文章编号:1000-5862(2017)04-0360-07

正规密码 rpp 半群上的同余

郭俊颖[1],郭小江[2*],叶火平[2]
(1. 江西师范大学科技学院,江西 南昌 330027;2. 江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要: 利用富足半群理论对正规密码 rpp 半群的同余进行了研究. 通过引入正规密码 rpp 半群的 $\mathscr{L}^*$-酉同余聚的概念,给出了这类半群上的 $\mathscr{L}^*$-酉同余的结构. 另外,也考虑了一些特殊 $\mathscr{L}^*$-酉同余.

关键词: rpp 半群; 超 rpp 半群; 密码 rpp 半群; 酉同余
中图分类号: O 152.7 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.04.06

0 引言

令 S 为半群. 称 $a\in S$ 为完全正则的(completely regular),如果存在幂等元 e 使得 $(a,e)\in\mathscr{H}$. 称半群 S 为完全正则半群(completely regular semigroup),如果 S 的所有元素都是完全正则的. 完全正则半群是一类非常重要的半群,在半群理论研究中占有重要地位. 半群论学者尝试着推广完全正则半群,在这些推广工作中最成功之一的是超富足半群,超富足半群是富足半群理论的推广.

rpp 半群是正则半群的推广,并且以富足半群作为真子类. 在 rpp 半群理论中,定义类似于完全正则半群的半群类是非常有意义的. 作为完全正则半群在 rpp 半群中一种推广形式,郭聿琦等[1]定义了强 rpp 半群,随后强 rpp 半群受到了极大关注[2].

强 rpp 半群的研究可以追溯到 20 世纪 70 年代,J. B. Fountain 定义并研究了 Clifford rpp 半群(C-rpp semigroup). C-rpp 半群定义为具有中心幂等元的强 rpp 半群,等价地说,一个 C-rpp 半群恰为左消幺半群的半格. C-rpp 半群是 Clifford 半群在 rpp 半群理论中的推广,这类半群是一类重要 rpp 半群类,也是构成强 rpp 半群重要组件.

2010 年,郭小江等[3]定义并研究了超 rpp 半群,这类半群可以表示为左消幺半群上 Rees 矩阵半群(即完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群)的半格,是强 rpp 半群的真子类. 与强 rpp 半群相比,超 rpp 半群离完全正则半群更"近"[4]. 有许多学者从事超 rpp 半群的研究工作,如:1) 左 C-rpp 半群. 等价地说,左C-rpp半群为幂等元组成左正则带的超 rpp 半群[1,5-8]. 2) 右 C-rpp 半群. 所谓右 C-rpp 半群是指幂等元组成右正则带的超 rpp 半群[9-10]. 3) 伪 C-rpp 半群. 等价地说,伪 C-rpp 半群同构于左正规带与右 C-rpp 半群的织积[11]. 4) 完备 rpp 半群. 所谓完备 rpp 半群是指幂等元集 $E(S)$ 为正规带,且满足 $\forall a,b\in S,(ab)^{\diamond}=a^{\diamond}b^{\diamond}$ 的强 rpp 半群 S;等价地,$E(S)$ 为幂等元集构成正规带的超 rpp 半群[12-13]. 5) 正则 OS-rpp 半群. 称幂等元集构成一个带的超 rpp 半群是 OS-rpp 半群. 如果幂等元带是正则的,则称 OS-rpp 半群为正则 OS-rpp 半群. 正则 OS-rpp 半群同构于左 C-rpp 半群与右 C-rpp 半群的织积[14].

2013 年,郭小江等[15]定义密码 rpp 半群. 所谓密码 rpp 半群是指关系 $\overline{\mathscr{H}}=\overline{\mathrm{R}}\cap\mathscr{L}^{(l)}$ 为同余的强 rpp 半群. 2013 年,邱小伟[16]定义了正规密码 rpp 半群. 事实上,正规密码 rpp 半群恰为完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群的强半格. 本文主要研究正规密码 rpp 半群上的同余.

1 预备知识

本文将采用文献[7]的术语和记号. 令 S 为半群. 作为通常 Green 关系 $\mathscr{L}$ 和 R 的推广,J. B. Fountain 等定义了关系 $\mathscr{L}^*$ 和 R^*. 下面的引理给出了 $\mathscr{L}^*$ 的一个刻画,对偶地叙述可知,对 R^* 关系也成立.

引理 1[18] 令 $a,b\in S$,则 $a\mathscr{L}^* b$ 当且仅当 $\forall x,y\in S^1$,$ax=ay\Leftrightarrow bx=by$.

收稿日期:2017-03-19
基金项目:国家自然科学基金(11361027,116610420),江西省自然科学基金(20161BAB201018)和江西省教育厅科研课题(GJJ14251)资助项目.
通信作者:郭小江(1967-),男,江西宜春人,教授,博士,主要从事半群代数理论的研究. E-mail:xjguo@jxnu.edu.cn

众所周知，$\mathscr{L}^*$ 为右同余，R^* 为左同余. 一般地，$\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}^*$，$\mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}^*$. 对于正则元 a，b，$a\mathscr{L}(\mathrm{R})b$ 当且仅当 $a\mathscr{L}^*(\mathrm{R}^*)b$. 特别地，对于正则半群 S，$\mathscr{L}_S = \mathscr{L}_S^*$，$\mathrm{R}_S = \mathrm{R}_S^*$.

称半群 S 为 rpp 半群，如果 $\forall a \in S$，aS^1 作为 S^1-系是投射的. 等价地，S 为 rpp 半群当且仅当每一个 $\mathscr{L}^*$-类都含有幂等元. 对偶地，定义 lpp 半群. 称半群 S 为富足半群（abundant semigroup），如果 S 的每一个 $\mathscr{L}^*$-类和每一个 R^*-类都含有幂等元. 易知，S 为富足半群当且仅当 S 既为 rpp 半群又为 lpp 半群.

为研究 rpp 半群，郭聿琦等"糅合"Green 关系和 Green*-关系定义了 Green(l)-关系，即 $\mathscr{L}^{(l)} = \mathscr{L}_S^*$，$\mathrm{R}^{(l)} = \mathrm{R}_S^*$，$\mathscr{H}^{(l)} = \mathscr{L}^{(l)} \cap \mathrm{R}^{(l)}$，$\mathscr{D}^{(l)} = \mathscr{L}^{(l)} \vee \mathrm{R}^{(l)}$.

引理 2[19]　$\mathscr{D}^{(l)} = \mathscr{L}^{(l)} \circ \mathrm{R}^{(l)}$；$\mathscr{D}^{(l)}$-类最多有一个正则 $\mathscr{D}$-类.

作为完全正则半群在 rpp 半群中的推广，郭聿琦等定义了强 rpp 半群. 准确地说，称 rpp 半群 S 为强 rpp 半群，如果 $\forall a \in S$，存在唯一幂等元 $a^\diamond$ 使得 $a\mathscr{L}^* a^\diamond$ 且 $a^\diamond a = a$.

引理 3[3]　令 S 为强 rpp 半群，则

(i) S 的每一个正则元都是完全正则元；

(ii) 对于 a，$b \in S$，若 $a\mathscr{D}^{(l)}b$，则 $a\overline{\mathrm{R}}ab\mathscr{L}^{(l)}b$.

令 I，Λ 为非空集合，且 M 为左消幺半群. 令 $\boldsymbol{P} = (p_{\lambda j})$ 为 $\Lambda \times I$-矩阵，其元素均为 M 的单位元. 在集合 $I \times M \times \Lambda$ 上，定义运算

$$(i,a,\lambda)(j,b,\mu) = (i,ap_{\lambda j}b,\mu). \qquad (1)$$

关于运算(1)，$I \times M \times \Lambda$ 构成强 rpp 半群，称为 M 上关于夹心矩阵(sandwich matrix) $\boldsymbol{P}$ 的 Rees 矩阵半群，并记为 $\mathscr{M}(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$. 称同构于某左消幺半群上的 Rees 矩阵半群的强 rpp 半群为完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群[20-21].

称强 rpp 半群 S 为超 rpp 半群，如果关系 $\overline{\mathrm{R}} = \{(a,b) \in S \times S: a^\diamond \mathrm{R} b^\diamond\}$ 为左同余. 郭小江等[19]指出半群 S 为完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群当且仅当它是 $\mathscr{D}^{(l)}$-单的强 rpp 半群，rpp 半群为超 rpp 半群当且仅当它是一些完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群的半格.

对于强 rpp 半群 S，定义 $\overline{\mathscr{H}} = \mathscr{L}^{(l)} \cap \overline{\mathrm{R}}$，等价地，对于 a，$b \in S$，$a\overline{\mathscr{H}}b$ 当且仅当 $a^\diamond \mathscr{H} b^\diamond$. 由引理 3 知，对于正则元 a，$b \in S$，$a\overline{\mathscr{H}}b$ 当且仅当 $a\mathscr{H}b$. 这一性质将会多次用到. 称强 rpp 半群 S 为密码 rpp 半群，如果 $\overline{\mathscr{H}}$ 为 S 上的同余. 郭小江等[15]指出密码 rpp 半群一定是超 rpp 半群.

引理 4[3,19]　令 $S = \mathscr{M}(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$ 为左消幺半群 M 上关于夹心矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的 Rees 矩阵半群，则

(i) (i,a,λ) 为幂等元当且仅当 $a = p_{\lambda i}^{-1}$；

(ii) S 的所有正则元组成的集合 $R_{eg}(S) = \{(i,a,\lambda) \in S: a$ 为 M 的单位元$\}$，且构成 S 的子半群；

(iii) $(i,a,\lambda)^\diamond = (i,p_{\lambda i}^{-1},\lambda)$；

(iv) $(i,a,\lambda)\overline{\mathscr{H}}(j,b,\mu)$ 当且仅当 $i = j$，$\lambda = \mu$.

引理 5　超 rpp 半群满足正则性条件，即其正则元集构成子半群. 从而超 rpp 半群的正则元构成完全正则子半群.

证　令 $S = (Y;S_\alpha)$ 为超 rpp 半群. 为了证 S 满足正则性条件，仅需证 S 的幂等元乘积为正则元. 设 e，f 分别为 S_α 和 S_β 的幂等元，则 $ef \in S_{\alpha\beta}$，进而 $(ef)^\diamond$ 为 $S_{\alpha\beta}$ 中的幂等元. 注意到 $ef = ef \cdot f$，有 $(ef)^\diamond = (ef)^\diamond f$，且 $f(ef)^\diamond \leqslant f$，从而 $f(ef)^\diamond$ 为 $S_{\alpha\beta}$ 的幂等元. 另一方面，易知，$(ef)^\diamond e \in S_{\alpha\beta}$，于是 $((ef)^\diamond e)^\diamond$ 为 $S_{\alpha\beta}$ 的幂等元. 而 $(ef)^\diamond e = (ef)^\diamond e \cdot e$，有 $((ef)^\diamond e)^\diamond = ((ef)^\diamond e)^\diamond \cdot e$，进而 $e((ef)^\diamond e)^\diamond \leqslant e$，则 $e((ef)^\diamond e)^\diamond$ 为 $S_{\alpha\beta}$ 的幂等元. 因此 $ef = (ef)^\diamond e \cdot f(ef)^\diamond = (ef)^\diamond \cdot e((ef)^\diamond e)^\diamond \cdot f(ef)^\diamond$，再据引理 4(ii)，$ef$ 为 $S_{\alpha\beta}$ 的正则元. 故 S 的幂等元的乘积为正则元.

注意到，完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群的正则元组成完全单半群. 易知，超 rpp 半群的正则元都是完全的，从而超 rpp 半群的正则元构成完全正则子半群. 引理 5 得证.

令 Y 为半格，S 为半群，且 $S = (Y;S_\alpha)$ 为半群 S 的半格分解. 若 $\forall \alpha$，$\beta \in Y$ 且 $\alpha \geqslant \beta$，存在同态 $\varphi_{\alpha,\beta}: S_\alpha \to S_\beta$ 满足

(i) $\varphi_{\alpha,\alpha}$ 为 S_α 上的恒等自同构；

(ii) $\forall \alpha$，β，$\gamma \in Y$ 且 $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ 有 $\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma} = \varphi_{\alpha,\gamma}$，

则称 S 为半群 $S_\alpha(\alpha \in Y)$ 的强半格(strong semilattice)，记为 $S = [Y;S_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}]$.

称密码 rpp 半群 S 为正规的，如果 $S/\overline{\mathscr{H}}$ 为正规带. 正规密码 rpp 半群是一类比较"大"的半群类，如完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群、Clifford rpp 半群、正规带、perfect rpp 半群等都是正规密码 rpp 半群.

引理 6[16]　rpp 半群 S 为正规密码 rpp 半群当且仅当它是一些完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群的强半格.

2　$\mathscr{L}^*$-酉同余

首先，回忆一些关于酉半群的概念. 酉半群(unary semigroup)定义为 3 元组$(S,\cdot,*)$，其中$(S,\cdot)$为半群，映射$*$：$a \mapsto a^*$ 为半群 S 上的 1 元算

子(unary operation). 令$(S,\cdot,{}^*)$,$(T,\cdot,{}^*)$为酉半群,称半群$(S,\cdot)$到半群$(T,\cdot)$的同态φ为它们间的酉同态(unary homomorphism),如果$\forall a\in S$,$(a\varphi)^*=a^*\varphi$. 称酉半群$(S,\cdot)$上同余ρ为S上的酉同余(unary congruence),如果$\forall a,b\in S$,$a\rho b\Rightarrow a^*\rho b^*$. 称半群$(S,\cdot)$的子半群$T$为$S$的酉子半群(unary subsemigroup),如果$\forall a\in T$,$a^*\in T$.

令ρ为酉半群$(S,\cdot,{}^*)$上的酉同余,定义${}^{*'}$: $a\rho\mapsto a^*\rho$. 易知,${}^{*'}$是S/ρ上的1元算子. 于是$(S/\rho,\cdot,{}^{*'})$也是酉半群. 易知,由ρ诱导的同态是S到S/ρ上的酉同态.

定义1 称半群S上的同余ρ为$\mathscr{L}^*$-同余,如果ρ保持$\mathscr{L}^*$-类,即$\forall a,b\in S$,若$a\mathscr{L}^*b$,则$a\rho\mathscr{L}^*b\rho$. 类似地,可以定义$\mathscr{R}^*$-同余.

对于强rpp半群$(S,\circ)$,可以定义映射$\diamond$: $a\mapsto a^\diamond$. 显然,$\diamond$为S上的1元算子. 于是$(S,\circ,\diamond)$构成一个酉半群. 因此强rpp半群总可以看成一个酉半群. 后文将强rpp半群看成以$\diamond$: $a\mapsto a^\diamond$作为1元算子的酉半群. 本部分将给出正规密码rpp半群上的$\mathscr{L}^*$-酉同余的构造. 为方便计,叙述"令$S=[Y;S_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}]$为正规密码rpp半群"表示"半群$S$为正规密码rpp半群,并且$S$为完全$\mathscr{J}^{*(l)}$-单半群$S_\alpha(\alpha\in Y)$的强半格".

下面给出$\mathscr{L}^*$-酉同余的一些性质.

引理7 (i) 若ρ为强rpp半群S上的$\mathscr{L}^*$-同余,则ρ是幂等元提升的,即$E(S/\rho)=E(S)\rho$;

(ii) 若ρ为密码rpp半群S上的$\mathscr{L}^*$-酉同余,则S/ρ为强rpp半群,且$\forall a\in S$,$(a\rho)^\diamond=a^\diamond\rho$.

证 (i) 令$a\rho$为幂等元. 由于ρ为$\mathscr{L}^*$-同余,$a\rho\mathscr{L}^*a^\diamond\rho$,于是$a^\diamond\rho=(a^\diamond\rho)(a\rho)=(a^\diamond a)\rho=a\rho$.

(ii) 因为ρ为$\mathscr{L}^*$-同余,所以S/ρ为rpp半群,且$a\rho\mathscr{L}^*a^\diamond\rho$. 若有幂等元$b\rho$,使得$b\rho\mathscr{L}^*a\rho$,$b\rho\cdot a\rho=a\rho$,则由(i)知,存在幂等元$f\in S$,使得$f\rho=b\rho$. 而$\overline{\mathscr{H}}$为$S$上的同余,于是$(af)^\diamond\overline{\mathscr{H}}af\overline{\mathscr{H}}a^\diamond f$. 注意到$S$满足正则性条件,则$(af)^\diamond\mathscr{H}a^\diamond f$,进而$(af)^\diamond\rho\mathscr{H}(a^\diamond f)\rho=a^\diamond\rho$,从而$(af)^\diamond\rho=a^\diamond\rho$. 另一方面,再据$\overline{\mathscr{H}}$为$S$上的同余,$f(af)^\diamond\overline{\mathscr{H}}faf\rho af$,但$f(af)^\diamond$为正则元,于是$f(af)^\diamond\mathscr{H}(faf)^\diamond$,而任意同态保持Green关系,从而$f(af)^\diamond\rho\mathscr{H}(faf)^\diamond\rho=(af)^\diamond\rho$,进而$(f(af)^\diamond)\rho=(af)^\diamond\rho$,因此

$$f(af)^\diamond\rho\mathscr{H}(faf)^\diamond\rho=(af)^\diamond\rho.$$

故S/ρ为强rpp半群,且$(a\rho)^\diamond=a^\diamond\rho$.

命题1 令S为完全$\mathscr{J}^{*(l)}$-单半群. 若ρ为S上的$\mathscr{L}^*$-酉同余,则S/ρ为完全$\mathscr{J}^{*(l)}$-单半群.

证 注意到,完全$\mathscr{J}^{*(l)}$-单半群是正规密码rpp半群,再据引理2,S/ρ为强rpp半群. 现仅需证S/ρ为$\mathscr{D}^{*(l)}$-单的,即证明S/ρ的任意2个幂等元$a\rho$,$b\rho$都具有$\mathscr{D}$关系. 由引理2知,存在幂等元$e,f\in E(S)$,使得$e\rho=a\rho$,$f\rho=b\rho$. 但$R_{eg}(S)$为完全单半群,于是有幂等元$g\in S$,使得$e\mathscr{L}g\mathscr{R}f$,进而$e\rho\mathscr{L}g\rho\mathscr{R}f\rho$,即$e\rho\mathscr{D}f\rho$. 故$S/\rho$为完全$\mathscr{J}^{*(l)}$-单半群.

下面给出正规密码rpp半群上的$\mathscr{L}^*$-酉同余的构造. 为此,先定义$\mathscr{L}^*$-酉同余聚.

定义2 令$S=[Y;S_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}]$,$\xi$为半格$Y$上的同余,$S_\alpha$为酉半群,且对于$\alpha\in Y$,$\eta_\alpha$为半群$S_\alpha$上的$\mathscr{L}^*$-酉同余(显然,$S$为酉半群,其1元算子在$S_\alpha$上的限制恰为$S_\alpha$的1元算子). 称同余组$(\xi;\eta_\alpha)$为$S$上的$\mathscr{L}^*$-酉同余聚,如果对于$a,b\in S_\alpha$,$c\in S_\beta$,且$\alpha\geqslant\beta$,满足

(i) 若$a\eta_\alpha b$,则$a\varphi_{\alpha,\beta}\eta_\beta b\varphi_{\alpha,\beta}$;

(ii) 若$a\varphi_{\alpha,\beta}\eta_\beta b\varphi_{\alpha,\beta}$,则$a\eta_\alpha b$.

给定$\mathscr{L}^*$-酉同余聚$(\xi;\eta_\alpha)$,规定: 对于$a\in S_\alpha$,$b\in S_\beta$,$a\rho_{(\xi;\eta_\alpha)}b\Leftrightarrow\alpha\xi\beta$,$a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}b\varphi_{\beta,\alpha\beta}$. 显然,$\rho_{(\xi;\eta_\alpha)}$为$S$上的等价关系.

定理1 令$S=[Y;S_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}]$为正规密码rpp半群. 若$(\xi;\eta_\alpha)$为$S$上的$\mathscr{L}^*$-酉同余聚,则$\rho_{(\xi;\eta_\alpha)}$为$S$上的$\mathscr{L}^*$-酉同余. 反之,对于$S$上的任一$\mathscr{L}^*$-酉同余$\rho$,规定

$$\alpha\xi\beta\Leftrightarrow(\exists a\in S_\alpha,b\in S_\beta,u,v\in S_{\alpha\beta})\ a\rho u,v\rho b.$$

且对于$\alpha\in Y$,$\eta_\alpha=\rho|_{S_\alpha}$,则$(\xi;\eta_\alpha)$为$S$上的$\mathscr{L}^*$-酉同余聚,$\rho=\rho_{(\xi;\eta_\alpha)}$,且$(\xi;\eta_\alpha)$为$S$上的满足$\rho=\rho_{(\xi;\eta_\alpha)}$的唯一$\mathscr{L}^*$-酉同余聚.

证 (i) 设$(\xi;\eta_\alpha)$为S上的$\mathscr{L}^*$-酉同余聚. 令$a\in S_\alpha$,$b\in S_\beta$,$c\in S_\gamma$,若$a\rho_{(\xi;\eta_\alpha)}b$,则$\alpha\xi\beta$,$a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}\cdot b\varphi_{\beta,\alpha\beta}$,进而

$$a\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma}=(a\varphi_{\alpha,\alpha\beta})\varphi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}(b\varphi_{\beta,\alpha\beta})\varphi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}=b\varphi_{\beta,\alpha\beta\gamma},$$

于是$\alpha\gamma\xi\beta\gamma$,且

$$(ac)\varphi_{\alpha\gamma,\alpha\beta\gamma}=(a\varphi_{\alpha,\alpha\gamma}\cdot c\varphi_{\gamma,\alpha\gamma})\varphi_{\alpha\gamma,\alpha\beta\gamma}=a\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\cdot c\varphi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}b\varphi_{\beta,\alpha\beta\gamma}\cdot c\varphi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}=(bc)\varphi_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma},$$

从而$ac\rho_{(\xi;\eta_\alpha)}bc$. 类似地,有$ca\rho_{(\xi;\eta_\alpha)}cb$. 因此$\rho_{(\xi;\eta_\alpha)}$为$S$上的同余.

接下来证明$\rho=\rho_{(\xi;\eta_\alpha)}$保持$\mathscr{L}^*$-类. 为此,仅需证明$a\rho\mathscr{L}^*a^\diamond\rho$. 显然,$a\rho=a\rho\cdot a^\diamond\rho$. 令$a\in S_\alpha$,$x\in S_\beta^1$,$y\in S_\gamma^1$,且$ax\rho ay$,则$\alpha\gamma\xi\beta\gamma$,$(ax)\varphi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}(ay)\cdot\varphi_{\alpha\gamma,\alpha\beta\gamma}$,进而

$$a\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\cdot x\varphi_{\beta,\alpha\beta\gamma}=(ax)\varphi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}(ay)\varphi_{\alpha\gamma,\alpha\beta\gamma}=a\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\cdot y\varphi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}.\quad(2)$$

另一方面，$a\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma}=a\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\cdot a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma}$，但 $S_{\alpha\beta\gamma}$ 为完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群，再据引理 2(ii)，则在半群 $S_{\alpha\beta\gamma}$ 上，$a\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\mathscr{L}^{*}a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma}$，而 $\eta_{\alpha\beta\gamma}$ 为 $\mathscr{L}^{*}$-酉同余，于是 $(a\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma})\eta_{\alpha\beta\gamma}\mathscr{L}^{*}(a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma})\eta_{\alpha\beta\gamma}$，又由(2)式得
$(a^{\diamond}x)\varphi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}=(a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma})\cdot x\varphi_{\beta,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}(a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma})^{\diamond}\cdot y\varphi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}=(a^{\diamond}y)\varphi_{\alpha\gamma,\alpha\beta\gamma}$.
从而 $a^{\diamond}x\rho a^{\diamond}y$. 因此 $a\rho\mathscr{L}^{*}a^{\diamond}\rho$. 故 ρ 为 S 上的 $\mathscr{L}^{*}$-同余.

现设有幂等元 $d\rho$，使得 $d\rho\mathscr{L}^{*}a^{\diamond}\rho$ 且 $d\rho\cdot a\rho=a\rho$，由引理 2 知，存在幂等元 $e\in S_{\pi}$，使得 $e\rho=d\rho$. 而 $e\rho\mathscr{L}^{*}a^{\diamond}\rho$，于是 $a^{\diamond}\rho=a^{\diamond}\cdot e\rho$，$e\rho=e\rho\cdot a^{\diamond}\rho$，从而 $\alpha\xi\alpha\pi\xi\pi$. $\forall x,y\in S^{1}_{\alpha\pi}$，若有 $a\varphi_{\alpha,\alpha\pi}\cdot x\eta_{\alpha\pi}a\varphi_{\alpha,\alpha\pi}\cdot y$，则 $(a\varphi_{\alpha,\alpha\pi}\cdot x)\rho=(a\varphi_{\alpha,\alpha\pi}\cdot y)\rho$，即 $(ax)\rho=(ay)\rho$，而 $a\rho\mathscr{L}^{*}e\rho$，于是 $(ex)\rho=(ey)\rho$，进而 $ex\eta_{\alpha\pi}ey$，即 $e\varphi_{\pi,\alpha\pi}\cdot x\eta_{\alpha\pi}e\varphi_{\pi,\alpha\pi}\cdot y$. 另一方面，$a\rho\cdot e\rho=a\rho\Rightarrow ae\eta_{\alpha\pi}a\varphi_{\alpha,\alpha\pi}$，进而 $a\varphi_{\alpha,\alpha\pi}\cdot e\varphi_{\pi,\alpha\pi}\eta_{\alpha\pi}a\varphi_{\alpha,\alpha\pi}$. 因此 $a\varphi_{\alpha,\alpha\pi}\eta_{\alpha\pi}\mathscr{L}^{*}e\varphi_{\pi,\alpha\pi}\eta_{\alpha\pi}$. 同理，$a\varphi_{\alpha,\alpha\pi}\eta_{\alpha\pi}\mathscr{L}^{*}a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\alpha\pi}\cdot\eta_{\alpha\pi}$. 由引理 2 知，$S_{\alpha\pi}/\eta_{\alpha\pi}$ 为强 rpp 半群，从而 $a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\alpha\pi}\eta_{\alpha\pi}=e\varphi_{\pi,\alpha\pi}\eta_{\alpha\pi}$，再结合 $\alpha\xi\pi$ 可得 $a^{\diamond}\rho e$. 因此 $(a\rho)^{\diamond}=a^{\diamond}\rho$. 故 ρ 为 S 上的酉同余.

(ii) 反之，设 ρ 为 S 上的 $\mathscr{L}^{*}$-酉同余. 首先证明 ξ 为 Y 上的同余. 显然，ξ 是自反的和对称的. 令 $\alpha\xi\beta,\beta\xi\gamma$，则 $\exists a\in S_{\alpha},u,v\in S_{\alpha\beta},b,c\in S_{\beta},w,z\in S_{\beta\gamma},d\in S_{\gamma}$，使得 $a\rho u,v\rho b,c\rho w,z\rho d$.

可以断言：

$$a\in S_{\alpha},b\in S_{\beta},\alpha\geqslant\beta,a\rho b\Rightarrow a\rho a\varphi_{\alpha,\beta}. \tag{3}$$

假设断言(3)的条件满足，则 $a=a^{\diamond}a\rho a^{\diamond}b=a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\beta}\cdot b\rho a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\beta}\cdot a=a\varphi_{\alpha,\beta}$. 从而证明了(3)式成立.

进一步，断言：

$$a\in S_{\alpha},\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma,a\rho a\varphi_{\alpha,\gamma}\Rightarrow a\rho a\varphi_{\alpha,\beta}. \tag{4}$$

事实上，
$a\varphi_{\alpha,\beta}=(a\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}\cdot a\varphi_{\alpha,\beta}=(a\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}a\rho(a\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}\cdot a\varphi_{\alpha,\gamma}=(a\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}\varphi_{\beta,\gamma}\cdot a\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma}=[(a\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}\cdot a\varphi_{\alpha,\beta}]\varphi_{\beta,\gamma}=a\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma}=a\varphi_{\alpha,\gamma}\rho a$.
断言(4)得证.

注意到 ρ 为 S 上的 $\mathscr{L}^{*}$-酉同余. 则有 $a^{\diamond}\rho u^{\diamond}$，$v^{\diamond}\rho b^{\diamond}$，$c^{\diamond}\rho w^{\diamond}$，$z^{\diamond}\rho d^{\diamond}$. 而 $R_{eg}(S_{\alpha})$ 为完全单半群，于是 $\exists x,y\in S_{\alpha\beta},s,t\in S_{\beta},p,q\in S_{\beta\gamma}$，使得 $v^{\diamond}=xu^{\diamond}y$，$c^{\diamond}=sb^{\diamond}t$，$z^{\diamond}=pw^{\diamond}q$. 再由假设得

$$(psx)a^{\diamond}(ytq)\rho ps(xu^{\diamond}y)tq=(ps)v^{\diamond}(tq)\rho p\cdot(sb^{\diamond}t)q=pc^{\diamond}q\rho pw^{\diamond}q=z^{\diamond}\rho d^{\diamond},$$

其中 $(psx)a^{\diamond}(ytq)\in S_{\alpha\beta\gamma}$. 由(3)式得 $d^{\diamond}\rho d^{\diamond}\varphi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$，又由(4)式得 $d^{\diamond}\rho d^{\diamond}\varphi_{\gamma,\alpha\gamma}$. 类似地，$a^{\diamond}\rho a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\alpha\gamma}$. 因此，$a^{\diamond}\rho a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\alpha\gamma}$，$d^{\diamond}\varphi_{\gamma,\alpha\gamma}\rho d^{\diamond}$，即 $\alpha\xi\gamma$. 故 ξ 是传递的.

由 $a\rho u,v\rho b$ 可得 $ac\rho uc,vc\rho bc$，其中 $ac\in S_{\alpha\gamma},uc,vc\in S_{\beta\gamma}$，于是 $\alpha\gamma\xi\beta\gamma$，从而 ξ 为 Y 上的同余.

假设 $a,b\in S_{\alpha},\alpha\geqslant\beta,a\eta_{\alpha}b$，则

$a\varphi_{\alpha,\beta}=(a\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}\cdot a\varphi_{\alpha,\beta}=(a\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}a\rho(a\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}b=(a\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}\cdot b\varphi_{\alpha,\beta}$，

$b\varphi_{\alpha,\beta}=b\varphi_{\alpha,\beta}\cdot(b\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}=b(b\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}\rho a\cdot(b\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}=a\varphi_{\alpha,\beta}\cdot(b\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}$，

进而

$a\varphi_{\alpha,\beta}\rho(a\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}\cdot b\varphi_{\alpha,\beta}=(a\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}\cdot b\varphi_{\alpha,\beta}\cdot(b\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}\rho(a\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}\cdot a\varphi_{\alpha,\beta}\cdot(b\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}$.

类似地，$b\varphi_{\alpha,\beta}\rho(a\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}\cdot a\varphi_{\alpha,\beta}\cdot(b\varphi_{\alpha,\beta})^{\diamond}$. 因此 $a\varphi_{\alpha,\beta}\rho b\varphi_{\alpha,\beta}$，进而 $a\varphi_{\alpha,\beta}\eta_{\beta}b\varphi_{\alpha,\beta}$. 故定义 2 中条件(i)成立.

为证定义 2 的条件(ii)，令 $a,b\in S_{\alpha},\alpha\geqslant\beta,\alpha\xi\beta$，且 $a\varphi_{\alpha,\beta}\eta_{\beta}b\varphi_{\alpha,\beta}$，由 ξ 的定义知，$\exists c\in S_{\alpha},d\in S_{\beta}$，使得 $c\rho d$，从而 $c^{\diamond}\rho d^{\diamond}$. 记 $I=\{x\in R_{eg}(S_{\alpha}):\exists y\in R_{eg}(S_{\beta})$ 使得 $x\rho y\}$. 由于 $c^{\diamond}\in I,I\neq\varnothing$，进而 I 为 $R_{eg}(S_{\alpha})$ 的理想. 但 $R_{eg}(S_{\alpha})$ 是完全单子半群，于是 $I=R_{eg}(S_{\alpha})$. 这意味着，$\forall x\in R_{eg}(S_{\alpha})$，$\exists y\in R_{eg}(S_{\beta})$ 使得 $x\rho y$，因此 $x\rho x\varphi_{\alpha,\beta}$. 特别地，$a^{\diamond}\rho a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\beta}$，$b^{\diamond}\rho b^{\diamond}\varphi_{\alpha,\beta}$. 从而 $a=aa^{\diamond}\rho a\cdot a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\beta}=a\varphi_{\alpha,\beta}\cdot a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\beta}=a\varphi_{\alpha,\beta}$；类似地，$b\rho b\varphi_{\alpha,\beta}$. 从而 $a\rho b$，进而 $a\eta_{\alpha}b$. 故定义 2 的条件(ii)成立. 因此，$(\xi;\eta_{\alpha})$ 为 S 上的 $\mathscr{L}^{*}$-酉同余聚.

下证 $\rho=\rho_{(\xi;\eta_{\alpha})}$. 若 $a\rho b$，则 $\alpha\xi\beta$，进而 $\alpha\xi\alpha\beta\xi\beta$，于是 $a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}\rho a\rho b\rho b\varphi_{\beta,\alpha\beta}$，从而 $a\rho_{(\xi;\eta_{\alpha})}b$. 反之，设 $a\rho_{(\xi;\eta_{\alpha})}b$，由于 $\alpha\xi\beta,a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}b\varphi_{\beta,\alpha\beta}$，$\exists a'\in S_{\alpha},u,v\in S_{\alpha\beta},b'\in S_{\beta}$ 使得 $a'\rho u,v\rho b'$. 而(4)式蕴含着 $a\rho a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}$ 且 $b\rho b\varphi_{\beta,\alpha\beta}$，于是 $a\rho a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}\rho b\varphi_{\beta,\alpha\beta}\rho b$，从而 $a\rho b$.

又 $(\xi;\eta_{\alpha})$ 的唯一性显然成立. 定理 1 证毕.

引理 8　令 $S=[Y;S_{\alpha},\varphi_{\alpha,\beta}]$ 为正规密码 *rpp* 半群，且 $(\xi;\eta_{\alpha})$ 为 S 上的 $\mathscr{L}^{*}$-酉同余聚，记 $\rho=\rho_{(\xi;\eta_{\alpha})}$，则 $S/\rho=[Y/\xi;S_{A},\psi_{A,B}]$，其中 $A\in Y/\xi$，$T_{A}=[A;S_{\alpha},\varphi_{\alpha,\beta}]$，$\rho_{A}=\rho\mid_{T_{A}}$，$S_{A}=T_{A}/\rho_{A}$ 且 $\psi_{A,B}:S_{A}\to S_{B}$，$a\rho_{A}$ a $(a\varphi_{\alpha,\beta})\rho_{B}$.

证　由于 $A\in Y/\xi$，A 为 Y 的子半格. 易知，$T_{A}=[A;S_{\alpha},\varphi_{\alpha,\beta}]$ 为正规密码 rpp 半群. 由引理 7 得，S_{A} 为完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群.

令 $A,B\in Y/\xi$，且 $A\geqslant B$. 对于 $\alpha,\beta\in A$，则有 $\alpha\beta\in B$，$\alpha\geqslant\alpha\beta$，因此 $\forall\alpha\in A$，$\exists\beta\in B$ 使得 $\alpha\geqslant\beta$. 为证 $\psi_{A,B}$ 为映射，令 $a,b\in T_{A}$ 且 $a\rho_{A}b$. 进一步地，设 $a\in S_{\alpha},b\in S_{\beta}$，取 $\gamma,\delta\in Y$ 使得 $\alpha\geqslant\gamma,\beta\geqslant\delta$，则 $\alpha\beta\geqslant\gamma\delta$，于是 $(a\varphi_{\alpha,\gamma})\varphi_{\gamma,\gamma\delta}=a\varphi_{\alpha,\gamma\delta}\eta_{\gamma\delta}b\varphi_{\beta,\gamma\delta}=(b\varphi_{\beta,\delta})\varphi_{\delta,\gamma\delta}$. 对于 $a\in S_{\alpha},b\in S_{\beta},a\rho_{A}b\Leftrightarrow\alpha,\beta\in A,a\rho b\Leftrightarrow\alpha,\beta\in A,(a\varphi_{\alpha,\gamma})\varphi_{\gamma,\gamma\delta}\eta_{\alpha\beta}(b\varphi_{\beta,\delta})\varphi_{\delta,\gamma\delta}$. 从而 $\psi_{A,B}$ 为映射. 类似地可证，

$(Y/\xi; S_A, \psi_{A,B})$ 满足半群强半格的条件,故 $S' = [Y/\xi; S_A, \psi_{A,B}]$ 有定义. 可以验证,由 ρ 诱导的同态是 S/ρ 到 S' 上的同构.

定理 2 令 S 为正规密码 rpp 半群,若 ρ 为 S 上的 $\mathscr{L}^*$-酉同余,则 S/ρ 为正规密码 rpp 半群.

证 基于引理 8,定理 2 显然成立.

正规密码 rpp 半群是正规密码群(normal cryptogroup)在 rpp 半群中的推广. 事实上,正规密码群上的任一同余都是 $\mathscr{L}^*$-酉同余. 因此,定理 1 和定理 2 推广了正规密码群的相关结果[22].

3 特殊 $\mathscr{L}^*$-酉同余

本部分考虑具有某些特性的 $\mathscr{L}^*$-酉同余.

命题 2 令 $S = [Y; S_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}]$ 为正规密码 rpp 半群,对于 $a \in S_\alpha, b \in S_\beta$,若

$$a\rho b \Leftrightarrow \exists \gamma \leqslant \alpha\beta, \text{使得 } a\varphi_{\alpha,\gamma} = b\varphi_{\beta,\gamma},$$

则 ρ 为 S 上的最小完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群 $\mathscr{L}^*$-酉同余.

证 显然,ρ 为满足自反性和对称性的等价关系. 令 $a \in S_\alpha, b \in S_\beta, c \in S_\gamma$,若 $a\rho b, b\rho c$,则 $\exists \delta, \pi \in Y$ 使得 $\alpha\beta \geqslant \delta, \beta\gamma \geqslant \pi, a\varphi_{\alpha,\delta} = b\varphi_{\beta,\delta}, b\varphi_{\beta,\pi} = c\varphi_{\gamma,\pi}$,从而

$$a\varphi_{\alpha,\delta\pi} = (a\varphi_{\alpha,\delta})\varphi_{\delta,\delta\pi} = (b\varphi_{\beta,\delta})\varphi_{\delta,\delta\pi} = b\varphi_{\beta,\delta\pi} = (b\varphi_{\beta,\pi})\varphi_{\pi,\delta\pi} = (c\varphi_{\gamma,\pi})\varphi_{\pi,\delta\pi} = c\varphi_{\gamma,\delta\pi},$$

于是 ρ 满足传递性.

现令 $a\rho b$,则 $\exists \delta \in Y$ 使得 $\alpha\beta \geqslant \delta$ 且 $a\varphi_{\alpha,\delta} = b\varphi_{\beta,\delta}$,于是

$$(ca)\varphi_{\alpha\gamma,\delta\gamma} = [(c\varphi_{\gamma,\alpha\gamma}) \cdot (a\varphi_{\alpha,\alpha\gamma})]\varphi_{\alpha\gamma,\delta\gamma} = (c\varphi_{\gamma,\delta\gamma}) \cdot (a\varphi_{\alpha,\delta\gamma}) = (c\varphi_{\gamma,\delta\gamma}) \cdot (a\varphi_{\alpha,\delta})\varphi_{\delta,\delta\gamma} = (c\varphi_{\gamma,\delta\gamma}) \cdot (b\varphi_{\beta,\delta})\varphi_{\delta,\delta\gamma} = c\varphi_{\gamma,\delta\gamma} \cdot b\varphi_{\beta,\delta\gamma} = (cb)\varphi_{\beta\gamma,\delta\gamma},$$

从而 $ca\rho cb$. 类似地可证,$ac\rho bc$. 故 ρ 为 S 上的同余.

令 $x \in S_\beta^1, y \in S_\gamma^1$,若 $(ax)\rho = (ay)\rho$,则 $\exists \delta \in \gamma$ 使得 $\alpha\beta \geqslant \delta, \alpha\gamma \geqslant \delta$ 且 $(ax)\varphi_{\alpha\beta,\delta} = (ay)\varphi_{\alpha\gamma,\delta}$,因此,$a \cdot (x\varphi_{\alpha\beta,\delta}) = (a\varphi_{\alpha,\delta}) \cdot (x\varphi_{\gamma,\delta}) = (ax)\varphi_{\alpha\beta,\delta} = (ay)\varphi_{\alpha\gamma,\delta} = a \cdot (y\varphi_{\alpha\gamma,\delta})$,于是

$$(a^\diamond x)\varphi_{\alpha\beta,\delta} = a^\diamond(x\varphi_{\alpha\beta,\delta}) = a^\diamond(y\varphi_{\alpha\gamma,\delta}) = (a^\diamond y)\varphi_{\alpha\gamma,\delta},$$

从而 $a^\diamond x\rho a^\diamond y$. 但 $aa^\diamond = a$,则 $a\rho \cdot a^\diamond\rho = a\rho$. 因此 $a\rho\mathscr{L}^* a^\diamond\rho$,故 ρ 为 S 上的 $\mathscr{L}^*$-同余.

现令 $a \in S_\alpha, b \in S_\beta$ 且 $a\rho b$,则 $\exists \gamma \leqslant \alpha\beta$,使得 $a\varphi_{\alpha,\gamma} = b\varphi_{\beta,\gamma}$. 设 $S_\gamma = \mathscr{M}(M; I, J; \boldsymbol{P})$,$a^\diamond\varphi_{\alpha,\gamma} = (i, x, j)$,$b^\diamond\varphi_{\beta,\gamma} = (u, y, v)$,而

$$(i, -, -) = (i, x, j) \cdot a\varphi_{\alpha,\gamma} = (a^\diamond a)\varphi_{\alpha,\gamma} = a\varphi_{\alpha,\gamma} = b\varphi_{\beta,\gamma} = (bb^\diamond)\varphi_{\beta,\gamma} = (u, y, v) \cdot b\varphi_{\beta,\gamma} = (u, -, -),$$

于是 $i = u$. 类似地可证,$j = v$. 但 $a_{\alpha,\gamma}^\varphi, b_{\beta,\gamma}^\varphi$ 为幂等元,从而 $a^\diamond\varphi_{\alpha,\gamma} = (i, p_{ji}^{-1}, j) = (u, p_{vu}^{-1}, v) = b^\diamond\varphi_{\beta,\gamma}$. 因此 $a^\diamond\rho b^\diamond$,故 ρ 为 S 的酉同余.

由定理 1 知,存在 $\mathscr{L}^*$-酉同余聚 $(\xi; \eta_\alpha)$ 使得 $\rho = \rho_{(\xi;\eta_\alpha)}$. 令 $a \in S_\alpha, b \in S_\beta$. 显然,

$$a\varphi_{\alpha,\alpha\beta} = (a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}) \cdot (a\varphi_{\alpha,\alpha\beta})^\diamond = (a \cdot (a\varphi_{\alpha,\alpha\beta})^\diamond)\varphi_{\alpha,\alpha},$$

于是 $a\rho a \cdot (a\varphi_{\alpha,\alpha\beta})^\diamond$. 类似地,$b\rho b \cdot (b\varphi_{\beta,\alpha\beta})^\diamond$. 而 $a \cdot (a\varphi_{\alpha,\alpha\beta})^\diamond, b \cdot (b\varphi_{\beta,\alpha\beta})^\diamond \in S_{\alpha\beta}$,因此 $\alpha\xi\beta$. 故 S/ρ 为完全 $\mathscr{L}^*$-单半群同余.

最后,设 τ 为 S 上的完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群 $\mathscr{L}^*$-酉同余. 由定理 1 知,存在 $\mathscr{L}^*$-酉同余聚 $(\pi; \zeta_\alpha)$ 使得 $\tau = \rho_{(\pi;\zeta_\alpha)}$. 于是 $|Y/\pi| = 1$,即 $\pi = Y \times Y$. 令 $a \in S_\alpha, b \in S_\beta$,若 $a\rho b$,则 $\exists \delta$ 使得 $\alpha\beta \geqslant \delta$ 且 $a\varphi_{\alpha,\delta} = b\varphi_{\beta,\delta}$. 注意到 ζ_δ 为 S_δ 上的同余,于是 $a\varphi_{\alpha,\delta}\zeta_\delta b\varphi_{\beta,\delta}$,从而 $a\rho_{(\pi;\zeta_\alpha)} \cdot a\varphi_{\alpha,\delta} = b\varphi_{\beta,\delta}\rho_{(\pi;\zeta_\alpha)} b$,进而 $\rho \subseteq \rho_{(\pi;\zeta_\alpha)} = \tau$. 故 ρ 为 S 上的最小完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群 $\mathscr{L}^*$-酉同余.

注 1 由引理 8 的证明知,对于正规密码 rpp 半群 S 上的 $\mathscr{L}^*$-酉同余聚 $(\xi; \eta_\alpha)$,$\rho_{(\xi;\eta_\alpha)}$ 为 S 上的完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群 $\mathscr{L}^*$-酉同余当且仅当 ξ 为 Y 上的泛关系. 因此,S 上的 $\mathscr{L}^*$-酉同余为完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群同余当且仅当它包含了最小完全 $\mathscr{J}^{(l)}$-单半群 $\mathscr{L}^*$-酉同余.

命题 3 令 $S = [Y; S_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}]$ 为正规密码 rpp 半群. 对于 $a \in S_\alpha, b \in S_\beta$,若

$$a\lambda b \Leftrightarrow \exists \gamma \leqslant \alpha\beta, \text{使得 } a^\diamond\varphi_{\alpha,\gamma} = b^\diamond\varphi_{\beta,\gamma},$$

则 λ 为 S 上的最小矩形带 $\mathscr{L}^*$-酉同余.

证 显然,λ 为满足自反性和对称性的等价关系. 令 $a \in S_\alpha, b \in S_\beta, c \in S_\gamma$,若 $a\lambda b, b\lambda c$,则 $\exists \delta, \pi \in Y$ 使得 $\alpha\beta \geqslant \delta, \beta\gamma \geqslant \pi$ 且 $a^\diamond\varphi_{\alpha,\delta} = b^\diamond\varphi_{\beta,\delta}, b^\diamond\varphi_{\beta,\pi} = c^\diamond\varphi_{\gamma,\pi}$,从而

$$a^\diamond\varphi_{\alpha,\delta\pi} = (a^\diamond\varphi_{\alpha,\delta})\varphi_{\delta,\delta\pi} = (b^\diamond\varphi_{\beta,\delta})\varphi_{\delta,\delta\pi} = b^\diamond\varphi_{\beta,\delta\pi} = (b^\diamond\varphi_{\beta,\pi})\varphi_{\pi,\delta\pi} = (c^\diamond\varphi_{\gamma,\pi})\varphi_{\pi,\delta\pi} = c^\diamond\varphi_{\gamma,\delta\pi},$$

于是 λ 满足传递性.

现令 $a\rho b$,则 $\exists \delta \in Y$ 使得 $\alpha\beta \geqslant \delta$ 且 $a^\diamond\varphi_{\alpha,\delta} = b^\diamond\varphi_{\beta,\delta}$. 而 S 为正规密码 rpp 半群,于是 $\overline{\mathscr{H}}$ 为 S 上的同余,从而 $(ca)^\diamond = (c^\diamond a^\diamond)^\diamond, (cb)^\diamond = (c^\diamond b^\diamond)^\diamond$. 又 S 满足正则性条件,所以 $c^\diamond a^\diamond \mathscr{H} (c^\diamond a^\diamond)^\diamond$,$(c^\diamond b^\diamond)^\diamond \mathscr{H} c^\diamond b^\diamond$,因此

$$(c^\diamond a^\diamond)^\diamond\varphi_{\alpha\gamma,\gamma\delta}\mathscr{H}(c^\diamond a^\diamond)\varphi_{\alpha\gamma,\gamma\delta} = c^\diamond\varphi_{\gamma,\gamma\delta} \cdot a^\diamond\varphi_{\alpha,\gamma\delta} = c^\diamond \cdot (a^\diamond\varphi_{\alpha,\delta})\varphi_{\delta,\gamma\delta} = c^\diamond\varphi_{\gamma,\gamma\delta} \cdot (b^\diamond\varphi_{\beta,\delta})\varphi_{\delta,\gamma\delta} = c^\diamond\varphi_{\gamma,\gamma\delta} \cdot b^\diamond\varphi_{\beta,\gamma\delta} = (c^\diamond b^\diamond)\varphi_{\beta\gamma,\gamma\delta}\mathscr{H}(c^\diamond b^\diamond)^\diamond\varphi_{\beta\gamma,\gamma\delta},$$

进而 $(ca)^\diamond\varphi_{\alpha\gamma,\gamma\delta} = (c^\diamond a^\diamond)^\diamond\varphi_{\alpha\gamma,\gamma\delta} = (c^\diamond b^\diamond)^\diamond\varphi_{\beta\gamma,\gamma\delta} = (cb)^\diamond\varphi_{\beta\gamma,\gamma\delta}$. 故 $cb\lambda ca$. 类似地可证,$bc\lambda ac$. 因此,λ 为 S 上的同余.

令 $x \in S_\beta^1, y \in S_\gamma^1$. 若 $ax\lambda ay$,则 $\exists \delta \in \gamma$ 使得

$\alpha\beta\gamma \geqslant \delta$ 且 $(ax)^{\diamond}\varphi_{\alpha\beta,\delta} = (ay)^{\diamond}\varphi_{\beta\gamma,\delta}$. 而 S 为正规密码 rpp 半群，则 $(ax)^{\diamond} = (a^{\diamond}x)^{\diamond}$，$(ay)^{\diamond} = (a^{\diamond}y)^{\diamond}$，于是 $(a^{\diamond}x)^{\diamond}\varphi_{\alpha\beta,\delta} = (a^{\diamond}y)^{\diamond}\varphi_{\beta\gamma,\delta}$. 所以，$(a^{\diamond}x)\lambda(a^{\diamond}\cdot y)$. 但 $aa^{\diamond} = a$，显然 $(aa^{\diamond})\lambda a$. 因此 $(a\lambda)\mathscr{L}^*(a^{\diamond}\cdot\lambda)$. 故 λ 为 S 上的 $\mathscr{L}^*$-同余.

现令 $a \in S_\alpha$，$b \in S_\beta$ 且 $a\lambda b$，则 $\exists \pi \leqslant \alpha\beta$，使得 $a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\pi} = b^{\diamond}\varphi_{\beta,\pi}$，而 $(a^{\diamond})^{\diamond} = a^{\diamond}$，$(b^{\diamond})^{\diamond} = b^{\diamond}$，于是 $(a^{\diamond})^{\diamond}\varphi_{\alpha,\pi} = (b^{\diamond})^{\diamond}\varphi_{\beta,\pi}$，从而 $a^{\diamond}\lambda b^{\diamond}$，因此 λ 为 S 上的酉同余.

注意到 $(a^{\diamond})^{\diamond} = a^{\diamond}$，于是 $a\lambda a^{\diamond}$，从而 λ 为 S 上的带同余. 由定理 1 知，存在 $\mathscr{L}^*$-酉同余聚 $(\xi;\eta_\alpha)$ 使得 $\lambda = \rho_{(\xi;\eta_\alpha)}$. 为证 λ 为矩形带同余，仅需证明 ξ 为 Y 上的泛关系. 令 $a \in S_\alpha$，$b \in S_\beta$，则 $a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\alpha\beta} = (a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\alpha\beta})\varphi_{\alpha\beta,\alpha\beta}$，$b^{\diamond}\varphi_{\beta,\alpha\beta} = (b^{\diamond}\varphi_{\beta,\alpha\beta})\varphi_{\alpha\beta,\alpha\beta}$. 又 $(a^{\diamond}, a^{\diamond}\varphi_{\alpha,\alpha\beta})$，$(b^{\diamond}, b^{\diamond}\varphi_{\beta,\alpha\beta}) \in \lambda$，于是 $\alpha\xi\beta$. 故 ξ 为 Y 上的泛关系，从而 λ 为 S 上的矩形带同余.

关于 λ 的最小性，类似于命题 2 中 ρ 的最小性证明. 命题 3 得证.

命题 4　令 $S = [Y; S_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}]$ 为正规密码 rpp 半群. 若 ρ 为 S 上的 $\mathscr{L}^*$-酉同余，则 ρ 为 S 上的正规带同余当且仅当 $\overline{\mathscr{H}} \subseteq \rho$.

证　令 ρ 为 S 上的正规带同余，则 S/ρ 为带，于是 $\forall a \in S$，$a\rho$ 为幂等元，由引理 7 知，$a\rho = a^{\diamond}\rho$. 若 $b \in S$ 且 $a\overline{\mathscr{H}}b$，则 $a^{\diamond}\overline{\mathscr{H}}b^{\diamond}$，进而 $a^{\diamond}\mathscr{H}b^{\diamond}$，于是 $a^{\diamond}\rho\mathscr{H}b^{\diamond}\rho$，从而 $a^{\diamond}\rho = b^{\diamond}\rho$，故 $a\rho = b\rho$. 因此 $\overline{\mathscr{H}} \subseteq \rho$.

反之，若 $\overline{\mathscr{H}} \subseteq \rho$，则 S/ρ 同构于 $S/\overline{\mathscr{H}}$ 关于 $\rho/\overline{\mathscr{H}}$ 的商半群，而 $S/\overline{\mathscr{H}}$ 为正规带，从而 S/ρ 为正规带，故 ρ 为 S 上的正规带同余.

推论 1　$\overline{\mathscr{H}}$ 为正规密码 rpp 半群上的最小正规带 $\mathscr{L}^*$-酉同余.

4　参考文献

[1] Guo Yuqi, Shum K P, Zhu Pinyu. The structure of left C-rpp semigroups [J]. Semigroup Forum, 1995, 50(1): 9-23.

[2] 郭小江. PI-强 rpp 半群的结构 [J]. 科学通报, 1996, 41(18): 1647-1650.

[3] Guo Xiaojiang, Guo Yuqi, Shum K P. Super rpp semigroups [J]. Indian J Pure Appl Math, 2010, 41(3): 505-533.

[4] He Yong, Guo Yuqi, Shum K P. The construction of orthodox super rpp semigroups [J]. Sci China: Ser A, 2004, 47(4): 552-565.

[5] Guo Xiaojiang, Zhao Ming, Shum K P. Wreath product structure of left C-rpp semigroups [J]. Algebra Colloquium, 2008, 15(1): 101-108.

[6] 郭聿琦，岑嘉评，朱聘瑜. 左 C-rpp 半群的结构 [J]. 科学通报, 1992, 37(4): 292-294.

[7] 郭小江，吴爱军. 关于左 C-rpp 半群的一点注记 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2005, 29(4): 283-286.

[8] Guo Xiaojiang. The structure of NBe-rpp semigroups [J]. Northeastern Mathematical Journal, 2000, 16(4): 398-404.

[9] 郭聿琦. 关于左 C-rpp 半群的右对偶的几点注记 [J]. 科学通报, 1997, 42(13): 1375-1378.

[10] Shum K P, Ren Xueming. The structure of right C-rpp semigroups [J]. Semigroup Forum, 2004, 68(2): 280-292.

[11] Guo Xiaojiang, Jun Young Bae, Zhao Ming. Pseudo-C-rpp semigroups [J]. Acta Mathematica Sinica: Engl Ser, 2010, 26(4): 629-646.

[12] Guo Xiaojiang, Shum K P, Guo Yuqi. Perfect rpp semigroups [J]. Comm Alg, 2001, 29(6): 2447-2459.

[13] Shum K P, Guo Xiaojiang, Ren Xueming. (l)-Green´s relations and perfect rpp semigroups [C] //Sunada T, Polly W S, Yang Lo. Proceedings of the 3th Asian Mathematical Conference2000, 2002, 61(6): 604-613.

[14] Wang Junqi, Guo Xiaojiang, Qiu Xiaowei. Regular OS-rpp semigroups [J]. Bull Malaysian Math Sci Soc, 2014, 37(2): 597-610.

[15] Guo Xiaojaing, Yang Yanping. Cryptic rpp semigroups [J]. Adv Math, 2013, 42(4): 465-474.

[16] 邱小伟. 自然偏序和超 rpp 半群 [D]. 南昌: 江西师范大学, 2013.

[17] Howie J M. An introduction to semigroup theory [M]. London: Academic Press, 1976.

[18] Fountain J. Abundant semigroups [J]. Proc London Math Soc, 1982, 44(1): 103-129.

[19] Guo Xiaojiang, Guo Yuqi, Shum K P. Rees matrix theorem for $\mathscr{D}^{(l)}$-simple strongly rpp semigroups [J]. Asian-European J Math, 2008, 1(2): 215-223.

[20] Guo Junying, Guo Xiaojiang, Ding Juanying. Completely $\mathscr{J}^{(l)}$-simple semigroups [J]. 数学进展, 2015, 44(5): 710-718.

[21] Guo Junying, Guo Xiaojiang, Ding Juanying. Free completely $\mathscr{J}^{(l)}$-simple semigroups [J]. Acta Math Sinica: Engl Ser, 2015, 31(7): 1086-1096.

[22] Petrich M, Reilly N R. Completely regular semigroups [M]. New York: John Wiley & Sons, 1999.

The Congruences on Normal Cryptic rpp Semigroups

GUO Junying[1],GUO Xiaojiang[2*],YE Huoping[2]
(1. College of Science and Technology,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330027,China;
2. College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: The congruences on normal cryptic rpp semigroups is studied by the abundant semigroup theory. The construction of $\mathscr{L}^*$-unary congruences on normal cryptic rpp semigroups is established by introducing the concept of $\mathscr{L}^*$-unary congruence aggregate. In addition,some special cases are considered.

Key words: rpp semigroup; super rpp semigroup; cryptic rpp semigroup; unary congruence

(责任编辑:曾剑锋)

(上接第 359 页)

The Enhanced Tabu Search Algorithm for Solving Low-Carbon Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Box Constraints

WANG Yongsheng,WAN Long*,LI Shengsheng
(1. School of Information Management,Jiangxi University of Finance and Economics,Nanchang Jiangxi 330013,China)

Abstract: Two NP hard problems of two-dimensional packing and vehicle path are considered,and Carbon emissions are taken as the objective function,which studies the vehicle routing problem(2L-CVRP) with two-dimensional packing constraints in low-carbon environment. The main idea is to take the tabu search algorithm(Tabu Search TS) as the main frame for this problem and use four heuristic boxing strategy to generate the initial solution based on the greedy idea,by improving the encoding and decoding methods and using the dynamic growth of the tabu length of the TS algorithm to enhance this algorithm. The results show that the enhanced tabu search algorithm has some advantages for solving this kinds of problems.

Key words: the vehicle routing problem in low carbon; enhanced tabu search algorithm; greedy algorithm; two-dimensional packing constraint

(责任编辑:曾剑锋)