第 41 卷 第 4 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 41 No. 4
2017 年 7 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　Jul. 2017

文章编号: 1000-5862(2017)04-0367-05

有交换 Sylow q-子群的 p^3q^3 阶群的分类

陈松良[1,2,3]**,黎先华**[2]

(1. 贵州师范学院数学与计算机科学学院,贵州 贵阳 550018;2. 苏州大学数学科学学院,江苏 苏州 215006;
3. 贵州省教育大数据技术和教育数学院士工作站,贵州 贵阳 550018)

摘要: 设 p,q 为奇素数,且 $p>q$,而 G 是 p^3q^3 阶群. 当 G 的 Sylow q-子群是初等因子为 (q^2,q) 的交换群时,利用有限群的局部分析方法,对群 G 进行了完全分类并获得了其全部构造.

关键词: 有限群;同构分类; 群的构造

中图分类号: O 152.1　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.04.07

0 引言

有限群的同构分类,一直是人们关心的问题. 设 p,q 是不同的素数,文献[1-2]分别确定了 p^3q 阶群和 p^3q^2 阶群的构造. 设 p 是奇素数,文献[3-5]确定了 2^3p^2 阶群的构造,文献[6]确定了所有 2^3p^3 阶群的构造($p\neq 3,7$). 文献[7]确定了所有 2^37^3 阶群的构造,但有几处错误;文献[8]确定了所有 2^33^3 阶群的构造,并更正了文献[7]中的错误. 文献[9]分析了无 3 次因子阶群的结构信息并给出了在同构意义上构造这类群的一个算法,文献[10]对无 3 次因子阶群的结构信息给出了更细致准确地描述和刻画. 进一步地,文献[11]对无 4 次因子阶群的结构信息给出了描述和刻画. 文献[12]讨论了一类满足 LA(2)-猜想的特殊 p-群的性质. 当 p,q 都是奇素数且 $p>q$ 时,对于任意正整数 n,文献[13]确定了 Sylow p-子群为循环群的 p^nq^3 阶群的构造,文献[14]确定了 Sylow q-子群为循环群的 p^3q^n 阶群的构造,文献[15]对 Sylow q-子群是初等因子为(q^2,q)的交换 q-群而 Sylow p-子群是初等交换 p-群的 p^3q^3 阶群进行了完全分类. 本文的任务是继续文献[15]的工作,对 Sylow q-子群是初等因子为(q^2,q)的交换 q-群的 p^3q^3 阶群进行完全分类并确定它们的全部构造.

1 主要结果

定理 1 设 p,q 为不同的奇素数且 $p>q$,G 是 p^3q^3 阶群,其 Sylow q-子群是有初等因子(q^2,q)的交换 q-群,当 $q\geqslant 3$ 时,

(i) 若$(q,(p^3-1)(p+1))=1$,则 G 恰有 5 个不同构的类型;

(ii) 若$(q^2,p+1)=q$(这时必有$(q,p^3-1)=1$),则 G 恰有 9 个不同构的类型;

(iii) 若$(q^2,p+1)=q^2$,则 G 恰有 11 个不同构的类型;

(iv) 若$(q^2,p^2+p+1)=q$ 且 $q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$,则 G 恰有 7 个不同构的类型;

(v) 若$(q^2,p^2+p+1)=q^2$ 且 $q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$,则 G 恰有 8 个不同构的类型;

(vi) 若$(q^2,p-1)=q$,则(a) 当 $q=3$ 时,G 共有 53 个不同构的类型;(b) 当 $q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ 时,G 共有 $(q-1)^2(3q+2)/6+9q+20$ 个不同构的类型;(c) 当 $q\equiv -1(\mathrm{mod}\ 3)$ 时,G 共有 $q(q+1)(3q-1)/6-q^2+9q+19$ 个不同构的类型;

(vi) 若$(q^2,p-1)=q^2$,则(a) 当 $q=3$ 时,G 共有 129 个不同构的类型;(b) 当 $q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ 时,G 共有$(2q+1)(q-1)/6+2q^3+q^2+13q+26$ 个不同构的类型;(c) 当 $q\equiv -1(\mathrm{mod}\ 3)$ 时,G 共有$(q+1)\cdot(2q+3)/6+2q^3+q^2+12q+24$ 个不同构的类型.

2 定理 1 的证明

为了给出定理 1 的证明,文中用 $|g|$ 表示元素 g 的阶,对于 2 个群 A 与 B,用 $A:B$ 表示 A 与 B 的半直积. 并总设 G 是 p^3q^3 阶群,且 G 的 Sylow q-子群是初等因子为(q^2,q)的交换 q-群 $Q=\langle x\rangle\times\langle y\rangle$,其中 $|x|=q^2$,$|y|=q$. 而 G 的 Sylow p-子群 P 有 5 种不

收稿日期: 2017-02-25

基金项目: 国家自然科学基金(11661023)和贵州省科技平台及人才团队专项资金(黔科合[2016]5609 号)资助项目.

作者简介: 陈松良(1964-),男,湖南双峰人,教授,博士,从事有限群论研究. E-mail: chsl_2013@aliyun.com

同构类型：$P_1=\langle a\rangle$，其中 $|a|=p^3$；$P_2=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$，其中 $|a|=p^2$，$|b|=p$；$P_3=\langle a\rangle\times\langle b\rangle\times\langle c\rangle$，其中 $|a|=|b|=|c|=p$；$P_4=\langle a\rangle:\langle b\rangle$，其中 $|a|=p^2$，$|b|=p$，$a^b=a^{p+1}$；$P_5=\langle a\rangle\times\langle c\rangle:\langle b\rangle$，其中 $|a|=|b|=|c|=p$，$a^b=ac$，$c^b=c$. 由于定理的证明较长，分为几个引理来叙述，且下文中 $\mathscr{Z}_n$，$\mathscr{Z}_n^*$ 分别表示模 n 的完全剩余系与简化剩余系，未说明的符号参见文献[6].

引理1 G 的 Sylow p-子群必是 G 的正规子群.

证 不难看出，Q 中恰有 $(q^2-q)q$ 个阶为 q^2 的元和 q^2-1 个阶为 q 的元，而每个 q^2 阶循环子群中恰有 $q-1$ 个阶为 q 的元，从而 Q 的自同构群 $\mathrm{Aut}(Q)$ 的阶是 $(q^2-q)q((q^2-1)-(q-1))=q^3(q-1)^2$. 若 G 的 Sylow q-子群 Q 是正规子群，则 G 的 Sylow p-子群 P 在 Q 上的作用是平凡的，从而 $P\lhd G$. 若 Q 不正规，则当 $1<O_q(G)<Q$ 时，由 Sylow 定理知 $G/O_q(G)$ 的 Sylow p-子群 $PO_q(G)/O_q(G)$ 是正规的，从而 $PO_q(G)\lhd G$. 但 $p>q$，所以 P char $PO_q(G)$，因此仍有 $P\lhd G$. 若 $O_q(G)=1$，则由 G 的可解性得 $O_p(G)>1$. 这时，若 P 不正规，则 $G/O_p(G)$ 的 Sylow p-子群 $P/O_p(G)$ 也不正规. 由 Sylow 定理可知，$G/O_p(G)$ 的 Sylow p-子群有 q^3 个，从而 $P/O_p(G)$ 是自正规的交换 p-群，又由 Burnside 定理知，$G/O_p(G)$ 的 Sylow q-子群 $QO_p(G)/O_p(G)$ 是正规的. 又 $QO_p(G)/O_p(G)\cong Q$，而 p 不整除 $\mathrm{Aut}(Q)$ 的阶，所以 $P/O_p(G)$ 平凡作用在 Q 上，这说明 $P/O_p(G)\lhd G/O_p(G)$，从而 $P\lhd G$，矛盾. 引理1得证.

引理2 设 G 是 Sylow q-子群为交换 q-群 Q 而 Sylow p-子群为循环 p-群 P_1 的 p^3q^3 阶群，σ 是模 p^3 的一个原根，$r=\sigma^{p^2(p-1)/q^2}$，$s=\sigma^{p^2(p-1)/q}$，则

(i) 当 $(q,p-1)=1$ 时，G 恰有 1 个不同构的类型 $G=P_1\times Q$；

(ii) 当 $(q^2,p-1)=q$ 时，G 除了 $P_1\times Q$ 外，还有下列 2 个构造：

$$G=(\langle a\rangle:\langle x\rangle)\times\langle y\rangle,a^x=a^s,$$
$$G=(\langle a\rangle:\langle y\rangle)\times\langle x\rangle,a^y=a^s;$$

(iii) 当 $(q^2,p-1)=q^2$ 时，G 除了(ii)中的 3 个构造外，还有下列 1 种构造：

$$G=(\langle a\rangle:\langle x\rangle)\times\langle y\rangle,a^x=a^r.$$

证 由文献[3]中的引理2即得.

引理3 设 p^3q^3 阶群 G 的 Sylow p-子群是交换 p-群 P_2 而 Sylow q-子群为交换 q-群 Q，σ 是模 p^2 与 p 的一个公共原根，$r=\sigma^{p(p-1)/q^2}$，$s=\sigma^{p(p-1)/q}$，则

(i) 当 $(q^2,p-1)=1$ 时，G 恰有 1 种不同构的类型 $G=P_2\times Q$；

(ii) 当 $(q^2,p-1)=q$ 时，G 除了 $P_2\times Q$ 外，还有下列不同构的类型：

$$G=(\langle b\rangle:\langle y\rangle)\times\langle a\rangle\times\langle x\rangle,b^y=b^s,\quad(1)$$
$$G=(\langle b\rangle:\langle x\rangle)\times\langle a\rangle\times\langle y\rangle,b^x=b^s,\quad(2)$$
$$G=(\langle a\rangle:\langle y\rangle)\times\langle b\rangle\times\langle x\rangle,a^y=a^s,\quad(3)$$
$$G=(\langle a\rangle:\langle x\rangle)\times\langle b\rangle\times\langle y\rangle,a^x=a^s,\quad(4)$$
$$G=(\langle a\rangle:\langle x\rangle)\times(\langle b\rangle:\langle y\rangle),a^x=a^s,b^y=b^s,\quad(5)$$
$$G=(\langle a\rangle:\langle y\rangle)\times(\langle b\rangle:\langle x\rangle),a^y=a^s,b^x=b^s,\quad(6)$$
$$G(i)=(\langle a\rangle\times\langle b\rangle):(\langle x\rangle\times\langle y\rangle),a^x=a,a^y=a^s,b^x=b^s,b^y=b^{s^i},i\in\mathscr{Z}_q^*,\quad(7)$$
$$G(i)=((\langle a\rangle\times\langle b\rangle):\langle x\rangle)\times\langle y\rangle,a^x=a^s,b^x=b^{s^i},i\in\mathscr{Z}_q^*,\quad(8)$$
$$G(i)=((\langle a\rangle\times\langle b\rangle):\langle y\rangle)\times\langle x\rangle,a^y=a^s,b^y=b^{s^i},i\in\mathscr{Z}_q^*,\quad(9)$$

其中形如(7)~(9)式的各有 $q-1$ 个不同构的类型，此时 G 共有 $4+3q$ 个不同构的类型；

(iii) 当 $(q^2,p-1)=q^2$ 时，G 除了(ii)中的所有构造外，还有下列构造：

$$G=(\langle b\rangle:\langle x\rangle)\times\langle a\rangle\times\langle y\rangle,b^x=b^r,\quad(10)$$
$$G=(\langle a\rangle:\langle x\rangle)\times\langle b\rangle\times\langle y\rangle,a^x=a^r,\quad(11)$$
$$G=(\langle a\rangle:\langle y\rangle)\times(\langle b\rangle:\langle x\rangle),a^y=a^s,b^x=b^r,\quad(12)$$
$$G=(\langle a\rangle:\langle x\rangle)\times(\langle b\rangle:\langle y\rangle),a^x=a^r,b^y=b^s,\quad(13)$$
$$G(i)=((\langle a\rangle\times\langle b\rangle):\langle x\rangle)\times\langle y\rangle,a^x=a^{s^i},b^x=b^r,i\in\mathscr{Z}_q^*,\quad(14)$$
$$G(i)=((\langle a\rangle\times\langle b\rangle):\langle x\rangle)\times\langle y\rangle,a^x=a^r,b^x=b^{s^i},i\in\mathscr{Z}_q^*,\quad(15)$$
$$G(i)=((\langle a\rangle\times\langle b\rangle):\langle x\rangle)\times\langle y\rangle,a^x=a^r,b^x=b^{r^i},i\in\mathscr{Z}_q^*,\quad(16)$$
$$G(i)=(\langle a\rangle\times\langle b\rangle):(\langle x\rangle\times\langle y\rangle),a^x=a^r,a^y=a,b^x=b^{r^i},b^y=b^{s^{q-i}},i\in\mathscr{Z}_q^*,\quad(17)$$

其中形如(14)~(15)式和(17)式的各有 $q-1$ 个不同构的类型，形如(16)式的有 q^2-q 个不同构的类型，此时 G 共有 q^2+5q+5 个不同构的类型.

证 因为 G 的 Sylow p-子群是正规子群. 类似于文献[4]中引理2的证明，G 必是超可解的，而且可设 $\langle a\rangle$ 与 $\langle b\rangle$ 都是 Q-不变的. 因为 $\mathrm{Aut}(\langle a\rangle)$ 与 $\mathrm{Aut}(\langle b\rangle)$ 分别是 $p(p-1)$，$p-1$ 阶循环群，所以

(i) 当 $(q,p-1)=1$ 时，G 必是交换群且有构造 $G=P_2\times Q$；

(ii) 当 $(q^2,p-1)=q$ 时，G 除了 $P_2\times Q$ 外还可能是非交换群，而因为 $Q/C_Q(a)$，$Q/C_Q(b)$ 分别同构于 $\mathrm{Aut}(\langle a\rangle)$ 与 $\mathrm{Aut}(\langle b\rangle)$ 的一个子群，所以

$C_Q(a)$ 与 $C_Q(b)$ 为 Q 或 Q 的 q^2 阶子群.

(a) 当 $C_Q(a)=Q$ 而 $C_Q(b)\neq Q$ 时，若 $C_Q(b)$ 是 Q 的 q^2 阶循环子群，则不妨设 $C_Q(b)=\langle x\rangle$，$b^y=b^s$（否则只要用 y 的适当方幂代替 y 即可），因此 G 有构造(1). 若 $C_Q(b)$ 是 Q 的 q^2 阶初等交换子群，则 $C_Q(b)=\langle x^q,y\rangle$，可设 $b^x=b^s$，因此 G 有构造(2).

(b) 当 $C_Q(b)=Q$ 而 $C_Q(a)\neq Q$ 时，若 $C_Q(a)$ 是 Q 的 q^2 阶循环子群，则设 $C_Q(a)=\langle x\rangle$，$a^y=a^s$，因此 G 有构造(3). 若 $C_Q(a)$ 是 Q 的 q^2 阶初等交换子群，则 $C_Q(a)=\langle x^q,y\rangle$，设 $a^x=a^s$，因此 G 有构造(4).

(c) 当 $C_Q(a)$ 与 $C_Q(b)$ 都不等于 Q 且 $C_Q(a)\neq C_Q(b)$ 时，则由于 Q 中只有一个 q^2 阶初等交换子群 $\langle x^q,y\rangle$，但有 q 个不同的 q^2 阶循环子群 $\langle xy^i\rangle$，$i=0,1,\cdots,q-1$，所以若 $C_Q(a)=\langle x^q,y\rangle$ 而 $C_Q(b)=\langle xy^i\rangle$，则必有 $a^y=a$ 且可设 $a^x=a^s$，$b^y=b^s$，又由 $b^{xy^i}=b$ 可得 $b^x=b^{s^{q-i}}$，又注意到 $\langle x\rangle\times\langle y\rangle=\langle xy^i\rangle\times\langle y\rangle$，所以将 xy^i 换回为 x 得 G 的构造(5). 类似地，若 $C_Q(a)$ 是 q^2 阶循环子群而 $C_Q(b)$ 是 q^2 阶初等交换子群，则可得 G 的构造(6). 若 $C_Q(a)$ 与 $C_Q(b)$ 是 Q 的 2 个不同的 q^2 阶循环子群，则不妨设 $C_Q(a)=\langle x\rangle$ 而 $C_Q(b)=\langle xy^j\rangle$，$1\leqslant j\leqslant q-1$，于是 $a^x=a$，$a^y=a^s$，$b^x=b^s$，$b^y=b^{s^j}$，这里 $ij\equiv-1(\bmod q)$，由此得 G 的 $q-1$ 个形如(7)式的构造.

(d) 当 $C_Q(a)=C_Q(b)\neq Q$ 时，则若 $C_Q(a)=C_Q(b)=\langle x^q,y\rangle$，有 $a^y=a$，$b^y=b$，且设 $a^x=a^s$，$b^x=b^{s^i}$，其中 $1\leqslant i\leqslant q-1$，于是得 G 的构造(8)；若 $C_Q(a)=C_Q(b)$ 是循环子群，不妨设为 $\langle x\rangle$，从而 G 有构造(9).

(iii) 当$(q^2,p-1)=q^2$时，G 除了(ii)中的所有构造外，还有其他不同构的类型. $C_Q(a)$，$C_Q(b)$ 中至少有一个可假定为 $\langle y\rangle$.

(a) 当 $C_Q(a)=Q$，$C_Q(b)=\langle y\rangle$ 时，G 有构造(10)；
(b) 当 $C_Q(a)=\langle y\rangle$，$C_Q(b)=Q$ 时，G 有构造(11)；
(c) 当 $C_Q(a)=\langle x\rangle$，$C_Q(b)=\langle y\rangle$ 时，G 有构造(12)；
(d) 当 $C_Q(a)=\langle y\rangle$，$C_Q(b)=\langle x\rangle$ 时，G 有构造(13)；
(e) 当 $C_Q(a)=\langle x^q,y\rangle$，$C_Q(b)=\langle y\rangle$ 时，G 有构造(14)；
(f) 当 $C_Q(a)=\langle y\rangle$，$C_Q(b)=\langle x^q,y\rangle$ 时，G 有构造(15)；
(g) 当 $C_Q(a)=C_Q(b)=\langle y\rangle$ 时，G 有构造(16)；
(h) 当 $C_Q(a)=\langle y\rangle$，$C_Q(b)=\langle x^qy^n\rangle$，$1\leqslant n\leqslant q-1$ 时，由于 $Q=\langle x,y\rangle=\langle x,y^n\rangle$，所以不妨设 $C_Q(b)=\langle x^qy\rangle$，于是 G 有构造(17)；若在(17)式中取 $b^x=b^{r^{i+kq}}$，而 $1\leqslant k\leqslant q-1$，则当用 xy^j 代替 x 时(其中 j 满足 $ij\equiv k(\bmod q)$)，即所得 G 的构造与(17)式是同构的. 综上所述，引理 3 得证.

引理 4　设 p^3q^3 阶群 G 的 Sylow p-子群是初等交换 p-群 P_3 而 Sylow q-子群为交换 q-群 Q，σ 是模 p 的一个原根，$r=\sigma^{(p-1)/q^2}$，$s=\sigma^{(p-1)/q}$，则

(i) 当$(q,(p^3-1)(p+1))=1$ 时，G 只有 1 个不同构的类型 $G=P_3\times Q$；

(ii) 当$(q^2,p-1)=q$ 时，(a) 若 $q=3$，则 G 有 24 个不同构的类型；(b) 若 $q\equiv1(\bmod 3)$，则 G 有 $(q-1)^2(3q+2)/6+4q+6$ 个不同构的类型；(c) 若 $q\equiv-1(\bmod 3)$，则 G 有 $q(q+1)(3q-1)/6-q^2+4q+5$ 个不同构的类型；

(iii) 当$(q^2,p-1)=q^2$时，(a) 若 $q=3$，则 G 有 72 个不同构的类型；(b) 若 $q\equiv1(\bmod 3)$，则 G 有 $2q^3+4q+8-(q-1)^2/6$ 个不同构的类型；(c) 若 $q\equiv-1(\bmod 3)$，则 G 有 $2q^3+4q+6-(q+1)(q-3)/6$ 个不同构的类型；

(iv) 当$(q^2,p+1)=q$ 时，G 有 3 个不同构的类型；

(v) 当$(q^2,p+1)=q^2$时，G 有 4 个不同构的类型；

(vi) 当 $q\equiv1(\bmod 3)$ 且$(q^2,p^2+p+1)=q$ 时，G 有 3 个不同构的类型；

(vii) 当 $q\equiv1(\bmod 3)$ 且$(q^2,p^2+p+1)=q^2$时，G 有 4 个不同构的类型.

证　由文献[15]的定理 1 即可得证(此处群 G 的构造类型较多，所以未列出具体构造).

引理 5　设 p^3q^3 阶群 G 的 Sylow p-子群为非交换 p-群 P_4 而 Sylow q-子群为交换 q-群 Q，σ 是模 p^2 的一个原根，$r=\sigma^{p(p-1)/q^2}$，$s=\sigma^{p(p-1)/q}$，则

(i) 当$(q,p-1)=1$ 时，G 只有 1 个不同构的类型 $G=P_4\times Q$；

(ii) 当$(q^2,p-1)=q$ 时，G 除了 $P_4\times Q$ 外，还有下列构造：

$$G=(\langle a\rangle:(\langle b\rangle\times\langle x\rangle))\times\langle y\rangle,a^x=a^s,a^b=a^{p+1},\quad(18)$$
$$G=(\langle a\rangle:(\langle b\rangle\times\langle y\rangle))\times\langle x\rangle,a^y=a^s,a^b=a^{p+1};\quad(19)$$

(iii) 当$(q^2,p-1)=q^2$时，G 除了(ii)中的 3 个构造外，还有下列构造：

$$G=(\langle a\rangle:(\langle b\rangle\times\langle x\rangle))\times\langle y\rangle,a^x=a^r,a^b=a^{p+1}.\quad(20)$$

证　由引理 1 知 G 的 Sylow p-子群是正规子群，类似文献[14]中引理 4，不难证明 G 是超可解群，而且可设 $\langle a\rangle$ 与 $\langle b\rangle$ 都是 Q-不变的. 当$(q,p-1)=1$ 时，必有 $G\cong P_4\times Q$. 当$(q^2,p-1)=q$ 时，G 除了构造 $P_4\times Q$ 外，还有其他构造. 令 $H=\langle b\rangle Q$，则 $H/C_H(a)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(\langle a\rangle)$ 的一个子群，于是 $H/C_H(a)$

是循环群. 又 $b \notin C_H(a)$,所以若 $C_Q(a) = \langle x^q, y\rangle$,则可设 $a^x = a^s$,而 $b^x = b$,其中 $s = \sigma^{p(p-1)/q}$,而 σ 是模 p^2 与 p 的一个公共原根. 注意到 $a^y = a$,所以将 y 作用在 $[a,b] = a^p$ 的两边得 $[a, b^{s^i}] = a^p$,于是 $ps^i \equiv p(\mathrm{mod}\ p^2)$,从而 $s^i \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$,故必有 $i \equiv 0(\mathrm{mod}\ q)$,即 $y \in C_Q(b)$,因而 $C_Q(b) = Q$. 由此知 G 有构造(18). 若 $C_Q(a) = \langle x\rangle$,则类似于前面的分析得 G 的构造(19). 若 $C_Q(a) = Q$,则将 x, y 依次作用在 $[a,b] = a^p$ 的两边后,必推出 $C_Q(b) = Q$,从而得 G 的构造 $P_4 \times Q$.

当$(q^2, p-1) = q^2$ 时,G 除了(ii)中的 3 个构造外,还有别的构造. 这时 $Q/C_Q(a)$ 应是 q^2 阶循环群,于是 $C_Q(a) = \langle y\rangle$,从而可设 $a^x = a^r$,其中 $r = \sigma^{p(p-1)/q^2}$,而 σ 是模 p^2 的一个原根. 类似于前面的分析得 $C_Q(b) = Q$,故 G 有构造(20). 综上所述,引理 5 得证.

引理 6 设 p^3q^3 阶群 G 的 Sylow p-子群为非交换 p-群 P_5 而 Sylow q-子群为交换 q-群 Q,σ 是模 p 的一个原根,$r = \sigma^{(p-1)/q^2}$,$s = \sigma^{(p-1)/q}$,则

(i) 当$(q, p^2-1) = 1$ 时,G 只有 1 个不同构的类型 $G = P_5 \times Q$;

(ii) 当$(q^2, p-1) = q$ 时,G 共有 $2q+4$ 个不同构的类型,除了 $P_5 \times Q$ 外,还有下列构造:

$$G(i) = (((\langle a\rangle \times \langle c\rangle) : \langle b\rangle) : \langle y\rangle) \times \langle x\rangle,$$
$$a^y = a^s, b^y = b^{s^i}, c^y = c^{s^{i+1}}, \tag{21}$$

其中 $0 \leqslant i \leqslant q-1$,而 $G(i) \cong G(j)$ 当且仅当 $ij \equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$,所以(21)式共包含$(q+3)/2$ 个不同构的 p^3q^3 阶群;

$$G(i) = (((\langle a\rangle \times \langle c\rangle) : \langle b\rangle) : \langle x\rangle) \times \langle y\rangle,$$
$$a^x = a^s, b^x = b^{s^i}, c^x = c^{s^{i+1}}, \tag{22}$$

其中 $0 \leqslant i \leqslant q-1$,而 $G(i) \cong G(j)$ 当且仅当 $ij \equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$,所以(22)式共包含$(q+3)/2$ 个不同构的 p^3q^3 阶群;

$$G(i) = ((\langle a\rangle \times \langle c\rangle) : \langle b\rangle) : (\langle x\rangle \times \langle y\rangle),$$
$$a^x = a, a^y = a^s, b^x = b^s, b^y = b^{s^i}, c^x = c^s, c^y = c^{s^{i+1}}, \tag{23}$$

其中 $0 \leqslant i \leqslant q-1$,(23)式共包含 q 个不同构的 p^3q^3 阶群;

(iii) 当$(q^2, p-1) = q^2$ 时,G 共有$(q^2+7q+10)/2$ 个不同构的类型,除了(ii)中的构造外,还有下列构造:

$$G(i) = (((\langle a\rangle \times \langle c\rangle) : \langle b\rangle) : \langle x\rangle) \times \langle y\rangle,$$
$$a^x = a^r, b^x = b^{r^i}, c^x = c^{r^{i+1}}, \tag{24}$$

其中 $0 \leqslant i \leqslant q^2-1$,而 $G(i) \cong G(j)$ 当且仅当 $ij \equiv 1(\mathrm{mod}\ q^2)$,所以(24)式共包含 $1+(q^2+q)/2$ 个不同构的 p^3q^3 阶群;

$$G(i) = ((\langle a\rangle \times \langle c\rangle) : \langle b\rangle) : (\langle x\rangle \times \langle y\rangle),$$
$$a^x = a^r, a^y = a, b^x = b^{r^i}, b^y = b^s, c^x = c^{r^{i+1}}, c^y = c^s, \tag{25}$$

其中 $0 \leqslant i \leqslant q-1$,(25)式共包含 q 个不同构的 p^3q^3 阶群;

(iv) 当$(q^2, p+1) = q$ 时,G 除了 $P_5 \times Q$ 外,还有下列 2 个构造:

$$G = ((\langle a\rangle \times \langle c\rangle) : \langle b\rangle) : \langle x\rangle) \times \langle y\rangle, a^x = b, b^x = a^{-1}b^{\beta}, c^x = c, \tag{26}$$

$$G = ((\langle a\rangle \times \langle c\rangle) : \langle b\rangle) : \langle y\rangle) \times \langle x\rangle, a^y = b, b^y = a^{-1}b^{\beta}, c^y = c, \tag{27}$$

在(26)式与(27)式中 $\beta \in \mathbb{Z}_p$,使得 $\lambda^2 - \beta\lambda + 1$ 是 $\mathbb{Z}_p$ 上多项式 $\lambda^q - 1$ 的一个 2 次不可约因式.

(v) 当$(q^2, p+1) = q^2$ 时,G 除了(iv)中的 3 个构造外,还有下列构造:

$$G = (((\langle a\rangle \times \langle c\rangle) : \langle b\rangle) : \langle x\rangle) \times \langle y\rangle, a^x = b, b^x = a^{-1}b^{\beta}, c^x = c, \tag{28}$$

其中 $\beta \in \mathbb{Z}_p$,使得 $\lambda^2 - \beta\lambda + 1$ 是 $\mathbb{Z}_p$ 上多项式$(\lambda^{q^2} - 1)/(\lambda^q - 1)$ 的一个 2 次不可约因式.

证 由引理 1 知 G 的 Sylow p-子群是正规的. 因为 $\Phi(P_5) = Z(P_5) = \langle c\rangle$,于是 $\langle c\rangle \lhd G$. 从而 $P_5/\langle c\rangle$ 是 Q-不变的 p^2 阶初等交换 p-群.

(i) 若$(q^2, p^2-1) = 1$,则 Q 在 P_5 上的作用是平凡的,从而 G 的构造必是 $P_5 \times Q$.

(ii) 若$(q^2, p^2-1) = q$,则 G 的构造除 $P_5 \times Q$ 外,还有其他构造. 类似文献[14]中引理 5 的证明,易见 G 是超可解的,而且可设 $\langle a\rangle$,$\langle b\rangle$ 都是 Q-不变的. 这时 $C_Q(a)$ 与 $C_Q(b)$ 为 Q 或 Q 的 q^2 阶子群,且其中至少有一个为 Q 的 q^2 阶子群.

(a) 当 $C_Q(a) = \langle x\rangle$,$C_Q(b) = Q$ 时,G 有形如(21)式的构造(其中 $i=0$);当 $C_Q(a) = \langle x^q, y\rangle$,$C_Q(b) = Q$ 时,G 有形如(22)式的构造(其中 $i=0$).

(b) 当 $C_Q(a) = C_Q(b) = \langle x\rangle$ 时,可设 $a^y = a^s$,$b^y = b^{s^i}$,其中 $1 \leqslant i \leqslant q-1$. 将 y 作用在 $[a,b] = c$ 的两边后得 $c^y = c^{s^{i+1}}$,因此 G 有形如(21)式的构造. 又在(21)式中,若$(i,q) = 1$,则存在唯一的 $j \in \mathbb{Z}_q^*$,使得 $ij \equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$. 当用 y^j 代替 x,用 c^{-1} 代替 c,再将 a, b 对调时,$G(i)$ 就变成了 $G(j)$;这就证明了 $G(i) \cong G(j)$ 当且仅当 $ij \equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$. 所以当 $i \neq 0$ 时,(21)式共包含$(q+1)/2$ 个不同构的 p^3q^3 阶群. 从而(21)式共包含$(q+3)/2$ 个不同构的 p^3q^3 阶群.

(c) 当 $C_Q(a) = C_Q(b) = \langle x^q, y\rangle$ 时,可设 $a^x =$

a^s，$b^x=b^{s^i}$，其中 $1\leqslant i\leqslant q-1$. 类似于前面的分析，可知 G 有形如(22)式的构造，且(22)式共包含$(q+3)/2$ 个不同构的 p^3q^3 阶群.

(d) 当 $C_Q(a)$ 与 $C_Q(b)$ 都是 Q 的 q^2 阶子群且 $C_Q(a)\neq C_Q(b)$ 时，若 $C_Q(a)=\langle x\rangle$，$C_Q(b)=\langle x^q,y\rangle$，则可设 $a^y=a^s$，$b^x=b^s$，再由 $[a,b]=c$ 得 $c^x=c^y=c^s$，故 G 有构造(23)式(其中 $i=0$). 当 $C_Q(a)=\langle x\rangle$，$C_Q(b)=\langle xy^k\rangle(0<k<q)$ 时，可设 $a^y=a^s$，$b^x=b^s$，$b^y=b^{s^i}$，其中 $ik\equiv-1(\bmod q)$，从而 G 有形如(23)式的构造$(0<i<q)$. 从而(23)式表示 q 个不同构的 p^3q^3 阶群.

(iii) 若$(q^2,p^2-1)=q^2$，则 G 除了有(ii)中的全部构造外，还有其他构造. 这时 $C_Q(a)$，$C_Q(b)$ 中至少有一个可假设为 $\langle y\rangle$，不妨设 $C_Q(a)=\langle y\rangle$，$a^x=a^r$.

(a) 若 $y\in C_Q(b)$，则可设 $b^x=b^{r^i}$，从而 $c^x=c^{r^{i+1}}$，其中 $0<i<q^2$，所以 G 有形如(24)式的构造. 在(24)式中，当 $i=0$ 时，有 $C_Q(b)=Q$；当$(i,q)=q$ 时，有 $C_Q(b)=\langle x^q,y\rangle$，这时(24)式代表 $q-1$ 个不同构的 p^3q^3 阶群；当$(i,q)=1$ 时，有 $C_Q(b)=\langle y\rangle$，且有唯一的 $j\in\mathscr{Z}_{q^2}^*$，使得 $ij\equiv1(\bmod q^2)$. 当用 y^j 代替 y，用 c^{-1} 代替 c，再将 a,b 对调时，$G(i)$ 就变成了 $G(j)$. 这就证明了 $G(i)\cong G(j)$ 当且仅当 $ij\equiv1(\bmod q^2)$. 所以当$(i,q)=1$ 时，(24)式表示 $1+(q^2-q)/2$ 个不同构的 p^3q^3 阶群；从而(24)式共表示 $1+(q^2+q)/2$ 个不同构的 p^3q^3 阶群.

(b) 若 $y\notin C_Q(b)$，则可设 $b^y=b^s$. 若 $C_Q(b)=\langle x\rangle$，则 G 有形如(25)式的构造(其中 $i=0$). 若 $C_Q(b)\neq\langle x\rangle$，则可设 $b^x=b^{r^i}$，$0<i<q$，于是 $C_Q(b)=\langle x^qy^{q-i}\rangle$，$G$ 有形如(25)式的构造(其中 $0<i<q$). 从而(25)式共表示 q 个不同构的 p^3q^3 阶群.

(iv) 当$(q^2,p+1)=q$ 时，G 除 $P_5\times Q$ 外，还有其他构造. 这时 G 不是超可解的，于是 $G/\langle c\rangle$ 就是非超可解的，且易见 $Q\langle c\rangle$ 是交换群. 类似于文献[4]中构造(8)的讨论可知，当 $C_Q(P)=\langle x^q,y\rangle$ 时，G 有构造(26)；当 $C_Q(P)=\langle x\rangle$ 时，G 有构造(27).

(v) 当$(q^2,p+1)=q^2$ 时，G 除了(iv)中的 3 个构造外，还有其他构造. 这时必有 $C_Q(P)=\langle y\rangle$，而 G 的构造为(28).

综上所述，引理 6 得证.

综合引理 2 至引理 6 的结果，不难得到定理 1.

3　结论

有限群论的分类是群论的一个重要研究方向，当 p^3q^3 阶群 G 的 Sylow q-子群是初等因子为(q^2,q)的交换群时，定理 1 对这种群进行了完全分类并获得了其全部构造，这一结果为进一步研究提供了基础.

4　参考文献

[1] Western A E. Groups of order p^3q [J]. Proc London Math Soc，1898，30(1)：209-263.

[2] Myron Owen Tripp. Groups of order p^3q^2 [M]. Lancaster：The New Printing Company，1909.

[3] Zhang Yuanda. The structures of finite groups of order 2^3p^2 [J]. Chin Ann of Math，1983，4B(1)：77-93.

[4] Jing Naiheng. Addendum to "The structures of finite groups of order 2^3p^2" [J]. Chin Ann of Math，1985，6B(4)：383-384.

[5] 黄强. 2^33^2阶群的构造[J]. 数学杂志，1986，6(1)：51-58.

[6] 肖文俊，谭忠. 阶为 2^3p^3 阶群的构造[J]. 厦门大学学报：自然科学版，1995，34(5)：845-846.

[7] 陈松良. 2744 阶群的构造[J]. 数学学报：中文版，2013，56(6)：993-1008.

[8] 陈松良. 关于 216 阶群的完全分类[J]. 数学杂志，2017，37(1)：185-192.

[9] Dietrich H，Eick B. On the groups of cube-free order [J]. Journal of Algebra，2005，292(1)：122-137.

[10] Qiao Shouhong，Li Caiheng. The finite groups of cube-free order [J]. Journal of Algebra，2011，334(1)：101-108.

[11] Li Caiheng，Qiao Shouhong. Finite groups of fourth-power-free order [J]. Journal of Group Theory，2013，16(2)：275-298.

[12] 班桂宁，朱彩凤，张艳，等. 一类满足 LA(2)-猜想的特殊 p-群[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2011，35(2)：121-129.

[13] 陈松良. 论 Sylow p-子群循环的 p^nq^3 阶群的构造[J]. 东北师大学报：自然科学版，2013，45(2)：35-38.

[14] 陈松良. Sylow q-子群循环的 p^3q^n 阶群的分类[J]. 东北师大学报：自然科学版，2015，47(4)：11-17.

[15] 陈松良. 一类 Sylow 子群皆交换的 p^3q^3 阶群的构造[J]. 西南大学学报：自然科学版，2015，37(10)：72-78.

[16] Kurzweil H，Stellmacher B. The theory of finite groups [M]. New York：Springer-Verlag，2004.

（下转第 376 页）

[11] Song Xianmei, Chen Jianlong. Note on pure projective modules [J]. Journal of Southeast University, 2005, 21(4): 506-508.
[12] Bhambri S K, Duber M K. Exact, proper exact sequences and projective semimodules [J]. Internationl of Algebra, 2010, 4(15): 709-719.
[13] 曾慧平, 黄福生, 肖贤民. i-内射半模 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2007, 31(5): 488-491.

The Study on Exact Sequence of Semi-Module

ZOU Yawen, WANG Songsheng*, HUANG Yan, LI Juan
(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The notion of the exact sequences of semi-module over semi-rings is introduced by the congruence and some properties of the exact sequences of semi-modules are discussed, and several equivalent characterizations of semi-exact sequences under different conditions are obtained. The conclusion of the "five lemma" and "three lemma" which are similar to those in the semi-modules exact column is obtained.

Key words: exact sequence; homo-morphism; commutative diagram

(责任编辑: 曾剑锋)

(上接第 371 页)

On the Classifications of the Finite Groups of Order p^3q^3 with Abelian Sylow q-Subgroups

CHEN Songliang[1,2], LI Xianhua[2]
(1. School of Mathematics and Computer Science, Guizhou Education University, Guiyang Guizhou 550018, China;
2. School of Mathematical Sciences, Suzhou University, Suzhou Jiangsu 215006, China;
3. Guizhou Provincial Academmician Workstation of Educational Big Data Technology and Educational Mathematics, Guiyang Guizhou 550018, China)

Abstract: Let p, q be odd primes such that $p > q$, and G be finite groups of order p^3q^3. With the help of local analysis of finite groups, the complete classifications of G is discussed and their structures are determined whenever their Sylow q-subgroups are Abelian with elementary divisors (q^2, q).

Key words: finite group; isomorphic classification; structure of group

(责任编辑: 曾剑锋)