm T}$,$\boldsymbol{d}_1^U=(d_{11}^U,d_{12}^U,\cdots,d_{1n_2}^U)^{\mathrm T}$. $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n_1}$,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{m\times n_2}$,$\boldsymbol{c}_2=(c_{21},c_{22},\cdots,c_{2n_1})^{\mathrm T}$,$\boldsymbol{d}_2=(d_{21},d_{22},\cdots,d_{2n_2})^{\mathrm T}$,$\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_m)^{\mathrm T}$. 此外,$\max F$ 型可通过 $\min -F$ 变成以上形式.

3 模型求解最优值区间

3.1 最优值区间

定义3 区间2次-线性双层规划(1)的约束域:

$$\Omega=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{h},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}\};$$

约束域 Ω 在上层决策空间的投影:

$$S=\{\boldsymbol{x}\mid\exists\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{h},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}\};$$

对于 $\boldsymbol{x}\in S$,下层规划的合理反应集:

$$M(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}\in\arg\min\{\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}_2\boldsymbol{y},\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{h}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}\}\};$$

区间2次-线性双层规划(1)的诱导域:

$$IR=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\Omega,\boldsymbol{y}\in M(\boldsymbol{x})\}.$$

假设1 约束域非空且为紧集.

假设2 $\forall\boldsymbol{x}\in S$,下层规划有唯一最优解.

定义4 当取定 $\boldsymbol{Q}\in[\boldsymbol{Q}^L,\boldsymbol{Q}^U]$,$\boldsymbol{c}_1\in[\boldsymbol{c}_1^L,\boldsymbol{c}_1^U]$,$\boldsymbol{d}_1\in[\boldsymbol{d}_1^L,\boldsymbol{d}_1^U]$ 时,如果$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in IR$,则称$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$为区间2次-线性双层规划(1)的一个可行解; 如果$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)\in IR$ 且 $\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in IR$,有 $F(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)\leqslant F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,则称$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$为区间2次-线性双层规划(1)的一个最优解,称 $F(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ 为(1)式的一个最优值.

定义5 区间2次-线性双层规划问题(1)的最优值的集合记为 Ψ,称 $F^U=\max\{F\mid F\in\Psi\}$ 为(1)式的最差最优值,相应的解称为(1)式的最差最优解; 称 $F^L=\min\{F\mid F\in\Psi\}$ 为(1)式的最好最优值,相应的解称为(1)式的最好最优解; 称 $[F^L,F^U]$ 为最优值区间.

3.2 求解最好最优值

对于区间2次-线性双层规划问题(1),每取定一组系数$(q_{ij},\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{d}_1)$,就变成了确定型的2次-线性双层规划,即可求得(1)式的一个可能最优值. 因为每取定一个 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{c}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{x}$ 为常数,因此(1)式的最好最优值和最好最优解可通过3层规划问题(2)得到.

$$F^L=\min_{(q_{ij},c_{1k},d_{1t})\in E}\ \min_{x} F=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm T},\boldsymbol{y}^{\mathrm T})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm T}+\boldsymbol{c}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{y}$$
$$\min_{y} f=\boldsymbol{d}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{y}$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{h},$$
$$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}, \quad (2)$$

其中 $E=\{(q_{ij},c_{1k},d_{1t})\mid q_{ij}\in q_{ij}^{I},c_{1k}\in c_{1k}^{I},d_{1t}\in d_{1t}^{I},i,j=1,\cdots,n_1+n_2,k=1,\cdots,n_1,t=1,\cdots,n_2\}$.

因为 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}$，所以有

$(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}^{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\leqslant(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\leqslant(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}^{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}$，$(\boldsymbol{c}_1^{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant(\boldsymbol{c}_1^{U})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，$(\boldsymbol{d}_1^{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant(\boldsymbol{d}_1^{U})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

因此目标函数的最好最优值应在 $\boldsymbol{Q}^{I},\boldsymbol{c}_1^{I},\boldsymbol{d}_1^{I}$ 取下界时取得，即

$$F^{L}=\min_{x}F=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}^{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{c}_1^{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}_1^{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

下层规划问题：

$$\begin{aligned}&\min_{y}f=\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\&\text{s.t. }\boldsymbol{By}+\boldsymbol{Ax}\leqslant\boldsymbol{h},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{aligned}\tag{3}$$

引入松弛变量 $w\in\mathbf{R}^{m}$，由 K-T 条件可知下层规划(3)可转化为

$$\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{h},\boldsymbol{d}_2+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=0,$$
$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=0,\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}\geqslant\boldsymbol{0}.$$

所以求解(1)式的最好最优解和最好最优值等价于求解单目标问题：

$$\begin{aligned}&F^{L}=\min_{x,y,v,u,w}F=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}^{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{c}_1^{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}_1^{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\&\text{s.t. }\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{h},\\&\quad\boldsymbol{d}_2+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=0,\\&\quad\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=0,\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{aligned}\tag{4}$$

引入 0-1 变量 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n_2})^{\mathrm{T}}$，$\eta_i=\{0,1\}$，$\lambda_j=\{0,1\}$，其中 $i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n_2$. M 为充分大的正数，因此问题(4)的最好最优解和最好最优值可通过混合整数规划(5)，利用分支定界法[15]求解

$$\begin{aligned}&F^{L}=\min_{x,y,v,u,w}F=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}^{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{c}_1^{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}_1^{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\&\text{s.t. }\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{h},\boldsymbol{d}_2+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\\&\quad u_i\leqslant M\eta_i,w_i\leqslant M(1-\eta_i),\\&\quad v_j\leqslant M\lambda_j,y_j\leqslant M(1-\lambda_j),\\&\quad\lambda_j=\{0,1\},\eta_i=\{0,1\},\\&\quad\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{aligned}\tag{5}$$

3.3 求解最差最优值

对于区间 2 次-线性双层规划(1)的最差最优值和最差最优解，每取定一个 $x,\boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}x$ 为常数，可以通过 3 层规划问题(6)求得.

$$\begin{aligned}&F^{U}=\max_{(q_{ij},c_{1k},d_{1t})\in E}\min_{x}F=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\\&\min_{y}f=\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\\&\text{s.t. }\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}\leqslant\boldsymbol{h},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{aligned}\tag{6}$$

由 3.2 节讨论可知，

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leqslant\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}^{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{c}_1^{U})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}_1^{U})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

所以

$$\max_{(q_{ij},c_{1k},d_{1t})\in E}\min_{x}F=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leqslant\max_{(q_{ij},c_{1k},d_{1t})\in E}\min_{x}F=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}^{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{c}_1^{U})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}_1^{U})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

另一方面，$q_{ij}^{U}\in q_{ij}^{I},c_{1k}^{U}\in c_{1k}^{I},d_{1t}^{U}\in d_{1t}^{I}$，因此有

$$\max_{(q_{ij},c_{1k},d_{1t})\in E}\min_{x}F=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\geqslant\max_{(q_{ij},c_{1k},d_{1t})\in E}\min_{x}F=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}^{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{c}_1^{U})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}_1^{U})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

因此目标函数的最差最优值应在 $\boldsymbol{Q}^{I},\boldsymbol{c}_1^{I},\boldsymbol{d}_1^{I}$ 取上界时取得，即

$$F^{U}=\min_{x}F=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}^{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{c}_1^{U})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}_1^{U})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

类似于 3.2 节对问题(6)下层规划进行整理，引入松弛变量 $w\in\mathbf{R}^{m}$，利用下层规划的 K-T 条件，可将(6)式转化为单层规划(7). 因此求解(1)的最差最优解和最差最优值等价于求解单目标问题：

$$\begin{aligned}&F^{U}=\min_{x,y,v,u,w}F=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}^{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{c}_1^{U})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}_1^{U})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\&\text{s.t. }\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{h},\boldsymbol{d}_2+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=0,\\&\quad\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=0,\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{aligned}\tag{7}$$

引入 0-1 变量 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n_2})^{\mathrm{T}}$，$\eta_i=\{0,1\}$，$\lambda_j=\{0,1\}$. M 为充分大的正数，因此问题(7)的最差最优解和最差最优值可以通过混合整数规划(8)，利用分支定界法[15]求解

$$\begin{aligned}&F^{U}=\min_{x,y,v,u,w}F=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}^{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{c}_1^{U})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}_1^{U})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\&\text{s.t. }\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{h},\boldsymbol{d}_2+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\\&\quad u_i\leqslant M\eta_i,w_i\leqslant M(1-\eta_i),v_j\leqslant M\lambda_j,\\&\quad y_j\leqslant M(1-\lambda_j),\lambda_j=\{0,1\},\eta_i=\{0,1\},\\&\quad\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{aligned}\tag{8}$$

3.2 节和 3.3 节分别求得区间 2 次-线性双层规划模型(1)的最好最优值和最差最优值，因此可得模型(1)的最优值区间 $[F^{L},F^{U}]$.

4 数值算例

下面通过数值算例检验模型和算法的有效性.

例1 计算下面区间2次-线性双层规划的最优值区间.

$$\min_x F(x,y) = [1,5]x^2 + [1,3.5]y^2$$

$$\min_y f(x,y) = -y$$

$$\text{s.t. } 3x+y\leqslant 15, x+y\leqslant 7,$$
$$x+3y\leqslant 15, x\geqslant 0, y\geqslant 0.$$

根据(5)式可知,例1的最好最优解和最好最优值可由下式得到,

$$F^L = \min_{x,y,v,u,w} F(x,y) = x^2+y^2$$

$$\text{s.t. } 3x+y+w_1=15, x+y+w_2=7,$$
$$x+3y+w_3=15, u_1+u_2+3u_3-v-1=0,$$
$$u_i\leqslant M\eta_i, w_i\leqslant M(1-\eta_i), v\leqslant M\lambda,$$
$$y\leqslant M(1-\lambda), \eta_i,\lambda=\{0,1\}, i=1,2,3,$$
$$x\geqslant 0, y\geqslant 0, u_i\geqslant 0, v\geqslant 0, w_i\geqslant 0.$$

取$M=10^3$,得最好最优解为$(1.5,4.5)^{\mathrm{T}}$,最好最优值为22.500.

根据文献[16]可知,此算法是有效的,并且比文献[16]中求得的解更精确.

由(8)式知,例1的最差最优解和最差最优值可转化为求解如下问题:

$$F^U = \min_{x,y,v,u,w} F(x,y) = 5x^2+3.5y^2$$

$$\text{s.t. } 3x+y+w_1=15, x+y+w_2=7,$$
$$x+3y+w_3=15, u_1+u_2+3u_3-v-1=0,$$
$$u_i\leqslant M\eta_i, w_i\leqslant M(1-\eta_i), v\leqslant M\lambda,$$
$$y\leqslant M(1-\lambda), \eta_i,\lambda=\{0,1\}, i=1,2,3,$$
$$x\geqslant 0, y\geqslant 0, u_i\geqslant 0, v\geqslant 0, w_i\geqslant 0.$$

取$M=10^3$,得最差最优解为$(1.082,4.639)^{\mathrm{T}}$,最差最优值为81.175.

因此可得,例1的最优值区间为[22.500,81.175].

由数值算例的结果分析可知,最好最优解、最差最优解和最优值区间都是可行的,证明了模型和算法的有效性和可行性.

5 结论

非线性双层规划在递阶优化问题中的应用越来越广泛,实际问题中系数不能给出确定值的情况很普遍,从而需要采用区间数来估计系数的变化范围.本文给出区间2次-线性双层规划模型,并提出最好最优值和最差最优值以及最优值区间的概念.通过解得的最优值区间,可提供给决策者一定的参考价值,以便更好地解决实际问题中的递阶优化问题.数值算例验证了模型的有效性.目前,区间非线性双层规划的研究成果还很少,有待更多的学者提出更好的解决方法,进而做出更深入的研究.

6 参考文献

[1] 李宏,王宇平.解非线性2层规划的一种混合遗传算法[J].西安电子科技大学学报:自然科学版,2002,29(6):840-843.

[2] 王广民,万仲平,王先甲.2(双)层规划综述[J].数学进展,2007,36(5):513-529.

[3] Strekalovsky A S,Orlov A V,Malyshev A V. Local search in a quadratic-linear bi-level programming problem[J]. Numerical Analysis and Applications,2010,13(1):59-70.

[4] 胡长英.双层规划理论及其在管理中的应用[M].北京:知识产权出版社,2012.

[5] 孟敏,贾飞.EDA算法求解一类特殊的非线性双层规划问题[J].电子科技,2014,2(27):10-13.

[6] 郭均鹏,吴育华.区间线性规划的标准型及其求解[J].系统工程,2003,21(3):79-82.

[7] 郭均鹏,李汶华.区间线性规划的标准型及其最优值区间[J].管理科学学报,2004,7(3):59-63.

[8] Moore R E,Kearfott R B,Cloud M J. Introduction to interval analysis[M]. SIAM:Philadelphia,2009.

[9] 王建忠.区间线性双层规划方法研究[D].天津:天津大学,2010.

[10] Calvete H I,Gale Carmen. Linear bi-level programming with interval coefficients[J]. Journal of Computation and Applied Mathematics,2012,236(15):3751-3762.

[11] Liu Shiang-Tai,Wang Rong-Tsu. A numerical solution method to interval quadratic programming[J]. Applied Mathematics and Computation,2007,189(2):1247-1281.

[12] Li Wei,Tian Xiaoli. Numerical solution method for general interval quadratic programming[J]. Applied Mathematics and Computation,2008,202(2):589-595.

[13] 徐晓宁,何枫.不允许卖空下证券投资组合的区间二次规划问题[J].中国管理科学,2012,20(3):57-62.

[14] Li Wei,Xia Mengxue,Li Haohao. Some results on the upper bound of optimal values in interval convex quadratic programming[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2016,302:38-49.

[15] 刘明明,崔春风,童小娇,等.混合整数非线性规划的算法软件及最新进展[J].中国科学:数学,2016,46(1):1-20.

[16] 贾飞.解非线性双层规划算法的研究[D].西安:西安电子科技大学,2014.

The Quadratic-Linear Bi-Level Programming with Interval Coefficients

GAO Xiaoni，SUN Yuhua*
（School of Mathematics and Physics，University of Science and Technology Beijing，Beijing 100083，China）

Abstract: The quadratic-linear bi-level programming model with interval coefficients for upper objective function is studied. Firstly，the definition of the optimal value interval of quadratic-linear bi-level programming with interval coefficients is proposed. Secondly，the quadratic-linear bi-level programming model with interval coefficients is converted into two deterministic models. Then mixed integer programming method is used to solve the best optimal value and worst optimal value. Finally，numerical examples are given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.
Key words: quadratic-linear bi-level programming; best optimal objective value; worst optimal objective value; optimal objective value interval

（责任编辑：曾剑锋）

（上接第 274 页）

The Estimation of the Overnight Volatility

XIAO Min [1]，LI Can [2]，JIANG Tao [1*]
（1. School of Statistics and Mathematics，Zhejiang Gongshang University，Hangzhou Zhejiang 310018，China;
2. School of Mathematics and Statistics，Hunan University of Commerce，Changsha Hunan 410205，China）

Abstract: A new estimation of overnight volatility of individual stock returns based on the generalized dynamic factor model is proposed. Using the data of 24 stocks of the Shanghai Stock Exchange 50 index，the overnight volatility level of them is studied. Empirical results show that the new estimation performs better than the squared overnight return and dose eliminate part of the noisy component.
Key words: overnight volatility; generalized dynamic factor model; realized volatility

（责任编辑：曾剑锋）