文章编号:1000-5862(2017)06-0579-06

一类高阶 KdV 方程的行波复化亚纯解

袁文俊，党国强
(广州大学数学与信息科学学院,广东 广州 510006)

摘要: 考虑了一类高阶 KdV 微分方程 $u_t + \delta u^2 u_x + \beta u_x u_{xx} + \gamma u u_{xxx} + \omega u_{xxxxx} = 0$. 通过行波变换 $u(x,t) = w(z)$, $z = x + \lambda t(\lambda \neq 0)$，这类高阶 KdV 微分方程变为常微分方程 $w^{(4)} + \delta w w'' + \beta w'^2 + \gamma w^3 + \lambda w + \mu = 0$,其控制项有4项: $\hat{E}(z,w) = w^{(4)} + \delta w w'' + \beta w'^2 + \gamma w^3$. 主要结果是运用复方法给出这些常微分方程的3类亚纯解表达式，即椭圆函数解、有理函数解、$e^{\alpha z}(\alpha \in \mathbf{C})$ 的有理函数解,并以行波复化 modified Sawada-Kotera 方程 $u_t + u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + 15u_x u_{xx} + 5u^2 u_x = 0$, Kaup-Kupershmid 方程 $u_t - u_{xxxxx} + 20uu_{xxx} + 50u_x u_{xx} - 80u^2 u_x = 0$ 为例说明: 除了该文所确定的亚纯解之外,或许有方程还有其他的亚纯解.

关键词: 高阶 KdV 方程; 微分方程; 亚纯函数; 椭圆函数
中图分类号: O 174.52　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.06.06

0 引言与主要定理

非线性偏微分方程被广泛用于研究物理学领域中的复杂现象,如流体力学、固体物理、等离子体物理、凝聚态物理、非线性光学等. 学者们采用了各种方法去寻找非线性偏微分方程的精确解,比如首次积分法[1]、李群分析法[2]、逆散射变换法[3]、Darboux 变换法[4]、Bäcklund 变换法[5]、三角函数展开法[6-7]、G'/G 函数展开法[8]等. KdV 方程是1895年由荷兰数学家 Korteweg 和 de Vries 在研究浅水中小振幅长波运动时共同发现的一种单向运动浅水波偏微分方程. 本文考虑一类高阶 KdV 方程

$$u_t + 3\gamma u^2 u_x + (\delta + 2\beta) u_x u_{xx} + \delta u u_{xxx} + \omega u_{xxxxx} = 0, \quad (1)$$

其中 $\omega \neq 0$, δ, β, γ 都是常数.

文献[9]曾对如下 Kaup-Kupershmid 方程进行了研究,并得到了一些精确解:

$$u_t - u_{xxxxx} + 20uu_{xxx} + 50u_x u_{xx} - 80u^2 u_x = 0.$$

令 $\omega = 1$,方程(1)做行波变换 $u(x,t) = w(z)$, $z = x + \lambda t(\lambda \neq 0)$，并积分,方程(1)化为常微分方程

$$w^{(4)} + \delta w w'' + \beta w'^2 + \gamma w^3 + \lambda w + \mu = 0, \quad (2)$$

其中 $\delta, \beta, \gamma \neq 0$, μ 是复常数.

先假定读者熟悉椭圆函数基本知识[10-11]. 记函数集合 $W = \{$椭圆函数,有理函数,$e^{\alpha z}(\alpha \in \mathbf{C})$ 的有理函数$\}$. 设 $m \in \mathbf{N} := \{1,2,3,\cdots\}$, $r_j \in N_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$, $r = \{r_0, r_1, \cdots, r_m\}$, $j = 0,1,\cdots,m$. 记微分单项式

$$M_r[w](z) := [w(z)]^{r_0} [w'(z)]^{r_1} [w''(z)]^{r_2} \cdots [w^{(m)}(z)]^{r_m}.$$

称 $d(r) := r_0 + r_1 + \cdots + r_m$ 为 $M_r[w]$ 的次数.

定义1 称 $P(w, w', \cdots, w^{(m)}) := \sum_{r \in I} a_r M_r[w]$ 为常系数微分多项式,其中 a_r 是常数, I 是有限指标集.

定义2 $P(w, w', \cdots, w^{(m)})$ 的全次数定义为 $\deg P(w, w', \cdots, w^{(m)}) := \max_{r \in I}\{d(r)\}$.

考虑如下的常微分方程

$$P(w, w', \cdots, w^{(m)}) = bw^n + c, \quad (3)$$

其中 $n \in \mathbf{N}$, $b \neq 0$, c 是常数.

定义3 设 $p, q \in \mathbf{N}$. 假设(3)的亚纯函数解 w 至少有一个极点. 称(3)满足 $\langle p,q \rangle$ 条件,如果(3)恰好存在 p 个不同的亚纯解以 $z = 0$ 为 q 重极点. 进一步,称(3)满足弱 $\langle p,q \rangle$ 条件,如果替换 Laurent 级数

$$w(z) = \sum_{k=-q}^{\infty} c_k z^k, \quad q > 0, \quad c_{-q} \neq 0, \quad (4)$$

进入(3)能确定形如 $\sum_{k=-q}^{-1} c_k z^k$ 的 p 个不同的 Laurent 级数主要部分.

收稿日期:2017-05-04
基金项目:国家自然科学基金(11271090)和广东省自然科学基金(2016A030310257,2015A030313346)资助项目.
作者简介:袁文俊(1957-),男,四川安岳人,教授,博士生导师,主要从事复分析及其应用研究. E-mail: wjyuan1957@126.com

引理 1[12] 设 $p,l,m,n\in\mathbf{N}$,$\deg P(w,w',\cdots,w^{(m)})<n$,并且方程(3)满足 $\langle p,q\rangle$ 条件,则(3)的所有亚纯函数解 $w\in W$,且必为下面4种形式之一:

(i) w 是常数;

(ii) $w:=R(z)$ 是具有 $l(\leqslant p)$ 个不同的 q 重极点,形如

$$R(z)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{q}\frac{c_{ij}}{(z-z_i)^j}+c_0 \tag{5}$$

的有理函数;

(iii) $w:=R(\xi)$,$\xi=\mathrm{e}^{\alpha z}(\alpha\in\mathbf{C})$,其中 $R(\xi)$ 是具有 $l(\leqslant p)$ 个不同的 q 重极点,形如

$$R(\xi)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{q}\frac{c_{ij}}{(\xi-\xi_i)^j}+c_0; \tag{6}$$

(iv) w 是在基本周期格内具有 $l(\leqslant p)$ 个不同的 q 重极点的双周期 $2\omega_1$ 和 $2\omega_2$ 椭圆函数,形如

$$w(z)=\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=2}^{q}\frac{(-1)^j c_{-ij}}{(j-1)!}\frac{\mathrm{d}^{j-2}}{\mathrm{d}z^{j-2}}\cdot\left(\frac{1}{4}\left[\frac{\varphi'(z)+B_i}{\varphi(z)-A_i}\right]^2-\varphi(z)\right)+\sum_{i=1}^{l-1}\frac{c_{-i1}}{2}\frac{\varphi'(z)+B_i}{\varphi(z)-A_i}+\sum_{j=2}^{q}\frac{(-1)^j c_{-lj}}{(j-1)!}\frac{\mathrm{d}^{j-2}}{\mathrm{d}z^{j-2}}\varphi(z)+c_0, \tag{7}$$

其中 $B_i^2=4A_i^3-g_2A_i-g_3$ 且 $\sum_{i=1}^{l}c_{-i1}=0$.

注 1[12] 若方程(3)满足弱 $\langle p,q\rangle$ 条件且 $\deg P(w,w',\cdots,w^{(m)})<n$,则仍可以利用引理1寻求 W 类解.

定义 4 设亚纯函数 $w(z)$ 是 m 阶代数微分方程 $E(z,w)=0$ 的解,称能决定亚纯函数解的极点重数的相关项为控制项,记为 $\hat{E}=\hat{E}(z,w)$. 显然方程(2)的控制项有4项:

$$\hat{E}(z,w)=w^{(4)}+\delta ww''+\beta w'^2+\gamma w^3.$$

记 $\hat{E}(z,w(z))$ 的极点重数为 $D(q)$. 记 $E(z,w)-\hat{E}(z,w)$ 中微分单项式 $M_r[w]$ 的极点重数为 $D_r(q)$. 显然

$$D_r(q)=qd(r)+r_1+2r_2+\cdots+mr_m<D(q).$$

对任意 $v(z)$,定义控制项 $\hat{E}(z,w)$ 的导数为

$$\hat{E}'(z,w)v:=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\hat{E}(z,w+\lambda v)-\hat{E}(z,w)}{\lambda}.$$

称方程

$$P(i)=\lim_{\chi\to 0}\chi^{-i+D(q)}\hat{E}'(\chi,c_{-q}\chi^{-q})\chi^{i-q}=0$$

的根为微分方程 $E(z,w)=0$ 的 Fuchs 指数.

本文采用复方法[13-14]研究方程(2),证明了下面的定理1.

定理 1 令 $L:=\sqrt{9\delta^2+12\delta\beta+4\beta^2-120\gamma}$. 方程(2)具有如下3种形式的非常数亚纯解 w:

(i) 有理函数解

$$w_{r1}(z)=-\frac{3\delta+2\beta+L}{\gamma}\frac{1}{(z-z_0)^2},$$

$$w_{r2}(z)=-\frac{3\delta+2\beta-L}{\gamma}\frac{1}{(z-z_0)^2},$$

这里 $z_0\in\mathbf{C}$,$\lambda=\mu=0$;

(ii) $\mathrm{e}^{\alpha z}$ 的有理函数解

$$w_{s1}=\frac{1}{4\gamma}(-3\delta-2\beta+L)\alpha^2\coth^2\left(\frac{\alpha}{2}(z-z_0)\right)+\frac{3\delta+2\beta-L}{6\gamma}\alpha^2,$$

这里

$(3L\delta^2+8L\delta\beta+4L\beta^2-9\delta^3-30\delta^2\beta-28\delta\beta^2-8\beta^3-18L\gamma+114\delta\gamma+156\beta\gamma)\alpha^6+(12L\gamma\lambda-36\delta\gamma\lambda-24\beta\gamma\lambda)\alpha^2=0$,

$(9L\delta^2+30L\delta\beta+16L\beta^2-27\delta^3-108\delta^2\beta-108\delta\beta^2-32\beta^3-66L\gamma+378\delta\gamma+612\beta\gamma)\alpha^6+(36L\gamma\lambda-108\delta\gamma\lambda-72\beta\gamma\lambda)\alpha^2-216\gamma^2\mu=0$,

$$w_{s2}(z)=\frac{1}{4\gamma}(-3\delta-2\beta-L)\alpha^2\coth^2\left(\frac{\alpha}{2}(z-z_0)\right)+\frac{3\delta+2\beta+L}{6\gamma}\alpha^2,$$

这里

$(3L\delta^2+8L\delta\beta+4L\beta^2+9\delta^3+30\delta^2\beta+28\delta\beta^2+8\beta^3-18L\gamma-114\delta\gamma-156\beta\gamma)\alpha^6+(12L\gamma\lambda+36\delta\gamma\lambda+24\beta\gamma\lambda)\alpha^2=0$,

$(9L\delta^2+30L\delta\beta+16L\beta^2+27\delta^3+108\delta^2\beta+108\delta\beta^2+32\beta^3-66L\gamma-378\delta\gamma-612\beta\gamma)\alpha^6+(36L\gamma\lambda+108\delta\gamma\lambda+72\beta\gamma\lambda)\alpha^2+216\gamma^2\mu=0$;

(iii) 椭圆函数解

$$w_{d1}(z)=-\frac{3\delta+2\beta+L}{\gamma}\varphi(z-z_0,g_2,g_3),$$

这里 $z_0\in\mathbf{C}$,

$$g_2=-\frac{2\lambda\gamma}{(2\beta+\delta)L+4\beta^2+8\delta\beta+3\delta^2-36\gamma},$$

$$g_3=\mu\gamma^2/\left[(6\delta\beta+4\beta^2-12\gamma)L+8\beta^3+24\delta\beta^2+(18\delta^2-144\gamma)\beta-36\delta\gamma\right],$$

$$w_{d2}(z)=-\frac{3\delta+2\beta-L}{\gamma}\varphi(z-z_0,g_2,g_3),$$

这里 $z_0\in\mathbf{C}$.

$$g_2=-2\lambda\gamma/\left[(-2\beta-\delta)L+4\beta^2+8\delta\beta+3\delta^2-36\gamma\right],$$

$$g_3=\mu\gamma^2/\left[(-6\delta\beta-4\beta^2+12\gamma)L+8\beta^3+24\delta\beta^2+\right.$$

$(18\delta^2 - 144\gamma)\beta - 36\delta\gamma]$.

1　定理 1 的证明

设 $z_0 \in \mathbf{C}$ 是常数. 令

$$L: = \sqrt{9\delta^2 + 12\delta\beta + 4\beta^2 - 120\gamma}.$$

将级数(4) 代入方程(2)，有 $p = q = 2$，$c_{-2} = -(3\delta + 2\beta \pm L)/\gamma$，$c_{-1} = c_0 = 0$，$\cdots$. 因此方程满足弱 $\langle p, q\rangle$ 条件. 根据引理 1，把(5) 式代入方程(2) 可知，当且仅当 $\lambda = \mu = 0$ 时，方程有如下有理函数解:

$$w_{r1}(z) = -\frac{3\delta + 2\beta + L}{\gamma}\frac{1}{(z - z_0)^2},$$

$$w_{r2}(z) = -\frac{3\delta + 2\beta - L}{\gamma}\frac{1}{(z - z_0)^2}.$$

设 $\xi = e^{\alpha z}$，$\alpha \in \mathbf{C}$，根据引理 1，把(6) 式代入方程(2)，得到以 $z = 0$ 为极点的 $e^{\alpha z}$ 的有理函数解:

$$w_{s0,1} = \frac{1}{12\gamma}(-3\delta - 2\beta + L)\left(\frac{\alpha^2 e^{2\alpha z}}{(e^{\alpha z} - 1)^2} + \frac{10\alpha^2 e^{\alpha z}}{(e^{z\alpha} - 1)^2} + \frac{\alpha^2}{(e^{\alpha z} - 1)^2}\right) = \frac{(-3\delta - 2\beta + L)\alpha^2}{\gamma}\cdot\frac{e^{\alpha z}}{(e^{\alpha z} - 1)^2} + \frac{(-3\delta - 2\beta + L)\alpha^2}{12\gamma} = \frac{1}{4\gamma}(-3\delta - 2\beta + L)\alpha^2\coth^2\left(\frac{\alpha}{2}z\right) + \frac{3\delta + 2\beta - L}{6\gamma}\alpha^2,$$

这里

$(3L\delta^2 + 8L\delta\beta + 4L\beta^2 - 9\delta^3 - 30\delta^2\beta - 28\delta\beta^2 - 8\beta^3 - 18L\gamma + 114\delta\gamma + 156\beta\gamma)\alpha^2 + (12L\gamma\lambda - 36\delta\gamma\lambda - 24\beta\gamma\lambda)\alpha^2 = 0$,

$(9L\delta^2 + 30L\delta\beta + 16L\beta^2 - 27\delta^3 - 108\delta^2\beta - 108\delta\beta^2 - 32\beta^3 - 66L\gamma + 378\delta\gamma + 612\beta\gamma)\alpha^6 + (36L\gamma\lambda - 108\delta\gamma\lambda - 72\beta\gamma\lambda)\alpha^2 - 216\gamma^2\mu = 0$.

$$w_{s0,2} = -\frac{1}{12\gamma}(3\delta + 2\beta + L)\left(\frac{\alpha^2 e^{2\alpha z}}{(e^{\alpha z} - 1)^2} + \frac{10\alpha^2 e^{\alpha z}}{(e^{\alpha z} - 1)^2} + \frac{\alpha^2}{(e^{\alpha z} - 1)^2}\right) = -\frac{(3\delta + 2\beta + L)\alpha^2}{12\gamma}\cdot\frac{12e^{\alpha z}}{(e^{\alpha z} - 1)^2} - \frac{(3\delta + 2\beta + L)\alpha^2}{12\gamma} = \frac{1}{4\gamma}(-3\delta - 2\beta - L)\alpha^2\coth^2\left(\frac{\alpha}{2}z\right) + \frac{3\delta + 2\beta + L}{6\gamma}\alpha^2,$$

这里

$(3L\delta^2 + 8L\delta\beta + 4L\beta^2 + 9\delta^3 + 30\delta^2\beta + 28\delta\beta^2 + 8\beta^3 - 18L\gamma - 114\delta\gamma - 156\beta\gamma)\alpha^2 + (12L\gamma\lambda + 36\delta\gamma\lambda + 24\beta\gamma\lambda)\alpha^2 = 0$,

$(9L\delta^2 + 30L\delta\beta + 16L\beta^2 + 27\delta^3 + 108\delta^2\beta + 108\delta\beta^2 + 32\beta^3 - 66L\gamma - 378\delta\gamma - 612\beta\gamma)\alpha^6 + (36L\gamma\lambda + 108\delta\gamma\lambda + 72\beta\gamma\lambda)\alpha^2 + 216\gamma^2\mu = 0$.

于是方程(2) 以 $z = z_0 \in \mathbf{C}$ 为极点的 $e^{\alpha z}$ 有理函数解具有如下形式:

$$w_{s1}(z) = \frac{1}{4\gamma}(-3\delta - 2\beta + L)\alpha^2\coth^2\left(\frac{\alpha}{2}(z - z_0)\right) + \frac{3\delta + 2\beta - L}{6\gamma}\alpha^2,$$

这里

$(3L\delta^2 + 8L\delta\beta + 4L\beta^2 - 9\delta^3 - 30\delta^2\beta - 28\delta\beta^2 - 8\beta^3 - 18L\gamma + 114\delta\gamma + 156\beta\gamma)\alpha^2 + (12L\gamma\lambda - 36\delta\gamma\lambda - 24\beta\gamma\lambda)\alpha^2 = 0$,

$(9L\delta^2 + 30L\delta\beta + 16L\beta^2 - 27\delta^3 - 108\delta^2\beta - 108\delta\beta^2 - 32\beta^3 - 66L\gamma + 378\delta\gamma + 612\beta\gamma)\alpha^6 + (36L\gamma\lambda - 108\delta\gamma\lambda - 72\beta\gamma\lambda)\alpha^2 - 216\gamma^2\mu = 0$.

$$w_{s2}(z) = \frac{1}{4\gamma}(-3\delta - 2\beta - L)\alpha^2\coth^2\left(\frac{\alpha}{2}(z - z_0)\right) + \frac{3\delta + 2\beta + L}{6\gamma}\alpha^2,$$

这里

$(3L\delta^2 + 8L\delta\beta + 4L\beta^2 + 9\delta^3 + 30\delta^2\beta + 28\delta\beta^2 + 8\beta^3 - 18L\gamma - 114\delta\gamma - 156\beta\gamma)\alpha^6 + (12L\gamma\lambda + 36\delta\gamma\lambda + 24\beta\gamma\lambda)\alpha^2 = 0$,

$(9L\delta^2 + 30L\delta\beta + 16L\beta^2 + 27\delta^3 + 108\delta^2\beta + 108\delta\beta^2 + 32\beta^3 - 66L\gamma - 378\delta\gamma - 612\beta\gamma)\alpha^6 + (36L\gamma\lambda + 108\delta\gamma\lambda + 72\beta\gamma\lambda)\alpha^2 + 216\gamma^2\mu = 0$.

根据引理 1，把(7) 式代入方程(2)，得到方程具有如下形式的椭圆函数解:

$$w_{d1}(z) = -\frac{3\delta + 2\beta + L}{\gamma}\wp(z - z_0, g_2, g_3),$$

这里 $z_0 \in \mathbf{C}$，

$g_2 = -2\lambda\gamma / [(2\beta + \delta)L + 4\beta^2 + 8\delta\beta + 3\delta^2 - 36\gamma]$,

$g_3 = \mu\gamma^2 / [(6\delta\beta + 4\beta^2 - 12\gamma)L + 8\beta^3 + 24\delta\beta^2 + (18\delta^2 - 144\gamma)\beta - 36\delta\gamma]$,

$$w_{d2}(z) = -\frac{3\delta + 2\beta - L}{\gamma}\wp(z - z_0, g_2, g_3),$$

这里 $z_0 \in \mathbf{C}$，

$g_2 = -2\lambda\gamma / [(-2\beta - \delta)L + 4\beta^2 + 8\delta\beta + 3\delta^2 - 36\gamma]$,

$g_3 = \mu\gamma^2 / [(-6\delta\beta - 4\beta^2 + 12\gamma)L + 8\beta^3 + 24\delta\beta^2 + (18\delta^2 - 144\gamma)\beta - 36\delta\gamma]$.

定理 1 证毕.

2　2 个特例

特例 1　对 modified Sawada-Kotera 方程[9]

$$u_t + u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + 15u_xu_{xx} + 5u^2u_x = 0 \quad (8)$$

做行波变换 $u(x,t)=w(z)$,$z=x+\lambda t$,并积分 1 次,方程(8)化为常微分方程

$$w^{(4)}+5ww''+5w'^2+5w^3/3+\lambda w+\mu=0. \quad (9)$$

$$\hat{E}'(z,w)v=\left(\frac{\partial^4}{\partial z^4}+5w\frac{\partial^2}{\partial z^2}+10w'\frac{\partial}{\partial z}+5w''+5w^2\right)v,$$

$$P(i)=i^4-14i^3+(\pm 15\sqrt{17}-4)i^2+(521\mp 135\sqrt{17})i+510\mp\sqrt{17}=0,$$

经计算知,$P(i)=0$ 无非负整数根,即此方程满足 $\langle p,q\rangle$ 条件[15],且 $\deg(w^{(4)}+5ww''+5w'^2+\lambda w+\mu)<3$,根据引理 1 知,方程(9)的所有亚纯解 $w\in W$. 设 $z_0\in\mathbf{C}$ 是常数. 将级数(4)代入方程(9)知,当且仅当 $\lambda=\mu=0$ 时,方程有如下非常数有理函数解:

$$w_{r3}(z)=\frac{-15+3\sqrt{17}}{(z-z_0)^2},w_{r4}(z)=\frac{-15-3\sqrt{17}}{(z-z_0)^2}.$$

设 $\xi=e^{\alpha z}$,$\alpha\in\mathbf{C}$,根据引理 1,把(6)式代入方程(9),得到以 $z=0\in\mathbf{C}$ 为极点的 $e^{\alpha z}$ 有理函数解:

$$w_{s0,3}(z)=\frac{(-5+\sqrt{17})\alpha^2e^{2\alpha z}}{4(e^{\alpha z}-1)^2}+\frac{5(-5+\sqrt{17})\alpha^2e^{\alpha z}}{2(e^{\alpha z}-1)^2}+\frac{(-5+\sqrt{17})\alpha^2}{4(e^{\alpha z}-1)^2}=\frac{3}{4}(-5+\sqrt{17})\alpha^2\coth^2\frac{\alpha}{2}z+\frac{5-\sqrt{17}}{2}\alpha^2,$$

这里 $\alpha\in\mathbf{C}$,$z_0\in\mathbf{C}$,$\lambda=3(\sqrt{17}-21)\alpha^4/8$,$\mu=(23\sqrt{17}-95)\alpha^6/12$.

$$w_{s0,4}(z)=\frac{(-5-\sqrt{17})\alpha^2e^{2\alpha z}}{4(e^{\alpha z}-1)^2}+\frac{5(-5-\sqrt{17})\alpha^2e^{\alpha z}}{2(e^{\alpha z}-1)^2}+\frac{(-5-\sqrt{17})\alpha^2}{4(e^{\alpha z}-1)^2}=-\frac{3}{4}(5+\sqrt{17})\alpha^2\coth^2\frac{\alpha}{2}z+\frac{5+\sqrt{17}}{2}\alpha^2,$$

这里 $\alpha\in\mathbf{C}$,$z_0\in\mathbf{C}$,$\lambda=-3(5\sqrt{17}+21)\alpha^4/8$,$\mu=-(23\sqrt{17}+95)\alpha^6/12$.

于是方程(9)以 $z=z_0\in\mathbf{C}$ 为极点的 $e^{\alpha z}$ 有理函数解具有如下形式:

$$w_{s3}(z)=\frac{3}{4}(-5+\sqrt{17})\alpha^2\coth^2\frac{\alpha}{2}(z-z_0)+\frac{5-\sqrt{17}}{2}\alpha^2,$$

这里 $\alpha\in\mathbf{C}$,$z_0\in\mathbf{C}$,$\lambda=3(\sqrt{17}-21)\alpha^4/8$,$\mu=(23\sqrt{17}-95)\alpha^6/12$.

$$w_{s4}(z)=-\frac{3}{4}(5+\sqrt{17})\alpha^2\coth^2\frac{\alpha}{2}(z-z_0)+\frac{5+\sqrt{17}}{2}\alpha^2,$$

这里 $\alpha\in\mathbf{C}$,$z_0\in\mathbf{C}$,$\lambda=-3(5\sqrt{17}+21)\alpha^4/8$,$\mu=-(23\sqrt{17}+95)\alpha^6/12$ 以及

$$w_{s5}(z)=-\frac{c^{1/2}(5+\sqrt{17})}{8}\coth^2\left(\frac{\sqrt{6}}{12}c^{1/4}(z-z_0)-\frac{2}{3}\right),$$

这里 $\mu+\frac{4\sqrt{3}}{27}(-\lambda)^{-3/2}=0$,$c=(30\sqrt{17}-126)\lambda$.

把(7)式代入(9)式,得方程的椭圆函数解为

$$w_{d3}(z)=(-15+3\sqrt{17})\varphi(z-z_0,g_2,g_3),$$

$$w_{d4}(z)=(-15-3\sqrt{17})\varphi(z-z_0,g_2,g_3),$$

所以

$$w_{d3}(z)=(-15+3\sqrt{17})\left\{-\varphi(z,g_2,g_3)+\frac{1}{4}\left[\frac{\varphi'(z,g_2,g_3)+\varphi'(z_0,g_2,g_3)}{\varphi(z,g_2,g_3)-\varphi(z_0,g_2,g_3)}\right]^2\right\}+(15-3\sqrt{17})\varphi(z_0,g_2,g_3),$$

这里 $z_0\in\mathbf{C}$,$g_2=-(5\sqrt{17}+21)\lambda/72$,$g_3=(23\sqrt{17}+95)\mu/576$.

$$w_{d4}(z)=(-15-3\sqrt{17})\left\{-\varphi(z,g_2,g_3)+\frac{1}{4}\left[\frac{\varphi'(z,g_2,g_3)+\varphi'(z_0,g_2,g_3)}{\varphi(z,g_2,g_3)-\varphi(z_0,g_2,g_3)}\right]^2\right\}+(15+3\sqrt{17})\varphi(z_0,g_2,g_3),$$

这里 $z_0\in\mathbf{C}$,$g_2=(5\sqrt{17}-21)\lambda/72$,$g_3=-(23\sqrt{17}-95)\mu/576$.

取 $\alpha=5i$,$z_0=0$,绘制方程(9)的 $e^{\alpha z}$ 有理函数解 $w_{s3}(z)$,$w_{s4}(z)$ 的图形,见图 1,可见得到了一些周期爆破解.

特例 2 对 Kaup-Kupershmid 方程[9]

$$u_t-u_{xxxxx}+20uu_{xxx}+50u_xu_{xx}-80u^2u_x=0 \quad (10)$$

做行波变换 $u(x,t)=w(z)$,$z=x+\lambda t$,对 z 积分,方程(10)化为常微分方程

$$\lambda w-w^{(4)}+20ww''+15w'^2-80w^3/3+\mu=0. \quad (11)$$

$$\hat{E}'(z,w)=\left(-\frac{\partial^4}{\partial z^4}+20w\frac{\partial^2}{\partial z^2}+30w'\frac{\partial}{\partial z}+20w''-80w^2\right)v,$$

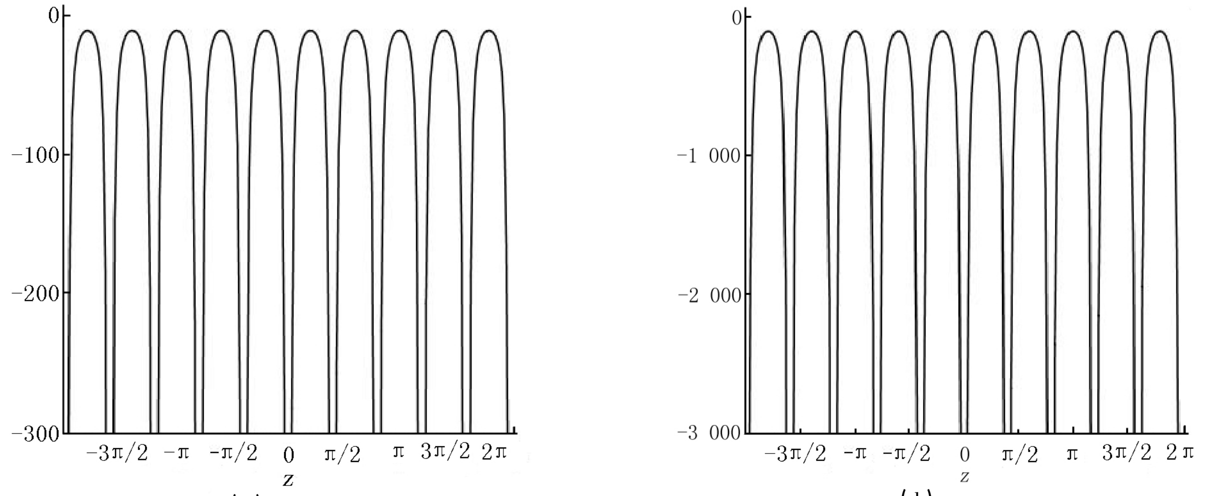
$$P(i)=\lim_{\chi\to 0}\chi^{-i+6}\hat{E}'(\chi,c_{-2}\chi^{-2})\chi^{i-2},$$

经过计算,知 $P(i)=0$ 的根为 $-1,-7,10,12$ 或 $-1,3,5,7$,因此方程(11)不满足 $\langle p,q\rangle$ 条件[15]. 设 $z_0\in\mathbf{C}$ 是常数. 将(4)式代入方程(11),有 $p=2$,$c_{-2}=3/4$,$c_{-1}=0$,$c_0=0$,$c_1=0$,$c_2=\lambda/20$,$c_3=0$,$c_4=-\mu/21$,$c_5=0$,$c_6=\lambda^2/900$,或者 $c_{-2}=6$,$c_{-1}=$

$0, c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = \lambda/440, c_3 = 0, c_4 = \mu/2\,184, c_5 = 0, c_6 = \lambda^2/3\,484\,800$. 此时方程满足弱 $\langle p,q\rangle$ 条件且 $\deg(\lambda w - w^{(4)} + 20ww'' + 15w'^2 + \mu) < 3$，根据引理 1 和注 1 知，方程有如下亚纯函数解 w:

(i) 当且仅当 $\lambda = \mu = 0$，$z_0 \in \mathbf{C}$ 时，方程(11)有如下非常数有理函数解

$$w_{r5}(z) = \frac{3}{4}\frac{1}{(z-z_0)^2},\quad w_{r6}(z) = \frac{6}{(z-z_0)^2}.$$



(a) w_{s3}　　(b) w_{s4}

图 1　当 $\alpha = 5i$，$z_0 = 0$ 时的 $e^{\alpha z}$ 有理函数解

(ii) 方程(11)有如下形式 $e^{\alpha z}$ 的有理函数解

$$w_{s6}(z) = \frac{3}{2}\alpha^2 \coth^2 \frac{\alpha}{2}(z - z_0) - \alpha^2,$$

这里 $\lambda = 11\alpha^4, 6\mu + 13\alpha^6 = 0$.

$$w_{s7}(z) = \frac{3}{16}\alpha^2 \coth^2 \frac{\alpha}{2}(z - z_0) - \frac{1}{8}\alpha^2,$$

这里 $144\lambda = 9\alpha^4, 384\mu = \alpha^6$.

注 2　特别地，方程(11)另有如下形式的 4 个 $e^{\alpha z}$ 的有理函数解

$$w_{s8}(z) = \sqrt{\frac{\lambda}{11}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{11}}\coth^2\left[\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{\lambda}{11}\right)^{1/4}(z-z_0)\right],$$

这里 $\mu = 13\sqrt{11}\lambda^{3/2}/726$，

$$w_{s9}(z) = -\sqrt{\frac{\lambda}{11}} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{11}}\coth^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{11}\right)^{1/4}(z-z_0)\right],$$

这里 $\mu = -13\sqrt{11}\lambda^{3/2}/726$，

$$w_{s10}(z) = -\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\coth^2[\lambda^{1/4}(z-z_0)],$$

这里 $\mu = \lambda^{3/2}/6$，

$$w_{s11}(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda} - \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\coth^2[\sqrt{-1}\lambda^{1/4}(z-z_0)],$$

这里 $\mu = -\lambda^{3/2}/6$.

(iii) 方程(2)有如下形式的椭圆函数解

$$w_{d5}(z) = 6\left\{-\varphi(z,g_2,g_3) + \frac{1}{4}\left[\frac{\varphi'(z,g_2,g_3) + \varphi'(z_0,g_2,g_3)}{\varphi(z,g_2,g_3) - \varphi(z_0,g_2,g_3)}\right]^2\right\} - 6\varphi(z_0,g_2,g_3),$$

这里 $z_0 \in \mathbf{C}, g_2 = \lambda/132, g_3 = \mu/468$.

$$w_{d6}(z) = \frac{3}{4}\left\{-\varphi(z,g_2,g_3) + \frac{1}{4}\left[\frac{\varphi'(z,g_2,g_3) + \varphi'(z_0,g_2,g_3)}{\varphi(z,g_2,g_3) - \varphi(z_0,g_2,g_3)}\right]^2\right\} - \frac{3}{4}\varphi(z_0,g_2,g_3),$$

这里 $z_0 \in \mathbf{C}, g_2 = 4\lambda/3, g_3 = -16\mu/9$. 特别地，当 $\lambda = 0$ 时方程有如下形式的椭圆函数解

$$w_{d7}(z) = 6\varphi(z - z_0, 0, \mu/468),$$

$$w_{d8}(z) = 3\varphi(z - z_0, 0, -16\mu/9)/4.$$

3　结论

本文应用复方法[13-14]得到了一类高阶 KdV 方程的行波复化亚纯解. 由特例 1 可得出，方程(9)满足 $\langle p,q\rangle$ 条件且 $\deg(w^{(4)} + 5ww'' + 5w'^2 + \lambda w + \mu) < 3$，利用引理 1，知方程(9)的全部亚纯解属于 W 类. 由特例 2 可得出，方程(11)满足弱 $\langle p,q\rangle$ 条件且 $\deg(\lambda w - w^{(4)} + 20ww'' + 15w'^2 + \mu) < 3$，因此方程(11)的亚纯解除了得到的 W 类亚纯解之外，还可能存在非 W 类亚纯解. 因此提出一个问题：确定方程(2)的亚纯解全部属于 W 类或存在不属于 W 亚纯解的系数条件，特别地，寻找具有亚纯解不属于 W 的方程之例.

致谢　感谢廖良文教授给予的帮助和有益建议，感谢审稿人的细致评审与有益建议.

4 参考文献

[1] Eslami M,Mirzazadeh M A,Neirameh A. New exact wave solutions for Hirota equation [J]. Pramana,2015,84(1):3-8.

[2] Tian Chao. Lie group and its applications in partial differential equations [M]. Beijing: Higher Education Press,2001.

[3] Ablowitz M J,Clarkson P A. Solulions,nonlinear evolution equations and inverse scattering transform [M]. Cambridge: Cambridge University Press,1991.

[4] Gu Chaohao,Guo Boling,Li Yikun. Solulion theory and its applications [M]. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press,1990.

[5] Li Biao,Chen Yong,Zhang Hongqing. Auto-Bäcklund transformation and exact solutions for compound KdV-type and compound KdV-Burgers-type equations with nonlinear terms of any order [J]. Physics Letters A,2002,305(6):377-382.

[6] Malfliet W,Hereman W. The tanh method: I. exact solutions of nonlinear evolution and wave equations [J]. Physica Scripta,1996,54(6):563-568.

[7] Wazwaz A M. A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations [J]. Mathematical and Computer Modelling,2004,40(5/6):499-508.

[8] Zhang Huiqun. New application of the (G'/G)-expansion method [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,2009,14(8):3220-3225.

[9] Salas A H. Exact solutions to Kaup-Kupershmidt equation by projective Riccati equations method [J]. International Mathematical Forum,2012,7(8):391-396.

[10] Lang S. Elliptic functions [M]. 2nd Ed. New York: Springer Verlag,1987.

[11] Conte R,Musette M. Elliptic general analytic solutions [J]. Studies in Applied Mathematics,2009,123(1):63-81.

[12] Yuan Wenjun,Shang Yadong,Huang Yong,et al. The representation of meromorphic solutions of certain ordinary differential equations and its applications [J]. Scientia Sinica Mathematica,2013,43(6):563-575.

[13] Yuan Wenjun,Li Yezhou,Lin Jianming. Meromorphic solutions of an auxiliary ordinary differential equation using complex method [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences,2013,36(13):1776-1782.

[14] Yuan Wenjun,Wu Yonghong,Chen Qiuhui,et al. All meromorphic solutions for two forms of odd order algebraic differential equations and its applications [J]. Applied Mathematics and Computation,2014,240(10):240-251.

[15] Conte R. The Painlevé approach to nonlinear ordinary differential equations [M]. New York: Springer,1999: 77-180.

The Traveling Wave Meromorphic Solutions of a Kind of Complex Higher-Order KdV Equations

YUAN Wenjun,DANG Guoqiang

(School of Mathematics and Information Science,Guangzhou University,Guangzhou Guangdong 510006,China)

Abstract: In this paper,a class of fifth-order KdV equations $u_t+\delta u^2u_x+\beta u_xu_{xx}+\gamma uu_{xxx}+\omega u_{xxxxx}=0$ are considered. These KdV equations are reduced as a class of complex ordinary differential equations $w^{(4)}+\delta ww''+\beta w'^2+\gamma w^3+\lambda w+\mu=0$, by using the traveling wave transformation $u(x,t)=w(z)$, $z=x+\lambda t(\lambda\neq0)$, whose dominant parts have four terms $\hat{E}(z,w)=w^{(4)}+\delta ww''+\beta w'^2+\gamma w^3$. The main result is that the meromorphic solutions of the equations are obtained as elliptic function solutions,rational function solutions,and rational function solutions of $e^{\alpha z}(\alpha\in\mathbf{C})$, by employing complex method. Furthermore,two examples $u_t+u_{xxxxx}+5uu_{xxx}+15u_xu_{xx}+5u^2u_x=0$ (modified Sawada-Kotera equation) and $u_t-u_{xxxxx}+20uu_{xxx}+50u_xu_{xx}-80u^2u_x=0$ (Kaup-Kupershmid equation) are given to show that besides the meromorphic solutions which are confirmed,some equations maybe have other meromorphic solutions.

Key words: higher-order KdV equation; differential equation; meromorphic function; elliptic function

(责任编辑:王金莲)