文章编号:1000-5862(2017)06-0591-05

# 系数为指数型整函数 2 阶线性微分方程解的超级和零点

涂　金[1],陈建军[2],徐洪焱[3]

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌　330022;2. 上饶职业技术学院,江西 上饶　334109;
3. 景德镇陶瓷大学信息工程学院,江西 景德镇　333403)

**摘要:** 研究了一类系数为指数型整函数 2 阶线性微分方程解的超级和零点,完善和推广了原有的一些结果.

**关键词:** 2 阶线性微分方程; 整函数; 超级; 零点收敛指数

**中图分类号:** O 174.52　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.06.08

## 0　引言与结果

本文使用大家熟悉的亚纯函数值分布理论的标准记号[1-2]. 用 $\sigma(f)$,$\mu(f)$,$\lambda(f)$,$\overline{\lambda}(f)$ 分别表示复平面上亚纯函数 $f(z)$ 的级、下级、零点收敛指数、不同零点收敛指数,且定义集合 $E\subset(0,+\infty)$ 的线测度为 $mE=\int_E \mathrm{d}t$ 以及对数测度为 $m_lE=\int_E \mathrm{d}t/t$,并且 $\log_2 r=\log(\log r)$,$r>1$.

**定义 1**[2]　亚纯函数 $f(z)$ 的超级和超下级分别定义为

$$\sigma_2(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_2 T(r,f)}{\log r},$$

$$\mu_2(f)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_2 T(r,f)}{\log r}.$$

**定义 2**[3]　亚纯函数 $f(z)$ 的超级零点收敛指数和不同零点收敛指数分别定义为

$$\lambda_2(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_2 N(r,f)}{\log r},$$

$$\overline{\lambda}_2(f)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_2 \overline{N}(r,f)}{\log r}.$$

**注 1**　在以上定义中,若当 $0<\sigma_2(f)=\mu_2(f)<+\infty$ 时,则称 $f(z)$ 是正则增长的.

众所周知,亚纯函数的值分布理论在复微分方程理论的研究中起着非常重要的作用. 对于 2 阶微分方程

$$f''+A(z)f'+B(z)f=F(z) \tag{1}$$

的系数 $A(z)$,$B(z)$,$F(z)$ 均为亚纯函数或整函数. 在 20 世纪 80 年代,很多复分析专家对方程(1)解的复振荡性质进行了研究,得到丰富的结果[3-10]. 1996 年,K. H. Kwon 在方程(1)的指数型整函数系数满足 $\sigma(A)=\sigma(B)$,$F(z)\equiv 0$ 时,研究了方程解的超级,得到以下结果.

**定理 A**[4]　假设 $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$,$Q(z)=b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_0$ 为 $n$ 次多项式($n$ 为正整数),其中 $a_j,b_j(j=0,1,\cdots,n)$ 为复常数,$A_0(z)$,$A_1(z)$ 为整函数,且满足 $\sigma(A_j)<n(j=0,1)$. 如果 $\arg a_n\neq\arg b_n$ 或者 $a_n=cb_n(0<c<1)$,则方程

$$f''+A_1(z)\mathrm{e}^{P(z)}f'+A_0(z)\mathrm{e}^{Q(z)}f=0 \tag{2}$$

的每个非零解满足 $\sigma_2(f)\geqslant n$.

文献[4]发表以后,很多学者对形如方程(2)解的增长性进行了研究,得到以下一些结果.

**定理 B**[5]　假设 $a$,$b$ 是非零复常数,且满足 $a\neq b$,$Q(z)$ 为非常数多项式或者 $Q(z)=h(z)\mathrm{e}^{bz}$,其中 $h(z)$ 为非零多项式,则方程 $f''+\mathrm{e}^{az}f'+Q(z)f=$

收稿日期:2017-07-15
基金项目:国家自然科学基金(11561031),江西省自然科学基金(20161BAB201020,20151BAB201008)和江西省教育厅基金(GJJ151331)资助项目.
作者简介:涂　金(1979-),男,江西鹰潭人,副教授,博士,主要从事复分析研究. E-mail:tujin2008@sina.com

0 的每个非零解满足 $\sigma_2(f) = 1$.

**定理 C**[6] 假设$A_0(z)$,$A_1(z)$是不恒为零的整函数,满足$\sigma(A_j) < 1(j = 0,1)$,$F(z)$为整函数,且满足$\sigma(F) < 1$,非零复常数$a$,$b$满足$a \neq b$,则方程$f'' + A_1 e^{az} f' + A_0 e^{bz} f = F(z)$的每个非零解具有无穷级.

**定理 D**[7] 假设$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$,$Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0$为$n$次($n$为正整数)多项式,其中$a_j$,$b_j(j = 0,1,\cdots,n)$为复常数,$A_0(z) \neq 0$,$A_1(z) \neq 0$,$F(z)$为整函数,且满足$\sigma(A_j) < n(j = 0,1)$,$\sigma(F) < n$. 若$a_n \neq b_n$,则方程

$$f'' + A_1(z) e^{P(z)} f' + A_0(z) e^{Q(z)} f = F(z) \qquad (3)$$

的每个非零解都是无穷级. 特别地,如果$F(z) \neq 0$,则方程(3)的每个解满足

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty .$$

**定理 E**[8] 假设多项式$P(z)$,$Q(z)$以及整函数$A_0(z)$,$A_1(z)$,$F(z)$满足定理 D 中的假设条件,则对于方程(3)以下结论成立:

(i) 如果$a_n \neq b_n$,$F(z) \equiv 0$,则方程(3)的每个非零解满足$\sigma_2(f) = n$;

(ii) 如果$a_n = cb_n(c < 0)$,$F(z) \neq 0$,则方程(3)的每个解满足$\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = n$.

在定理 D 和定理 E 的基础上,本文继续研究方程(3)解的超级和零点收敛指数,得到以下更为完善的结果.

**定理 1** 假设多项式$P(z)$,$Q(z)$以及整函数$A_0(z)$,$A_1(z)$,$F(z)$满足定理 D 中的假设条件,则对于方程(3)以下结论成立:

(i) 如果$a_n \neq b_n$,$F(z) \equiv 0$,则方程(3)的每个非零解满足$\mu_2(f) = \sigma_2(f) = n$;

(ii) 如果$a_n \neq b_n$,$F(z) \neq 0$,则方程(3)的每个解满足$\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = n$.

**注 2** 定理 1 的结论(i)在定理 E 的结论(i)相同条件下得到了方程(3)的每个非零解是正则增长的,推广了定理 E 的结论(i),同时也推广了定理 A 和定理 B 中的结果;定理 1 的结论(ii)在放宽了定理 E 结论(ii)的条件下,得到了相同的结果,同时也推广了定理 C 和定理 D 的结果.

## 1 几个引理

**引理 1**[11] 假设$A(z)$,$B(z)$,$F(z)$为整函数满足$\max\{\sigma(A),\sigma(B),\sigma(F)\} \leqslant \rho$,则 2 阶微分方程(1)的所有解满足$\sigma_2(f) \leqslant \rho$.

**引理 2**[12] 假设$g(r)$与$h(r)$是定义在$(0,+\infty) \to \mathbf{R}^+$的单调非减函数,且满足$g(r) \leqslant h(r)(r \notin E_1)$,其中$E_1 \subset (0,+\infty)$是一对数测度有限的集合,则对任意给定的$\alpha > 1$,$\exists r_0 > 0$,使得对所有$r > r_0$,有$g(r) \leqslant h(\alpha r)$.

**注 3** 本文中,$E_1 \subset (0,+\infty)$始终表示一对数测度有限的集合,且每次出现不必相同.

**引理 3**[13] 假设$f(z)$为超越整函数,圆周$|z| = r > 0$上的点$z_r = re^{i\theta}$满足$|f(z_r)| = M(r,f)$,则存在 1 个对数测度为有限的集合$E_1$以及某个正常数$\delta_r$($\delta_r$是和$r$有关的正常数),对圆周$|z| = r \notin E_1$上所有满足$\arg z = \theta \in [\theta_r - \delta_r, \theta_r + \delta_r]$的$z$,有

$$|f(z)/f^{(j)}(z)| \leqslant 2r^j (j \in \mathbf{N}).$$

**引理 4**[14] 假设$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$为$n$次($n$为正整数)多项式,$a_j(j = 0,1,\cdots,n)$为复常数,$A(z)$为整函数,且满足$\sigma(A) < n$,令$g(z) = A(z) e^{P(z)}$,$z = re^{i\theta}$,$\delta(P(z),\theta) = \delta(a_n z^n,\theta) = \mathrm{Re}\{a_n e^{in\theta}\}$,则对任意给定的$\varepsilon > 0$,存在 1 个线测度为 0 的集合$H_1 \subset [0,2\pi)$,使得$\forall \arg z = \theta \in [0,2\pi) \backslash H_1$的$z$,存在正常数$R = R(\theta)$使得当$|z| = r > R$时,有

(i) 如果$\delta(P(z),\theta) > 0$,则
$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(a_n z^n,\theta) r^n\} \leqslant |g(re^{i\theta})| \leqslant \exp\{(1+\varepsilon)\delta(a_n z^n,\theta) r^n\}$;

(ii) 如果$\delta(P(z),\theta) < 0$,则
$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(a_n z^n,\theta) r^n\} \leqslant |g(re^{i\theta})| \leqslant \exp\{(1-\varepsilon)\delta(a_n z^n,\theta) r^n\}$.

**引理 5**[15] 假设$f(z)$为超越亚纯函数,常数$\alpha > 1$为任一给定常数,对任意给定的$\varepsilon > 0$,则

(i) 存在 1 个常数$B > 0$和一对数测度为有限的集合$E_1$,使得对所有满足$|z| = r \notin E_1$,有

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leqslant B\left[\frac{T(\alpha r,f)}{r}(\log r)^{\alpha} \log T(\alpha r,f)\right]^{j-i}$$

$(0 \leqslant i < j, i,j \in \mathbf{N})$;

(ii) 存在 1 个线测度为 0 的集合$H_1 \subset [0,2\pi)$以及常数$B > 0$(依赖于$\alpha$),$\forall \theta \in [0,2\pi] \backslash H_1$,存在正常数$R_0 = R_0(\theta) > 1$,使得对所有满足$\arg z = \theta$和$|z| = r > R_0$,有

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leqslant B\,[T(\alpha r,f) \log T(\alpha r,f)]^{j-i} (0 \leqslant i < j).$$

**引理6**[16]　假设$f(z)$为超越整函数，且满足$\sigma(f)=\sigma>0$，则对任意给定的$\varepsilon(0<\varepsilon<\sigma)$，存在1个对数测度为无穷的集合$E_2$，使得对所有满足$|z|=r\in E_2$，有$M(r,f)\geqslant\exp\{r^{\sigma-\varepsilon}\}$.

**引理7**[17]　假设$A_j(z)(j=0,1,\cdots,k)$，$F(z)$为整函数. 如果$f(z)$为方程

$$f^{(k)}(z)+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z)+\cdots+A_1(z)f'+A_0(z)f=F(z)\qquad(4)$$

的解满足$\max\{\sigma_2(A_j),j=0,1,\cdots,k,\sigma_2(F)\}<\sigma_2(f)$，则方程(4)的解满足

$$\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f).$$

## 2　定理的证明

**定理1的证明**　由引理1易知方程(3)的每个解满足$\sigma_2(f)\leqslant n$. 假设$f$为方程(3)的多项式解，则由定理条件$a_n\neq b_n$以及方程(3)可得$\sigma(f''+A_1e^{P(z)}f'+A_0e^{Q(z)}f)=n=\sigma(F)$，这与假设$\sigma(F)<n$是矛盾的，故方程(3)不存在多项式解.

(i) 假设$f$为方程(3)的一个超越解，下证方程(3)的所有超越解满足$\mu_2(f)\geqslant n$. 下面分2种情况来证明：

(a) $\arg a_n\neq\arg b_n$或者$a_n=cb_n(0<c<1)$；

(b) $a_n=cb_n(c>1)$.

(a) $\arg a_n\neq\arg b_n$或者$a_n=cb_n(0<c<1)$. 由定理A的证明方法以及引理2可得方程(3)的所有超越解满足$\mu_2(f)\geqslant n$.

(b) $a_n=cb_n(c>1)$，有$\delta(a_nz^n,\theta)=c\delta(b_nz^n,\theta)(c>1)$. 对于每一个充分大的圆周$|z|=r>0$，在圆周上选取一点$z_r=r\,e^{i\theta_r}$满足$|f(z_r)|=M(r,f)$，则可以断定对于任意给定的$\delta>0$，有

$$[\theta_r-\delta,\theta_r+\delta]\cap\{\theta:\delta(a_nz^n,\theta)>0\}\neq\varnothing$$

且有

$$m([\theta_r-\delta,\theta_r+\delta]\cap\{(\theta:\delta(a_nz^n,\theta)>0\})>0.$$

假设不然，如果$z_r=r\,e^{i\theta_r}$是圆周$|z|=r$上一点满足$|f(z_r)|=M(r,f)$且存在某个$\delta_1>0$，使得$[\theta_r-\delta_1,\theta_r+\delta_1]\cap\{\theta:\delta(a_nz^n,\theta)>0\}=\varnothing$，也就是$[\theta_r-\delta_1,\theta_r+\delta_1]\subseteq\{\theta:\delta(a_nz^n,\theta)\leqslant0\}$，接下来将推出一个矛盾. 实际上选取更小的$\delta_2(0<\delta_2<\delta_1)$，使得$[\theta_r-\delta_2,\theta_r+\delta_2]\subset(\theta:\delta(a_nz^n,\theta)<0\}$，由方程(3)可得

$$\left|A_1(z)\ e^{P(z)}\frac{f'}{f''}\right|+\left|A_0(z)\,e^{Q(z)}\ \frac{f}{f''}\right|\geqslant1.\qquad(5)$$

在每个圆周$|z|=r$上选取点$z_r=re^{i\theta_r}$满足$|f(z_r)|=M(r,f)$. 由引理3，选取常数$\delta_3=\min\{\delta_r,\delta_2\}>0$，则对所有满足$|z|=r\notin E_1$以及$\arg z=\theta\in[\theta_r-\delta_3,\theta_r+\delta_3]$的$z$，有

$$|f(z)/f''(z)|\leqslant2r^2,|f'(z)/f''(z)|\leqslant2r.\qquad(6)$$

由于$\delta(a_nz^n,\theta)<0$，$\delta(b_nz^n,\theta)<0$，$\sigma(A_j)<n(j=0,1)$，由引理4可得，$\forall\varepsilon>0$，存在1个线测度为0的集合$H_1\subset[0,2\pi)$使得对所有满足$|z|=r\notin E_1$以及$\arg z=\theta\in[\theta_r-\delta_3,\theta_r+\delta_3]\backslash H_1$的$z$，有

$$|A_0(z)\ e^{Q(z)}f(z)/f''(z)|\leqslant2r^2\cdot\exp\{(1-\varepsilon)\delta(b_nz^n,\theta)r^n\}\to0(r\to\infty),\qquad(7)$$

$$|A_1(z)\ e^{P(z)}f'(z)/f''(z)|\leqslant2r^2\cdot\exp\{(1-\varepsilon)\delta(a_nz^n,\theta)r^n\}\to0(r\to\infty).\qquad(8)$$

把(6)~(8)式代入(5)式得$0\geqslant1$，这是矛盾的. 因此在每个充分大的圆周$|z|=r\notin E_1$上，圆周上一点$z_r=r\,e^{i\theta_r}$满足$|f(z_r)|=M(r,f)$，则对任意给定的$\delta>0$，有$[\theta_r-\delta,\theta_r+\delta]\cap\{\theta:\delta(a_nz^n,\theta)>0\}\neq\varnothing$，即$\theta_r$为集合$\{\theta:\delta(a_nz^n,\theta)\geqslant0\}$(这个集合是由$[0,2\pi)$中$n$个两两互不相交的闭区间构成)的内点或边界点，由于$\delta>0$，不管$\theta_r$为集合$\{\theta:\delta(a_nz^n,\theta)\geqslant0\}$的内点或边界点，都有$m([\theta_r-\delta,\theta_r+\delta]\cap\{\theta:\delta(a_nz^n,\theta)>0\})>0$.

由方程(3)可得

$$|A_1(z)\ e^{P(z)}|\leqslant\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|+\left|A_0(z)\,e^{Q(z)}\ \frac{f(z)}{f'(z)}\right|\qquad(9)$$

在每一个充分大的圆周$|z|=r$上，选取点$z_r=r\,e^{i\theta_r}$满足$|f(z_r)|=M(r,f)$，对于任意充分小的$\delta>0$，由引理3，选取$\delta_4=\min\{\delta_r,\delta\}>0$及引理5可得，存在正常数$B$以及线测度为0的集合$H_1$，使对所有满足$|z|=r\notin E_1$以及$\arg z=\theta\in[\theta_r-\delta_4,\theta_r+\delta_4]\backslash H_1$的$z$，有

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\leqslant BT(2r,f')\leqslant2BT(2r,f),\left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right|\leqslant2r.\qquad(10)$$

由于$\delta(a_nz^n,\theta)=c\delta(b_nz^n,\theta)>0(c>1)$，由引理4可得，$\forall\varepsilon>0(0<\varepsilon<(c-1)/(c+1))$，存在线测度为0的集合$H_1$，对充分大的$r\notin E_1$以及$\arg z=\theta\in[\theta_r-\delta_4,\theta_r+\delta_4]\backslash H_1$的$z$，有

$$|A_0(z)\ e^{Q(z)}|\leqslant\exp\{(1+\varepsilon)\delta(b_nz^n,\theta)r^n\},\qquad(11)$$

$$|A_1(z)\ e^{P(z)}|\geqslant\exp\{(1-\varepsilon)c\delta(b_nz^n,\theta)r^n\}.\qquad(12)$$

把(10)~(12)式代入(9)式得,对充分大的 $r \notin E_1$,有

$$\exp\{(1-\varepsilon)c\delta(b_n z^n,\theta)r^n\} \leqslant$$
$$2BT(r,f) + 2r\exp\{(1+\varepsilon)\delta(b_n z^n,\theta)r^n\},\qquad(13)$$

由(13)式以及引理2可得 $\mu_2(f) \geqslant n$,因此定理1的结论(i)成立.

(ii)由引理1易知方程(3)的每个解满足 $\sigma_2(f) \leqslant n$,下面证明方程(3)的每个超越解满足 $\sigma_2(f) \geqslant n$. 令 $\delta(a_n z^n,\theta) = \delta_P$,$\delta(b_n z^n,\theta) = \delta_Q$ 以及 $H_2 = \{\theta \in [0,2\pi):\delta_P = 0$ 或者 $\delta_Q = 0$ 或者 $\delta_P = \delta_Q\}$,由于 $a_n \neq b_n$,$H_2 \subset [0,2\pi)$ 显然是一个零测集. 在 $[0,2\pi)$ 中挖去集合 $H_2$,再根据 $\delta_P$,$\delta_Q$ 的符号以及大小关系,可以得到以下6个集合:$H_{31} = \{\theta \in [0,2\pi):\delta_P > \delta_Q > 0\}$,$H_{32} = \{\theta \in [0,2\pi):\delta_Q > \delta_P > 0\}$,$H_{33} = \{\theta \in [0,2\pi):\delta_P > 0 > \delta_Q\}$,$H_{34} = \{\theta \in [0,2\pi):\delta_Q > 0 > \delta_P\}$,$H_{35} = \{\theta \in [0,2\pi):\delta_Q < \delta_P < 0\}$,$H_{36} = \{\theta \in [0,2\pi):\delta_P < \delta_Q < 0\}$,显然有 $H_2 \cup (\bigcup_{j=1}^{6} H_{3j}) = [0,2\pi)$. 由方程(3)以及定理假设条件 $a_n \neq b_n$,如果 $\sigma(f) < n$,则 $\sigma(f'' + A_1 e^{P(z)}f' + A_0 e^{Q(z)}f) = n = \sigma(F)$,这与 $\sigma(F) < n$ 矛盾,故方程(3)的所有超越解满足 $\sigma(f) \geqslant n$. 在圆周 $|z| = r$ 上选取一点 $z_r = re^{i\theta_r}$ 满足 $|f(z_r)| = M(r,f)$,$\forall \delta > 0$,区间 $[\theta_r - \delta,\theta_r + \delta]$ 必与集合 $H_{3j}(j = 1,2,\cdots,6)$ 其中之一的交集测度大于0,下面分3种情况进行讨论:

(a)如果 $m([\theta_r - \delta,\theta_r + \delta] \cap H_{31}) > 0$,由方程(3)得

$$|A_1(z)e^{P(z)}| \leqslant \left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| + \left|A_0(z)e^{Q(z)}\frac{f(z)}{f'(z)}\right| + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\frac{f(z)}{f'(z)}\right|.\qquad(14)$$

由引理3和引理4,(10)式的第2个不等式以及(14)式,选取 $\delta_r^2 = \min\{\delta_r,\delta\} > 0$,可得 $\forall \varepsilon(0 < \varepsilon < n - \sigma(F))$ 以及满足 $\arg z = \theta \in ([\theta_r - \delta_r^2,\theta_r + \delta_r^2] \cap H_{31}) \backslash H_1$ 的 $z$,当 $|z| = r > R(\theta)$,有

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta_P(\theta)r^n\} \leqslant 2BT(r,f) + 2r\exp\{(1+\varepsilon)\delta_Q(\theta)r^n\} + 2r\exp\{r^{\sigma(F)+\varepsilon}\},\qquad(15)$$

由(15)式可得 $\sigma_2(f) \geqslant n$.

(b)如果 $m([\theta_r - \delta,\theta_r + \delta] \cap H_{3j}) > 0(j = 2,3,4)$,由方程(3)和以上情形(a)类似可得

$$\sigma_2(f) \geqslant n.$$

(c)如果 $m([\theta_r - \delta,\theta_r + \delta] \cap H_{35}) > 0$,由方程(3)可得

$$1 \leqslant |A_1(z)e^{P(z)}|\left|\frac{f'(z)}{f''(z)}\right| + \left|A_0(z)e^{Q(z)}\frac{f(z)}{f''(z)}\right| + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\frac{f(z)}{f''(z)}\right|,\qquad(16)$$

由引理3和引理6,存在1个对数测度为无穷的集合 $E_2$,选取 $\delta_r^2 = \min\{\delta_r,\delta\} > 0$,$\forall \varepsilon(0 < 2\varepsilon < \sigma(f) - \sigma(F))$ 以及 $\forall \arg z = \theta \in ([\theta_r - \delta_r^2,\theta_r + \delta_r^2] \cap H_{35}) \backslash H_1$ 的 $z$,当 $|z| = r \in E_2 \backslash E_1$ 时,有

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)}\frac{f(z)}{f''(z)}\right| \leqslant \frac{2|F(z)|}{M(r,f)} \cdot \left|\frac{f(z)}{f''(z)}\right| \leqslant$$
$$4r^2\exp\{r^{\sigma(F)-\sigma(f)+2\varepsilon}\} \to 0, r \to \infty.\qquad(17)$$

再由(7),(8),(16),(17)式可得 $1 \leqslant 0$,这是矛盾的. 因此 $m([\theta_r - \delta_r,\theta_r + \delta_r] \cap H_{35}) > 0$ 的情形不可能发生,同理 $m([\theta_r - \delta_r^2,\theta_r + \delta_r^2] \cap H_{36}) > 0$ 的情形也不可能发生. 因此,综合以上各种情形可得方程(3)的每个超越解满足 $\sigma_2(f) = n$. 再由引理7可得方程(3)的所有超越解满足

$$\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f).$$

## 3 参考文献


[1] 杨乐. 值分布理论及其新研究[M]. 北京:科学出版社,1982.

[2] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京:科学出版社,1995.

[3] Chen Zongxuan,Yang Chungchun. Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order differential equations[J]. Kodai Math J,1999,22(2):273-285.

[4] Kwon K H. Nonexistence of finite order solutions of certain second order linear differential equations[J]. Kodai Math J,1996,19(3):378-387.

[5] Chen Zongxuan. The growth of solutions of $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$ where the order $(Q) = 1$[J]. Sci China:Ser A,2002,45(3):290-300.

[6] Wang Jun,Laine I. Growth of solutions of second order linear differential equations[J]. J Math Anal Appl,2008,342(1):39-51.

[7] Belaidi B. Growth and oscillation related to a second order linear differential equation[J]. Math Commun,2013,18(1):171-184.

[8] Huang Wenping,Zhou Jinglun,Tu Jin,et al. On the hyper-

order of solutions of two class of complex linear differential equations [J]. Advances in Difference Equations,2015,234(1):1-12.

[9] 易才凤,钟文波. 2 阶微分方程 $f''+Af'+Bf=0$ 解的增长性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2015,39(4):340-344.

[10] 涂鸿强,刘慧芳. 一类 2 阶线性微分方程解的增长性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2017,41(2):184-188.

[11] Kinnunen L. Linear differential equations with solutions of finite iterated order [J]. Southeast Asian Bull Math,1998,22(4):385-405.

[12] 高仕安,陈宗煊,陈特为. 线性微分方程的复振荡理论 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社,1988.

[13] Tu Jin,Xu Hongyan,Liu Huangmin,et al. Complex oscillation of higher order linear differential equations with coefficients being lacunary series of finite iterated order [J]. Abstr Appl Anal,2013,2013:173-186.

[14] Markushevich A I. Theory of functions of a complex variable [M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall,1965.

[15] Gundersen G. Estimates for the logarithmic derivate of a meromorphic function, plus similar estimates [J]. J Lond Math Soc,1988,37(2):88-104.

[16] Tu Jin,Yi Caifeng. On the growth of solutions of a class of linear differential equations with coefficients having the same order [J]. J Math Anal Appl,2008,340(1):487-497.

[17] Cao Tingbin,Chen Zongxuan,Zheng Xiumin,et al. On the iterated order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations [J]. Ann Differ Equ, 2005,21(2):111-122.

# The Hyper Order and Zeros of Solutions of Second Order Linear Differential Equations with the Coefficients of Exponential Entire Functions

TU Jin[1], CHEN Jianjun[2], XU Hongyan[3]

(1. College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China;
2. Shangrao Vocational and Technical College,Shangrao Jiangxi 334109,China;
3. Department of Informatics and Engineering, Jingdezhen Ceramic Institute, Jingdezhen Jiangxi 333403,China)

**Abstract:** In this paper, the hyper order and zeros of solutions of the second order linear differential equations with the coefficients of exponential entire functions are investigated,and some results are obtained which improve and extend some previous results.

**Key words:** second order linear differential equations; entire functions; hyper order; convergence exponent of zero sequence

(责任编辑: 王金莲)