文章编号: 1000-5862(2017)06-0585-06

一类 Schwarzian 微分方程的亚纯解

陆小庆[1], 张建军[1*], 廖良文[2]
(1. 江苏第二师范学院数学与信息技术学院,江苏 南京 210013; 2. 南京大学数学系,江苏 南京 210093)

摘要: 研究了如下形式的 Schwarzian 微分方程亚纯解的存在与结构问题:
$$\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)},$$
其中 $P_m(z)$, $Q_n(z)$ 是次数分别为 m,n 的不可约多项式,满足 $m \leqslant n-2$. 已有研究结果给出了在该方程存在亚纯解时 $P_m(z)/Q_n(z)$ 的特征,涉及比较复杂的行列式运算. 该文找到了替换行列式运算的新检验条件,通过判断有限个方程组是否有解来判断 Schwarzian 方程是否存在亚纯解,并给出了亚纯解的具体结构.

关键词: Schwarzian 微分方程; Möbius 变换; 亚纯解
中图分类号: O 174.52　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.06.07

0 引言与主要结论

复微分方程研究的一个重要分支是讨论亚纯解的存在与结构问题[1-4]. 假设 $f(z)$ 为亚纯函数,根据定义, $f(z)$ 的 Schwarzian 导数为 $S(f,z) = (f''/f')' - (f''/f')^2/2$, Schwarzian 微分方程为
$$(S(f,z))^p = R(z,f) = P(z,f)/Q(z,f), \tag{1}$$
其中 $R(z,f)$ 是 1 个以多项式为系数的关于 f 的有理函数. 文献[5]研究了方程(1)解的分解问题. 以 1 阶代数微分方程亚纯解的 Malmquist 型结果[6-9]为研究基础,文献[10]得到了方程(1)亚纯解的若干值分布结果,并给出了方程(1)存在亚纯解时 $Q(z,f)$ 的分类,文献[11]研究了方程(1)亚纯解的增长级,文献[12]研究了差分形式的 Schwarzian 方程. 若令方程(1)的右边项只与 z 有关, $p=1$, 则方程(1)变为
$$S(f,z) = R(z) = P_m(z)/Q_n(z), \tag{2}$$
其中 $P_m(z)$, $Q_n(z)$ 是次数分别为 m,n 的不可约多项式. 讨论方程(2)是否存在亚纯解,就是讨论 $P_m(z)/Q_n(z)$ 是否为某个亚纯函数的 Schwarzian 导数. 复分析的许多研究分支均存在与 Schwarzian 导数有关的结果[13-14]. 如下 2 个命题反映了 Schwarzian 导数最基本的"不变性"特点.

命题 1 假设 f,g 为亚纯函数,则 $S(f,z) = S(g,z)$ 当且仅当 f 是 g 的 1 个 Möbius 变换.

命题 2 $S(f,z) = 0$ 当且仅当 f 是 Möbius 变换.

由命题 1 可知,若 f 是方程(2)的 1 个亚纯解,则 f 的 Möbius 变换全体即为方程(2)的全体亚纯解. 易得以下 2 个命题.

命题 3 假设 f 为 $S(f,z) = c$ $(c \neq 0)$ 的亚纯解,则 $f = (c_1 e^{\sqrt{-2c}z} + c_2)/(c_3 e^{\sqrt{-2c}z} + c_4)$, 其中 $c_1c_4 \neq c_2c_3$.

命题 4 方程(2)不可能同时存在有理解和超越亚纯解.

文献[11]研究了 Schwarzian 方程亚纯解的增长级,得到了如下的结论.

定理 A 假设 f 为方程(2)的一个超越亚纯解,则 $m > n-2$.

由此得到本文的第 1 个结果.

定理 1 当 $m > n-2$ 时,方程(2)不存在有理解,当 $m \leqslant n-2$ 时,方程(2)不存在超越亚纯解.

本文主要研究当 $m \leqslant n-2$ 时,方程(2)存在有理解的条件和有理解的具体结构. I. Laine 在文献[3]中指出,如果方程(2)存在有理解,则 $R(z)$ 有且仅有 2 重极点,也即 $Q_n(z)$ 有且仅有 2 重零点,故假设 $n \geqslant 2$. 结合有理函数的分解理论[15],可将方程(2)改写为

收稿日期: 2017-06-20
基金项目: 国家自然科学基金(11671191, 11271179),江苏省自然科学基金(BK20140767)和江苏省"青蓝工程"资助项目.
通信作者: 张建军(1982-),男,江苏泰兴人,副教授,博士,主要从事复微分方程、复差分方程的研究. E-mail: zhangjianjun1982@163.com

$$S(f,z)=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{B_1}{(z-z_1)^2}+\frac{A_2}{z-z_2}+\frac{B_2}{(z-z_2)^2}+\cdots+\frac{A_k}{z-z_k}+\frac{B_k}{(z-z_k)^2},\tag{3}$$

其中正整数 k 表示 $Q_n(z)$ 的零点个数(不计重数),$A_i,B_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为常数,且满足 $A_1+A_2+\cdots+A_k=0$(否则无法满足前提条件 $m\leqslant n-2$),$B_i\neq 0$. 记 $u_f:=f''/f'$,易知,若 f 为方程(3)的有理解,则 u_f 必为如下的"相关"Riccati 微分方程的解:

$$u'-\frac{u^2}{2}=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{B_1}{(z-z_1)^2}+\frac{A_2}{z-z_2}+\frac{B_2}{(z-z_2)^2}+\cdots+\frac{A_k}{z-z_k}+\frac{B_k}{(z-z_k)^2},\tag{4}$$

这里"相关"表示方程(4)具有与方程(3)完全相同的右边项. 事实上,I. Laine 在文献[3]中指出,方程(3)有解当且仅当方程(4)有单参数解族. 因此,得到本文的第 2 个结果.

定理 2 若方程(3)存在有理解,则方程(4)存在有理解族,且任给方程(4)的 1 个解 u,存在方程(3)的 1 个解 f,使得 $u=f''/f'$.

文献[3]中给出了一个亚纯函数成为另一个亚纯函数的 Schwarzian 导数的充要条件. 该条件包含 3 类等式的验证,其中第 3 类等式要求验证若干个与右边项极点有关的行列式等于 0,计算比较复杂. 本文用检验若干个方程组是否有解来代替原先的第 3 类等式的验证,并且给出了在存在有理解时有理解的具体结构. 根据零点个数 k 的不同取值,得到如下 2 个结果.

定理 3 若 Schwarzian 微分方程

$$\left(\frac{f''}{f'}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2=\frac{B_1}{(z-z_1)^2}(B_1\neq 0)\tag{5}$$

存在有理解,则 $1-2B_1=m^2,m\geqslant 2(m\in\mathbf{Z})$,且有理解 $f=M((z-z_1)^m)$,其中 $M(\cdot)$ 表示 Möbius 变换全体. 此时"相关"Riccati 微分方程

$$u'-u^2/2=B_1/(z-z_1)^2(1-2B_1=m^2,m\geqslant 2(m\in\mathbf{Z}))\tag{6}$$

的解为 $u=-(m+1)/(z-z_1)$,或者

$$u=\frac{m-1}{z-z_1}+\frac{-2\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{c}(z-z_1)-d_1}+\frac{-2\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{c}(z-z_1)-d_2}+\cdots+\frac{-2\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{c}(z-z_1)-d_m},$$

其中 c 为任意复数,$d_1,d_2,\cdots,d_m$ 为 $1/m$ 互不相同的 m 次方根.

定理 4 若 Schwarzian 微分方程

$$\left(\frac{f''}{f'}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{B_1}{(z-z_1)^2}+\frac{A_2}{z-z_2}+\frac{B_2}{(z-z_2)^2}(A_1+A_2=0,B_1,B_2\neq 0)\tag{7}$$

存在有理解,则 $1-2B_i=m_i^2,m_i\geqslant 2(m\in\mathbf{Z}),i=1,2$. 记 $\lambda_i=m_i-1>0,\lambda'_i=-m_i-1<0,i=1,2,\lambda=\min\{\lambda_1,\lambda_2\}$,则方程(7)存在有理解当且仅当以下 $\lambda+1$ 种情况中有一种满足:

(i) $\lambda_1\lambda_2=A_1(z_2-z_1)$,此时有理解 $f=M\left(\int(z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2}\mathrm{d}z\right)$;

(ii) 存在 i 个 $(i=1,\cdots,\lambda)$ 复数 $b_1,\cdots,b_i$ 使得下列 $i+1$ 个等式同时成立:

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{z_1-z_2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{i}\frac{-2\lambda_1}{z_1-b_k}=-A_1,\\ \dfrac{-2\lambda_1}{b_j-z_1}+\dfrac{-2\lambda_2}{b_j-z_2}+\displaystyle\sum_{k=1,k\neq j}^{i}\frac{4}{b_j-b_k}=0,\end{cases}$$

其中 $j=1,\cdots,i$. 此时有理解

$$f=M\left(\int\frac{(z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2}}{(z-b_1)^2\cdots(z-b_i)^2}\mathrm{d}z\right).$$

注 1 文献[3]提到过定理 3 中 Schwarzian 微分方程解的结构. 将该结论写进定理 3 既是为了叙述的完整,也是为定理后半部分证明"相关"Riccati 微分方程解的结构做准备.

1 引理

引理 1[3] 假设 u_1,u_2 是 Riccati 微分方程 $u'=A(z)+u^2$ 的 2 个亚纯解,$A(z)$ 是复平面内单连通区域 G 上的亚纯函数. 如果 u_1 只有单重极点且 $2u_1$ 在 u_1 所有极点处的留数均为整数,则上述 Riccati 方程存在单参数亚纯解族 $(u_c)_{c\in\mathbf{C}}$,使得对于任意不等于 u_1 的亚纯解 u,均存在某个 $c\in\mathbf{C}$ 满足 $u=u_c$.

引理 2 假设 g 是 f 的 1 个 Möbius 变换,即 $g=(af+b)/(cf+d)$,$ad\neq cd$,则

$$\frac{g''}{g'}=\frac{f''}{f'}+\frac{-2cf'}{cf+d}=\frac{f''}{f'}+\frac{-2(cf+d)'}{cf+d}.$$

这个等式表明如果 g 是 f 的 1 个线性变换$(c=0)$,则 $g''/g'=f''/f'$.

证 由计算可得

$$g'=\left(\frac{af+b}{cf+d}\right)'=\frac{(ad-bc)f'}{(cf+d)^2},$$

$$g''=\frac{(ad-bc)f''(cf+d)-2(ad-bc)c(f')^2}{(cf+d)^3}.$$

因此

$$\frac{g''}{g'} = \frac{f''}{f'} + \frac{-2cf'}{cf+d} = \frac{f''}{f'} + \frac{-2(cf+d)'}{cf+d}.$$

2　定理的证明

定理 1 的证明　假设 f 为方程(2)的 1 个亚纯解. 由命题 4 和定理 A 易知，当 $m \leqslant n-2$ 时，f 必为有理函数. 反之，若 f 为方程(2)的 1 个有理解，则成立

$$\frac{f''}{f'} = \frac{k_1}{z-z_1} + \frac{k_2}{z-z_2} + \cdots + \frac{k_l}{z-z_l},$$

其中 z_i 是 f' 的 $|k_i|$ 重零点或极点，$i = 1,\cdots,l$. 将上式代入方程(2)得

$$S(f,z) = \frac{-k_1}{(z-z_1)^2} + \frac{-k_2}{(z-z_2)^2} + \cdots + \frac{-k_l}{(z-z_l)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{z-z_1} + \frac{k_2}{z-z_2} + \cdots + \frac{k_l}{z-z_l}\right)^2 = \frac{P_{2l-2}(z)}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2\cdots(z-z_l)^2} = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)},$$

其中 $P_{2l-2}(z)$ 是次数不超过 $2l-2$ 的多项式. 因此 $n - m \geqslant 2l - (2l-2) = 2$，即 $m \leqslant n-2$. 因此，当 $m > n-2$ 时，f 必为超越函数.

定理 2 的证明　假设 f 为方程(3)的 1 个有理解. 由命题 1，$g = 1/f$ 也为方程(3)的 1 个有理解. 记 $u_f = f''/f'$，$u_g = g''/g'$，则 u_f，u_g 为方程(4)的 2 个不同的有理解. 由引理 1 及其证明和引理 2 可得：

(i) 方程(4)的任意解 u 均为有理函数，满足 $u = u_f$，或者 $u = u_f - 2f'/(f+c)$，$c \in \mathbf{C}$;

(ii) 假设 g 是 f 的 1 个 Möbius 变换，即 $g = (af+b)/(cf+d)$，$ad \neq cd$. 通过选择不同的 a,b,c,d 的值，可使 g''/g' 取遍方程(4)的所有解.

定理 3 的证明　假设 f 为方程(5)的 1 个有理解，则

$$\frac{f''}{f'} = \frac{k_1}{z-z_1} + \frac{h_1}{z-d_1} + \cdots + \frac{h_l}{z-d_l}, \tag{8}$$

其中 k_1，h_i 均为非零整数，z_1，d_i 分别是 f' 的 $|k_1|$ 重、$|h_i|$ 重零点或极点，$i = 1,\cdots,l$. 将(8)式代入方程(5)得 $(k_1+1)^2 = 1-2B_1$，$h_i = -2$. 因为 f' 没有单重极点，所以 $k_1 \neq -1$，$1-2B_1 = m^2$，$m \geqslant 2$ $(m \in \mathbf{Z})$. 由计算易知 $f = (z-z_1)^m$ 为方程(5)的 1 个解，故方程(5)的全体解为 $M((z-z_1)^m)$. 令 $g = 1/(z-z_1)^m$，则 $u_f = f''/f' = (m-1)/(z-z_1)$，$u_g = g''/g' = (-m-1)/(z-z_1)$ 为方程(6)的 2 个不同的有理解. 由引理 1 和定理 2，方程(6)的解满足 $u = u_g = (-m-1)/(z-z_1)$，或者

$$u = u_g - \frac{2g'}{g+c} = u_g - \frac{2}{(z-z_1)(c(z-z_1)^m - 1/m)} = u_g + \frac{2m}{z-z_1} + \frac{-2\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{c}(z-z_1)-d_1} + \frac{-2\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{c}(z-z_1)-d_2} + \cdots + \frac{-2\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{c}(z-z_1)-d_m} = u_f + \frac{-2\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{c}(z-z_1)-d_1} + \frac{-2\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{c}(z-z_1)-d_2} + \cdots + \frac{-2\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{c}(z-z_1)-d_m},$$

其中 $d_1,d_2,\cdots,d_m$ 为 $1/m$ 互不相同的 m 次方根. 上述等式的证明依赖如下 2 个等式：

(Ⅰ) $(z-d_1)(z-d_2)\cdots(z-d_m) = z^m - 1/m$;

(Ⅱ) $\sum\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{m}(z-d_j) = mz^{m-1}$.

定理 4 的证明　假设 f 为方程(7)的 1 个有理解，则

$$\frac{f''}{f'} = \frac{k_1}{z-z_1} + \frac{k_2}{z-z_2} + \frac{h_1}{z-d_1} + \cdots + \frac{h_l}{z-d_l}, \tag{9}$$

其中 k_1,k_2,h_j 均为非零整数，z_1,z_2,d_j 分别是 f' 的 $|k_1|$ 重、$|k_2|$ 重、$|h_j|$ 重零点或极点，$j = 1,\cdots,l$. 将(9)式代入方程(7)，进行同定理 3 类似的讨论可得 $(k_i+1)^2 = 1-2B_i = m_i^2$，$m_i \geqslant 2$ $(m \in \mathbf{Z})$，$i = 1,2$，$h_j = -2$，$j = 1,\cdots,l$. 令 $\lambda_1 = m_1 - 1$，$\lambda'_1 = -m_1 - 1$，$\lambda_2 = m_2 - 1$，$\lambda'_2 = -m_2 - 1$，则(9)式可以表示为如下 4 种形式之一：

(Ⅰ) u_1：$= \dfrac{f''}{f'} = \dfrac{\lambda_1}{z-z_1} + \dfrac{\lambda_2}{z-z_2} + \sum\limits_{j=1}^{l_1}\dfrac{-2}{z-d_{1j}}$;

(Ⅱ) u_2：$= \dfrac{f''}{f'} = \dfrac{\lambda_1}{z-z_1} + \dfrac{\lambda'_2}{z-z_2} + \sum\limits_{j=1}^{l_2}\dfrac{-2}{z-d_{2j}}$;

(Ⅲ) u_3：$= \dfrac{f''}{f'} = \dfrac{\lambda'_1}{z-z_1} + \dfrac{\lambda_2}{z-z_2} + \sum\limits_{j=1}^{l_3}\dfrac{-2}{z-d_{3j}}$;

(Ⅳ) u_4：$= \dfrac{f''}{f'} = \dfrac{\lambda'_1}{z-z_1} + \dfrac{\lambda'_2}{z-z_2} + \sum\limits_{j=1}^{l_4}\dfrac{-2}{z-d_{4j}}$.

由定理 2，下述"相关"的 Riccati 微分方程的解只能具有(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)，(Ⅳ) 4 种形式：

$$u' - \frac{1}{2}u^2 = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{B_1}{(z-z_1)^2} + \frac{A_2}{z-z_2} + \frac{B_2}{(z-z_2)^2}. \tag{10}$$

下面的讨论分为 3 步：

第 1 步　方程(10)的所有解除了至多 3 个以外均具有形式(Ⅰ).

假设 u_2，$\bar{u}_2$ 是方程(10)的 2 个不同的具有形式(Ⅱ)的解，则存在方程(7)的 2 个不同的解 f，$\bar{f}$ 使得

$$u_2=\frac{f''}{f'}=\frac{\lambda_1}{z-z_1}+\frac{\lambda_2'}{z-z_2}+\sum_{j=1}^{l_2}\frac{-2}{z-d_{2j}},$$

$$\bar{u}_2=\frac{\bar{f}''}{\bar{f}'}=\frac{\lambda_1}{z-z_1}+\frac{\lambda_2'}{z-z_2}+\sum_{j=1}^{\bar{l}_2}\frac{-2}{z-\bar{d}_{2j}}.$$

因为 $\lambda_2'<0$,所以 z_2 既是 f 也是 $\bar{f}$ 的极点. 但是由命题 2 和引理 2,$\bar{f}=(af+b)/(cf+d)$,$ad\neq cd$,$c\neq 0$ 可知 f 的任意极点都是 $\bar{f}$ 的解析点,得到矛盾. 因此,方程(10)至多存在 1 个具有形式(Ⅱ)的解. 对形式(Ⅲ),(Ⅳ)也可进行类似的讨论,得到相同的结论.

第 2 步　形式(Ⅰ)下分 2 种子形式:

(a) $u_1=\dfrac{\lambda_1}{z-z_1}+\dfrac{\lambda_2}{z-z_2}+\sum\limits_{j=1}^{l_1}\dfrac{-2}{z-d_{1j}}$;

(b) $\bar{u}_1$: $=\dfrac{\lambda_1}{z-z_1}+\dfrac{\lambda_2}{z-z_2}+\sum\limits_{j=1}^{\bar{l}_1}\dfrac{-2}{z-\bar{d}_{1j}}$,

其中 $l_1>\bar{l}_1$,$l_1+\bar{l}_1=\lambda_1+\lambda_2+1$. 方程(10)的所有具有形式(Ⅰ)的解除了 1 个具有形式(b)外,其余均具有形式(a). 这里,l_1,$\bar{l}_1$ 是 2 个确定的数,但是 d_{1j} 可以不同.

假设

$$u_f=\frac{f''}{f'}=\frac{\lambda_1}{z-z_1}+\frac{\lambda_2}{z-z_2}+\sum_{j=1}^{l_1}\frac{-2}{z-d_{1j}},\tag{11}$$

由此可得

$$f'=c_f(z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2}\Big/\prod_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j})^2,\tag{12}$$

$$f=A(z)\Big/\prod_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j}),\tag{13}$$

其中 c_f 是 1 个非零常数,$A(z)$ 是 1 个多项式. 由引理 2,不失一般性,可假设 $A(z)$ 的最高次项的系数为 1. 令 g 是方程(7)的另一个解,使得 $g''/g'\neq f''/f'$,则 $g=(af+b)/(cf+d)$,$ad\neq cd$,$c\neq 0$,简记为 $g=(af+b)/(f+d)$. 由引理 2 可得

$$\frac{g''}{g'}=\frac{f''}{f'}+\frac{-2(f+d)'}{f+d}.\tag{14}$$

假设 b_i 是 $f+d$ 的 β_i 重零点,$i=1,2,\cdots,n_d$,n_d 表示 $f+d$ 不同的零点个数. 因为 d_{1j},$j=1,2,\cdots,l_1$ 均为 f 的单重极点,故由(11)式、(14)式可得

$$u_g=\frac{g''}{g'}=\frac{f''}{f'}+\sum_{i=1}^{n_d}\frac{-2\beta_i}{z-b_i}+\sum_{j=1}^{l_1}\frac{2}{z-d_{1j}}=$$

$$\frac{\lambda_1}{z-z_1}+\frac{\lambda_2}{z-z_2}+\sum_{i=1}^{n_d}\frac{-2\beta_i}{z-b_i}.\tag{15}$$

如果存在某个 i,使得 $b_i=z_1$,即 z_1 是 $f+d$ 的 β_i 重零点,则由 u_g 的形式可知必成立 $\lambda_1-2\beta_i=\lambda_1'$,故 $\beta_i=(\lambda_1-\lambda_1')/2=\lambda_1+1$. 因此,如果 z_1 是 $f+d$ 的零点,必为 λ_1+1 重. 同理可得,如果 z_2 是 $f+d$ 的零点,必为 λ_2+1 重. 因为 f' 只有 z_1,z_2 2 个零点,故 $f+d$ 不同于 z_1,z_2 的零点均为单重零点.

对于(13)式,记 $\alpha=\deg A(z)$,不失一般性可设 $\alpha\neq l_1$,否则用 $f-1$ 代替 f 即可. 由(12),(13)式可得

$$f'=\left(\frac{A(z)}{\prod\limits_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j})}\right)'=$$

$$\frac{A'(z)\prod\limits_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j})-A(z)\Big(\prod\limits_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j})\Big)'}{\prod\limits_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j})^2}=$$

$$\frac{c_f(z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2}}{\prod\limits_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j})^2}.$$

比较等式两边分子的次数可得

$$\alpha+l_1=\lambda_1+\lambda_2+1.\tag{16}$$

下面分 2 种情况讨论.

情况 1　若 $\alpha>l_1$,则 $f+d=\Big(A(z)+d\prod\limits_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j})\Big)\Big/\prod\limits_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j})$. 取 $d\neq -f(z_1)$ 且 $d\neq -f(z_2)$,则 $f+d$ 有 α 个单重零点,由(15)式可得

$$u_g=\frac{g''}{g'}=\frac{\lambda_1}{z-z_1}+\frac{\lambda_2}{z-z_2}+\prod_{i=1}^{\alpha}\frac{-2}{z-b_i}.$$

情况 2　若 $\alpha<l_1$,则 $A(z_1)\neq 0$ 且 $A(z_2)\neq 0$. 否则有如下 2 种情况.

子情况 1　若 $A(z_1)=0$ 且 $A(z_2)=0$,则由(13)式可得

$$f=\frac{A(z)}{\prod\limits_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j})}=\frac{(z-z_1)^{\lambda_1+1}(z-z_2)^{\lambda_2+1}B(z)}{\prod\limits_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j})}.$$

因此,$\alpha=\lambda_1+1+\lambda_2+1+\deg B(z)$,代入(16)式得 $\lambda_1+1+\lambda_2+1+\deg B(z)+l_1=\lambda_1+\lambda_2+1$,等式不成立.

子情况 2　若 $A(z_1)=0$ 而 $A(z_2)\neq 0$,则由(13)式可得

$$f=\frac{A(z)}{\prod\limits_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j})}=\frac{(z-z_1)^{\lambda_1+1}\overline{B(z)}}{\prod\limits_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j})}.$$

类似可得 $\lambda_1+1+\deg\overline{B(z)}+l_1=\lambda_1+\lambda_2+1$,故 $l_1=\lambda_2-\deg\overline{B(z)}\leqslant\lambda_2$. 另一方面,取 $d=-f(z_2)$,则

$$f+d=f-f(z_2)=(z-z_2)^{\lambda_2+1}C(z)\Big/\prod_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j}).$$

可知 $l_1=\lambda_2+1+\deg C(z)>\lambda_2$. 2 个不等式矛盾. 同理可知 $A(z_1)\neq 0$ 而 $A(z_2)=0$ 也不成立.

因此，在情况 2 下，$A(z)$ 有 α 个单重零点. 取 $d=0$，可得

$$u_g=\frac{g''}{g'}=\frac{\lambda_1}{z-z_1}+\frac{\lambda_2}{z-z_2}+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{-2}{z-b_i}.$$

取 $d\neq 0$，$d\neq -f(z_1)$，且 $d\neq -f(z_2)$，可得

$$u_g=\frac{g''}{g'}=\frac{\lambda_1}{z-z_1}+\frac{\lambda_2}{z-z_2}+\sum_{i=1}^{l_1}\frac{-2}{z-b_i}.$$

第 3 步　得到方程(7) 存在有理解的各种不同情况，并给出有理解的具体结构.

根据上述讨论，假设 $u_f=f''/f'$ 具有形式(a)，则 $f=A(z)\Big/\prod_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j})$，其中 $\alpha=\deg A(z)<l_1$，$A(z_1)\neq 0$ 且 $A(z_2)\neq 0$. 令 $g=1/f$，则

$$u_g=\frac{g''}{g'}=\frac{\lambda_1}{z-z_1}+\frac{\lambda_2}{z-z_2}+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{-2}{z-b_i}.$$

这里 b_i 是 $A(z)$ 的零点，则 u_g 即为方程(10) 具有形式(b) 的唯一解. 故

$$\alpha=\bar{l}_1=\lambda_1+\lambda_2+1-l_1. \tag{17}$$

类似子情况 1 的讨论可知，$f(z_1)\neq f(z_2)$. 取 $d=-f(z_1)$，则 $f+d=f-f(z_1)=(z-z_1)^{\lambda_1+1}D(z)\Big/\prod_{j=1}^{l_1}(z-d_{1j})$. 因此 $l_1=\lambda_1+1+\deg D(z)$. 结合(17) 式可得 $\alpha=\lambda_2-\deg D(z)\leqslant\lambda_2$. 同理可得 $\alpha\leqslant\lambda_1$. 记 $\lambda=\min\{\lambda_1,\lambda_2\}$，则 $0\leqslant\alpha\leqslant\lambda$. 接下来分 $\lambda+1$ 种情况讨论.

情况 1　$\alpha=0$，此时

$$u_g=\frac{g''}{g'}=\frac{\lambda_1}{z-z_1}+\frac{\lambda_2}{z-z_2} \tag{18}$$

是方程(10) 的 1 个解，将其代入方程(10) 得 $\lambda_1\lambda_2=A_1(z_2-z_1)$. 同时，由(18) 式可得 $g'=(z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2}$，这是 1 个多项式，所以方程(7) 的全体解为 $M\left(\int(z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2}\mathrm{d}z\right)$.

情况 2　$\alpha=i$，$i=1,\cdots,\lambda$，此时

$$u_g=\frac{g''}{g'}=\frac{\lambda_1}{z-z_1}+\frac{\lambda_2}{z-z_2}+\sum_{k=1}^{i}\frac{-2}{z-b_k} \tag{19}$$

是方程(10) 的 1 个解，将其代入方程(10) 得

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{z_1-z_2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{i}\frac{-2\lambda_1}{z_1-b_k}=-A_1,\\[2ex] \dfrac{-2\lambda_1}{b_j-z_1}+\dfrac{-2\lambda_2}{b_j-z_2}+\displaystyle\sum_{k=1,k\neq j}^{i}\frac{4}{b_j-b_k}=0,\end{cases} \tag{20}$$

其中 $j=1,\cdots,i$. 反之，假设 $\exists b_1,\cdots,b_i$ 满足方程组(20)，由(19) 式可得

$$g'=\frac{(z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2}}{(z-b_1)^2(z-b_2)^2\cdots(z-b_i)^2},$$

由方程组(20)，

$$\operatorname{Re}s_{b_j}g'=\lim_{z\to b_j}((z-b_j)^2g')'=$$

$$\lim_{z\to b_j}\frac{(z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{i}(z-b_k)^2}\left(\frac{\lambda_1}{z-z_1}+\frac{\lambda_2}{z-z_2}+\sum_{k=1,k\neq j}^{i}\frac{-2}{z-b_k}\right)=0,$$

故 g 也是 1 个有理函数，所以方程(7) 的全体解为 $M\left(\int\dfrac{(z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2}}{(z-b_1)^2\cdots(z-b_i)^2}\mathrm{d}z\right)$.

3　讨论

针对 Schwarzian 微分方程

$$\left(\frac{f''}{f'}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{B_1}{(z-z_1)^2}+\frac{-A_1}{z-z_2}+\frac{B_2}{(z-z_2)^2}, \tag{21}$$

其中 $1-2B_i=m_i^2$，$m_i\geqslant 2(m\in\mathbf{Z})$，利用定理 4 的方法，可以很快得到亚纯解的结果. 例如，假设 $B_1=-3/2$，$B_2=-60$，则 $m_1=2$，$m_2=11$，$\lambda_1=m_1-1=1$，$\lambda_2=m_2-1=10$，$\lambda=\min\{\lambda_1,\lambda_2\}=1$，故方程(21) 只在以下 2 种情况存在亚纯解：

(i) $\lambda_1\lambda_2=A_1(z_2-z_1)$；

(ii) $\exists b$ 使得等式 $\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{z_1-z_2}+\dfrac{-2\lambda_1}{z_1-b}=-A_1$ 和 $\dfrac{-2\lambda_1}{b-z_1}+\dfrac{-2\lambda_2}{b-z_2}=0$ 成立. 根据 z_1，z_2，A_1 的不同取值，可以得到如下不同结果：

(a) $z_1=1$，$z_2=11$，$A_1=1$，则满足情况(i)，此时方程(21) 的全体解为

$$M\left(\int(z-1)(z-11)^{10}\mathrm{d}z\right);$$

(b) $z_1=1$，$z_2=11$，$A_1=-6/5$，则当 $b=21/11$ 时，满足情况(ii)，此时方程(21) 的全体解为 $M\left(\int\dfrac{(z-1)(z-11)^{10}}{(z-21/11)^2}\mathrm{d}z\right)$；

(c) $z_1=1$，$z_2=11$，$A_1\neq -6/5$，且 $A_1\neq 1$，此时情况(i)、(ii) 均无法满足，故方程(21) 不存在亚纯解.

当方程(3) 中 $k\geqslant 3$ 时，是否仍可用定理 4 的方法证明类似结论成立，将是进一步研究的难点，其难点在于：不能确定是否仍然可以通过取几个数中的

最小数来限定解可能存在的几种情形,对此问题将作进一步研究.

4 参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press,1964.

[2] Hille E. Ordinary differential equations in the complex domain [M]. New York: Wiley,1976.

[3] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin-New York: Walter de Gruyter,1993.

[4] Yang Chungchun,Yi Hongxun. Uniqueness theory of meromorphic functions [M]. Beijing: Science Press,2006.

[5] Steinmetz N. On the fractorization of the solutions of the Schwarzian differential equation $\{w, z\} = q(z)$ [J]. Funkcial Ekvac,1981,24(3):307-315.

[6] Jank G,Volkmann L. Einführung in die theorie der ganzen und meromorphen funktionen mit anwendungen auf differential gleichungen [M]. Basel: Birkhäuser,1985.

[7] Malmquist J. Sur les fonctions á un nombre fini des branches définies par les équations différentielles du premier ordre [J]. Acta Math,1913,36:297-343.

[8] Steinmetz N. Eigenschaften eindeutiger Lösungen gewöhnlicher differential gleichungen im Komplexen [M]. Karlsruhe,Dissertation,1978.

[9] Yosida K. A generalisation of Malmquist´s theorem [J]. J Math,1933,9(3):253-256.

[10] Ishizaki K. Admissable solutions of the Schwarzian differential equations [J]. J Austral Math Soc Ser,A,1991,50(2):258-278.

[11] Liao Liangwen,Ye Zhuan. On the growth of meromorphic solutions of the Schwarzian differential equations [J]. J Math Anal Appl,2005,309(1):91-102.

[12] Lan Shuangting,Chen Zongxuan. On difference equations concerning Schwarzian equation [J]. Advances in Difference Equations,2017,2017(2):1-14.

[13] Langley J K. The Schwarzian derivative and the Wiman-Valiron property [J]. J Anal Math,2016,130(1):71-89.

[14] Zeev Nehari. The Schwarzian derivative and Schlicht functions [J]. Bull Amer Math Soc,1949,55(6):545-551.

[15] 沙巴特 B B. 复分析导论(第 1 卷):单复变函数 [M]. 4 版. 胥鸣伟,欧阳彦虹,译. 北京:高等教育出版社,2011.

The Meromorphic Solutions of a Certain Type of the Schwarzian Differential Equation

LU Xiaoqing[1],ZHANG Jianjun[1*],LIAO Liangwen[2]

(1. Mathematics and Information Technology School, Jiangsu Second Normal University,Nanjing Jiangsu 210013,China;
2. Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing Jiangsu 210093,China)

Abstract: In this paper, meromorphic solutions of the following type of the Schwarzian differential equation $\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ are studied. Here $P_m(z)$,$Q_n(z)$ are two irreducible polynomials of degree m,n satisfying $m \leqslant n-2$. The characterization of $P_m(z)/Q_n(z)$ for ensuring the existence of meromorphic solutions is known, but very complicated in the calculation of determinants. A new condition, which tests the existence of solutions of a series of equation sets, has been found in this paper, to replace the determinant requirements. Furthermore, the solution structures are also given out for the first time.

Key words: Schwarzian differential equation; Möbius transformation; meromorphic solution

(责任编辑:王金莲)