第 41 卷 第 6 期
2017 年 11 月

江西师范大学学报(自然科学版)
Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)

Vol. 41 No. 6
Nov. 2017

文章编号:1000-5862(2017)06-0617-06

一类非线性差分方程的伪概周期解

简伟刚[1],陈园园[2]

(1. 豫章师范学院自然科学系,江西 南昌 330103;2. 南昌理工学院公共教学部,江西 南昌 330044)

摘要: 讨论了非线性差分方程 $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha(n,n-k) f(k,x(k)) + h(n,x(n)), n \in \mathbf{Z}$ 的伪概周期解的存在性,其中 $\alpha: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^+$,$h: \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ 和 $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$. 通过 2 个例子说明定理 1 中的 4 个条件是可以实现的.

关键词: 非线性差分方程; 伪概周期解; 伪概周期序列; 正规锥

中图分类号: O 175.7 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2017.06.12

0 引言

H. L. Smith 等[1-3] 在研究一类传染性疾病模型时得到了如下的时滞积分方程

$$x(t) = \int_{t-x(t)}^{t} f(s,x(s))\,\mathrm{d}s, t \in \mathbf{R}.$$

1996 年,K. Ezzinbi 等[4] 借助 Hilbert 度量研究了上述方程正周期解的存在性. 2002 年,L. K. Boey 等将此模型延伸到离散的情形. 2003 年,Y. Hamaya[5] 证明了有限时滞差分方程

$$x(t) = \sum_{s=t-x}^{t-1} f(s,x(s)), t \in \mathbf{Z} \cap [r, +\infty)$$

的概周期解的存在性. 2011 年,Ding Huisheng 等[2] 研究了如下非线性时滞差分方程

$$x(n) = h(x(n)) + \sum_{k=n-\tau(n)}^{n} f(k,x(k)), n \in \mathbf{Z} \qquad (1)$$

的概周期解的存在性. 2013 年,Ding Huisheng 等[6] 继续研究了方程(1) 的加权概周期解的存在性.

近年来,时滞积分和差分方程的正概周期解和概自守解的存在性受到了越来越多学者的关注[7-13]. 在这些工作的基础上,本文研究方程

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha(n,n-k) f(k,x(k)) + h(n,x(n)), n \in \mathbf{Z} \qquad (2)$$

的伪概周期解的存在性问题. 实际上,当方程(2) 中的

$$\alpha(n,k) = \begin{cases} 0, k > \tau(n), \\ 1, k \leqslant \tau(n), \end{cases}$$

而 $\tau(n): \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}^+$ 为 1 个周期函数,且 $h(n,x(n)) \equiv h(x(n))$ 时,方程(2) 退化成方程(1),即文献[2] 所研究的方程(1) 是本文所研究的方程(2) 的一种特例.

1 基本定义和定理

用 $\mathbf{Z}(\mathbf{Z}^+)$ 表示整数集(非负整数集),$\mathbf{N}$ 表示正整数集,$\mathbf{R}(\mathbf{R}^+)$ 表示实数集(非负实数集),称数集 $P \subset \mathbf{Z}$ 为在 $\mathbf{Z}$ 中是相对稠密的,如果存在一个正整数 $p \in \mathbf{N}$,$\forall n \in \mathbf{Z}$,都有 $P \cap [n,n+p] \neq \varnothing$,其中 $[n,n+p] \equiv \{n,n+1,\cdots,n+p\}$. $X(Y)$ 是赋予范数 $\|\cdot\|_X(\|\cdot\|_Y)$ 的实 Banach 空间. $B(X,Y)$ 表示所有 X 到 Y 上的有界映射. 特别地,称以 $\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{Z}^+$ 为定义域的映射为序列.

除此之外,对于子集 $\Omega \subset \mathbf{R}$,设 $f: \mathbf{Z} \times \Omega \to \mathbf{R}$,若 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,当 $x_1, x_2 \in K$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时,使得 $\forall n \in \mathbf{Z}$,有 $|f(n,x_1) - f(n,x_2)| < \varepsilon$,称函数 f 在 Ω 上关于 n 是一致连续的,用 $C(\mathbf{Z} \times \Omega)$ 表示所有这样函数 f 的集合.

定义 1[14] 称序列 $f: \mathbf{Z} \to X$ 为概周期序列,如果 $\forall \varepsilon > 0$,数集

$$\{k \in \mathbf{Z}: \|f(n+k) - f(n)\|_X < \varepsilon, \forall n \in \mathbf{Z}\}$$

在 $\mathbf{Z}$ 上是相对稠密的. 用 $AP(\mathbf{Z},X)$ 表示所有这样序列的集合,在不引起混淆的情况下,简记为 $AP(\mathbf{Z})$.

收稿日期:2017-04-15

基金项目:国家自然科学基金(11461034) 和江西省教育厅科技计划(GJJ151326) 资助项目.

作者简介:简伟刚(1985-),男,江西南昌人,讲师,主要从事非线性方程的概周期解方面的研究. E-mail: 1017177631@qq.com

定义 2 称序列$f:\mathbf{Z}\to X$是正规的,如果对于任意整数序列$\{m'_i\}$,总能找到它的子序列$\{m_i\}$,使得$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当$i_1,i_2>N$时,$\forall n\in\mathbf{Z}$,有

$$|f(n+m_{i_1})-f(n+m_{i_2})|<\varepsilon.$$

引理 1[14] 序列$f:\mathbf{Z}\to X$是一个概周期序列当且仅当f是正规的.

定义 3 记$PAP_0(\mathbf{Z},X)=\{f\in B(\mathbf{Z},X):\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{2k}\cdot\sum\limits_{n=-k}^{k}\|f(n)\|_X=0,k,n\in\mathbf{Z}\}$,称有界序列$f:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}$为伪概周期序列,如果$\exists f^{ap}\in AP(\mathbf{Z})$和$f^e\in PAP_0(\mathbf{Z})$,使得$f=f^{ap}+f^e$,用$PAP(\mathbf{Z},X)$表示所有伪概周期序列的集合,在不引起混淆的情况下,简记为$PAP(\mathbf{Z})$.

易见,$AP(\mathbf{Z})$和$PAP(\mathbf{Z})$关于上确界范数是 Banach 空间[1].

引理 2[14] 对于伪概周期序列,下述结论成立:

(i) 若$x(\cdot)$为伪概周期序列,a为实数,j为整数,则$x(\cdot+j),x(j\cdot),ax(\cdot)$都是伪概周期序列.

(ii) 若$x(\cdot),y(\cdot)$为伪概周期序列,则$x(\cdot)\pm y(\cdot),x(\cdot)y(\cdot)$都是伪概周期序列.

定义 4 设连续函数$f:\mathbf{Z}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\forall\varepsilon>0$和任意紧子集$\Omega\subset\mathbf{R}$,数集$\{k\in\mathbf{Z}:|f(n+k,x)-f(n,x)|<\varepsilon,\forall n\in\mathbf{Z},\forall x\in\Omega\}$在$\mathbf{Z}$上是相对稠密的,称$f(n,x)$对$x\in\mathbf{R}$关于$n$是一致概周期的,一致概周期函数的全体记作$AP(\mathbf{Z}\times\mathbf{R},\mathbf{R})$,在不引起混淆的情况下,简记为$AP(\mathbf{Z}\times\mathbf{R})$.

定义 5 设$f:\mathbf{Z}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$为连续函数,对于任意紧子集$\Omega\subset\mathbf{R}$都有$f$在$\mathbf{Z}\times\Omega$是有界的,并且

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2k}\sum_{n=-k}^{k}|f(n,x)|=0,$$

其中$n\in\mathbf{Z},x\in\Omega$,称$f(n,x)$为$\mathbf{Z}\times\Omega$上的扰动函数,记$PAP_0(\mathbf{Z}\times\mathbf{R})$表示所有这样函数的集合.

记$PAP(\mathbf{Z}\times\mathbf{R})$表示所有这样函数$f$的集合:$f=f^{ap}+f^e$,其中$f^{ap}\in AP(\mathbf{Z}\times\mathbf{R}),f^e\in PAP_0(\mathbf{Z}\times\mathbf{R})$.

引理 3[14] 令$f\in PAP(\mathbf{Z}\times\mathbf{R})$,则下列结论成立:

(i) 对于任意紧子集$\Omega\subset\mathbf{R},f\in C(\mathbf{Z}\times\Omega)$且$f$在$\mathbf{Z}\times\Omega$上是有界的;

(ii) 若$x\in PAP(\mathbf{Z})$,且对每个$n\in\mathbf{Z}$,都有$x(n)\geqslant0$,则$f(\cdot,x(\cdot))\in PAP(\mathbf{Z})$.

定义 6[15] 称 Banach 空间X中的一个闭凸集P为锥,如果它满足下列 2 个条件:

(i) 若$x\in P$,则$\forall\lambda\geqslant0$,有$\lambda x\in P$;

(ii) 若$x\in P$且$-x\in P$,则$x=\theta$,其中θ为X中的零元素.

运用锥P的性质,在X中引入一个偏序关系,$x\leqslant y$当且仅当$y-x\in P$. 对任意给定的$u,v\in P$,记$[u,v]:=\{x\in X|u\leqslant x\leqslant v\}$. 用$P^o$表示$P$的内部,若$P^o\neq\varnothing$,则称锥$P$为体锥.

称P锥为正规的,如果存在一个常数$k>0$,使得当$0\leqslant x\leqslant y$时,就有$\|x\|_X\leqslant k\|y\|_X$.

引理 4[1] 令P^o表示实 Banach 空间X中的一个正规体锥P的内部,假设算子$A:P^o\times P^o\times P^o\to P^o$满足如下 4 个条件:

(S1) 对每个$x,y,z\in P^o,A(\cdot,y,z)$是单调递增的,$A(x,\cdot,z)$单调递减,且$A(x,y,\cdot)$单调递减;

(S2) 存在一个函数$\varphi:(0,1)\times P^o\times P^o\to(0,+\infty)$,使得$\forall x,y,z\in P^o$和$\lambda\in(0,1)$,都有$\varphi(\lambda,x,y)>\lambda$且$A(\lambda x,\lambda^{-1}y,z)\geqslant\varphi(t,x,y)A(x,y,z)$;

(S3) $\exists x_0,y_0\in P^o$使得$x_0\leqslant y_0,x_0\leqslant A(x_0,y_0,x_0),A(y_0,x_0,y_0)\leqslant y_0$,并且$\inf\limits_{x,y\in[x_0,y_0]}\varphi(\lambda,x,y)>\lambda,\lambda\in(0,1)$;

(S4) 存在一个常数$L>0$使得当$z_1\geqslant z_2$时,对所有的$x,y,z_1,z_2\in P^o$,有

$$A(x,y,z_1)-A(x,y,z_2)\geqslant-L(z_1-z_2),$$

则A在$[x_0,y_0]$中存在唯一的不动点x^*,即$A(x^*,x^*,x^*)=x^*$.

文中一些未给出的定义和符号均参见文献[4].

2 主要结论

引理 5 设函数$\alpha:\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}^+$使得序列$g:n\to\alpha(n,\cdot)$满足$g\in B(\mathbf{Z},l^1(\mathbf{Z}^+))$,如果$f\in B(\mathbf{Z},\mathbf{Z}^+)$,则$F(n)=\sum\limits_{k=-\infty}^{n}\alpha(n,n-k)f(k)$是有界的.

证 由于$\|F(n)\|=\left|\sum\limits_{k=-\infty}^{n}\alpha(n,n-k)f(k)\right|=\left|\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\alpha(n,k)f(n-k)\right|\leqslant\|f\|_\infty\|\alpha(n,\cdot)\|_{l^1(\mathbf{Z})}$,故$F$是有界的.

引理 6 设函数$\alpha:\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}^+$使得序列$g:n\to\alpha(n,\cdot)$满足$g\in AP(\mathbf{Z},l^1(\mathbf{Z}^+))$,如果$f\in AP(\mathbf{Z})$,则$F(n)=\sum\limits_{k=-\infty}^{n}\alpha(n,n-k)f(k)$是概周期的.

证 由引理5知,F是有界的. 要证$F\in AP(\mathbf{Z})$,即要证F是正规的. 易见,F也可以表示成$F(n)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha(n,k)f(n-k)$.

设$\{m_i\}$是任意整数序列,由于$g\in AP(\mathbf{Z},$

$l^1(\mathbf{Z})$）和 $f \in AP(\mathbf{Z})$，存在 $\{m_i\}$ 的子序列 $\{m_{i_1}\}$ 及序列 $\alpha_1(n,\cdot):\mathbf{Z}\to\mathbf{R}$ 和 $f_1:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}$，当 $i_1\to+\infty$ 时，使得 $\forall n\in\mathbf{Z}$，都有

$$\|\alpha(n+m_{i_1},\cdot)-\alpha_1(n,\cdot)\|_{l^1(\mathbf{Z})}\to 0,$$
$$|f(n-k+m_{i_1})-f_1(n-k)|\to 0.$$

令 $F_1(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_1(n,k)f_1(n-k)$，考虑

$$|F(n+m_{i_1})-F_1(n)|=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha(n+m_{i_1},k)\cdot f(n-k+m_{i_1})-\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_1(n,k)f_1(n-k)\right|=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}(\alpha(n+m_{i_1},k)f(n-k+m_{i_1})-\alpha_1(n,k)f_1(n-k))\right|\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\alpha(n+m_{i_1},k)f(n-k+m_{i_1})-\alpha_1(n,k)f_1(n-k)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\alpha(n+m_{i_1},k)f(n-k+m_{i_1})-\alpha_1(n,k)f(n-k+m_{i_1})+\alpha_1(n,k)f(n-k+m_{i_1})-\alpha_1(n,k)f_1(n-k)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\alpha(n+m_{i_1},k)f(n-k+m_{i_1})-\alpha_1(n,k)f(n-k+m_{i_1})\right|+\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\alpha_1(n,k)f(n-k+m_{i_1})-\alpha_1(n,k)f_1(n-k)\right|.$$

当 $i_1\to+\infty$ 时，一方面，

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\alpha(n+m_{i_1},k)f(n-k+m_{i_1})-\alpha_1(n,k)f(n-k+m_{i_1})\right|\leqslant\|f\|_\infty\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\alpha(n+m_{i_1},k)-\alpha_1(n,k)\right|\to 0.$$

另一方面，由 Lebesgue 控制收敛原理知，

$$\sum_{k=0}^{+\infty}|\alpha_1(n,k)f(n-k+m_{i_1})-\alpha_1(n,k)f_1(n-k)|=\sum_{k=0}^{+\infty}|\alpha_1(n,k)|\,|f(n-k+m_{i_1})-f(n-k)|\to 0.$$

综上所述，F 是正规的，即 $F\in AP(\mathbf{Z})$.

引理 7　设函数 $\alpha:\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}^+$ 使得序列 $g: n\to\alpha(n,\cdot)$ 满足 $g\in PAP(\mathbf{Z},l^1(\mathbf{Z}^+))$，且存在函数 $\beta(k)\in l^1(\mathbf{Z})$，使得 $|\alpha^{ap}(n,k)|\leqslant\beta(k)$（$\forall n\in\mathbf{Z}$）恒成立，若 $f\in PAP(\mathbf{Z})$，则 $F(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha(n,n-k)f(k)$ 是伪概周期的，且 $F^{ap}(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha^{ap}(n,n-k)f^{ap}(k)$.

证　由引理 5 知 F 是有界的，令

$$I(r)=\frac{1}{2r}\sum_{n=-r}^{r}\left(\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha(n,n-k)f(k)-\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha^{ap}(n,n-k)f^{ap}(k)\right),r\in\mathbf{Z}.$$

于是，要证 $F\in PAP(\mathbf{Z})$，只要证明当 $r\to+\infty$ 时，$I(r)\to 0$. 考虑

$$I(r)=\frac{1}{2r}\sum_{n=-r}^{r}\left(\sum_{k=-\infty}^{n}(\alpha^{ap}(n,n-k)+\alpha^{e}(n,n-k))\cdot(f^{ap}(k)+f^{e}(k))-\sum_{k=-\infty}^{n}(\alpha^{ap}n,n-k)f^{ap}(k)\right)=\frac{1}{2r}\sum_{n=-r}^{r}\left(\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha^{e}(n,n-k)f(k)+\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha^{ap}(n,n-k)\cdot f^{e}(k)\right)=\frac{1}{2r}\sum_{n=-r}^{r}\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha^{e}(n,n-k)f(k)+\frac{1}{2r}\sum_{n=-r}^{r}\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha^{ap}(n,n-k)f(k).$$

将上式分成 2 个部分来考虑，一方面，

$$\frac{1}{2r}\sum_{n=-r}^{r}\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha^{e}(n,n-k)f(k)\leqslant\frac{1}{2r}\sum_{n=-r}^{r}\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha^{e}(n,n-k)\|f\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty\frac{1}{2r}\sum_{n=-r}^{r}\|\alpha^{e}(n,n-k)\|_{l^1(\mathbf{Z})}\to 0,r\to+\infty.$$

另一方面，由 Fubini 定理知，

$$\frac{1}{2r}\sum_{n=-r}^{r}\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha^{ap}(n,n-k)f^{e}(k)=\frac{1}{2r}\sum_{n=-r}^{r}\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^{ap}(n,k)f^{e}(n-k)\leqslant\frac{1}{2r}\sum_{n=-r}^{r}\sum_{k=0}^{+\infty}\beta(k)\cdot f^{e}(n-k)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\beta(k)\frac{1}{2r}\sum_{n=-r}^{r}f^{e}(n-k)\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\beta(k)\frac{1}{2r}\sum_{n=-r-k}^{r-k}f^{e}(n)\right).$$

令 $F_r(k)=\frac{1}{2r}\sum_{n=-r-k}^{r-k}f^{e}(n)$，易见 $\lim\limits_{r\to+\infty}F_r(n)\to 0$ 和 F_r 是有界的. 又由 Lebesgue 控制收敛原理有

$$\frac{1}{2r}\sum_{n=-r}^{r}\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha^{ap}(n,n-k)f^{e}(k)\to 0,r\to+\infty.$$

定理 1　若方程(2)中的函数 f 有分解

$$f(n,x)=\sum_{i=1}^{m}f_i(n,x)g_i(n,x),$$

其中 $m\in\mathbf{N}$ 是某个常数，且有下列 4 个条件成立：

(H1) $f_i,g_i\in PAP(\mathbf{Z}\times\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$，$f_i(n,\cdot)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上是单调递增的，$g_i(n,\cdot)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上是单调递减的 $(i=1,2,\cdots,m)$. $h:\mathbf{Z}\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 及 $h(n,\cdot)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上是单调递减的，并且存在常数 $L>0$，使得

$$h(n,z_1)-h(n,z_2)\geqslant -L(z_1-z_2),\forall z_1\geqslant z_2\geqslant 0,\forall n\in\mathbf{Z};$$

(H2) 存在函数 $\varphi_i,\psi_i:(0,1)\times(0,+\infty)\to(0,1]$，使得 $\forall\lambda\in(0,1)$ 和 $\forall x,y>0$，有

$$f_i(n,\lambda x)\geqslant\varphi_i(\lambda,x)f_i(n,x),$$

$g_i(n,\lambda^{-1}y) \geqslant \psi_i(\lambda,y)g_i(n,y)$,

$\varphi_i(\lambda,x) > \lambda, \psi_i(\lambda,y) > \lambda, i=1,2,\cdots,m$;

同时,$\forall a,b \in (0,+\infty)$ 且 $a \leqslant b$,有

$\inf_{x,y\in[a,b]} \varphi_i(\lambda,x)\psi_i(\lambda,y) > \lambda, \lambda \in (0,1), i = 1,2,\cdots,m$;

(H3) 设函数 $\alpha: \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^+$ 使得序列 $\bar{g}: n \to \alpha(n,\cdot)$ 满足 $\bar{g} \in PAP(\mathbf{Z}, l^1(\mathbf{Z}^+))$,且 $\exists \beta(k) \in l^1(\mathbf{Z}^+)$,使得 $|\alpha^{ap}(n,k)| \leqslant \beta(k)\ (\forall n \in \mathbf{Z})$ 恒成立;

(H4) 对于任意常数 $d>0$,$\exists c \in (0,d]$,使得

$$\inf_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha(n,n-k)\sum_{i=1}^{m}f_i(k,c)g_i(k,d) \geqslant c,$$

则方程(2)有唯一的伪概周期解,并且这个伪概周期解有1个正下确界.

证 假设 $P=\{x\in PAP(\mathbf{Z}): x(n)\geqslant 0, \forall n\in\mathbf{Z}\}$,易证 P 是 $PAP(\mathbf{Z})$ 中的一个正规体锥,且

$P^o = \{x \in PAP(\mathbf{Z}): \exists \varepsilon > 0, \text{s.t. } x(n) \geqslant \varepsilon, \forall n \in \mathbf{Z}\}$.

在 $P^o\times P^o\times P^o$ 上定义一个非线性算子 A:

$$A(x,y,z)(n) = \sum_{k=-\infty}^{n}a(n,n-k)\sum_{i=1}^{m}f_i(k,x(k))\cdot g_i(k,y(k)) + h(n,z(n)).$$

首先,证明算子 A 是 $P^o\times P^o\times P^o\to P^o$ 上的算子. 令 $x,y,z\in P^o$. 由条件(H1)和引理3知

$f_i(\cdot,x(\cdot)), g_i(\cdot,y(\cdot)), h(\cdot,z(\cdot)) \in PAP(\mathbf{Z}), i=1,2,\cdots m$,

则结合条件(H3)和引理7得到 $A(x(\cdot),y(\cdot),z(\cdot)) \in PAP(\mathbf{Z})$.

由 y 是有界序列知,$\exists M>0$,使得 $\forall n\in\mathbf{Z}$,有 $|y(n)|\leqslant M$. 运用条件(H4),$\exists c\in(0,M]$,得到

$$\inf_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha(n,n-k)\sum_{i=1}^{m}f_i(k,c)g_i(k,d) \geqslant c.$$

若 $\varepsilon \geqslant c$,则结论显然成立,接下来考虑当 $\varepsilon < c$ 时的情况,$\forall n\in\mathbf{Z}$,

$$A(x,y,z)(n) = \sum_{k=-\infty}^{n}\alpha(n,n-k)\sum_{i=1}^{m}f_i(k,x(k))\cdot g_i(k,y(k)) + h(n,z(n)) \geqslant \sum_{k=-\infty}^{n}\alpha(n,n-k)\cdot \sum_{i=1}^{m}f_i(k,\varepsilon)g_i(k,M) \geqslant \sum_{k=-\infty}^{n}\alpha(n,n-k)\cdot \sum_{i=1}^{m}f_i\left(k,\frac{\varepsilon}{c}\cdot c\right)g_i(k,M) \geqslant \frac{\varepsilon}{c}\cdot c = \varepsilon > 0.$$

即 $A(x,y,z)(n)\in P^o$. 因此,A 是一个 $P^o\times P^o\times P^o\to P^o$ 的算子.

其次,证明算子 $A: P^o\times P^o\times P^o\to P^o$ 满足引理4的4个假设.

由(H2)易知,$\forall x,y,z\in P^o$,$A(\cdot,y,z)$ 是增函数,$A(x,\cdot,z)$ 是减函数,$A(x,y,\cdot)$ 是减函数,即引理4中的条件(S1)满足.

令 $a(x,y) = \min\{\inf_{n\in\mathbf{Z}}x(n), \inf_{n\in\mathbf{Z}}y(n)\}$,$b(x,y) = \max\{\sup_{n\in\mathbf{Z}}x(n), \sup_{n\in\mathbf{Z}}y(n)\}$,其中 $x,y\in P^o$. 设 $\lambda\in(0,1)$,定义

$\varphi_i(\lambda,x,y) = \inf_{u,v\in[a(x,y),b(x,y)]}\gamma_i(\lambda,u)\psi_i(\lambda,v)$, $i=1,2,\cdots,m$, $\varphi(\lambda,x,y) = \min_{i=1,2,\cdots,m}\varphi_i(\lambda,x,y)$.

由(H3)知,对每个 $x,y\in P^o$ 和 $\lambda\in(0,1)$,$\varphi_i(\lambda,x,y)>\lambda (i=1,2,\cdots,m)$,则 $\varphi(\lambda,x,y)>\lambda$ 也成立. 再由(H3)可以得到,对所有的 $x,y,z\in P^o$,$\lambda\in(0,1)$ 和 $n\in\mathbf{Z}$,有 $0<\varphi(\lambda,x,y)\leqslant 1$ 和

$$A(\lambda x,\lambda^{-1}y,z)(n) = \sum_{k=-\infty}^{n}\sum_{i=1}^{m}f_i(k,\lambda x(k))\cdot g_i(k,\lambda^{-1}y(k)) + h(n,z(n)) \geqslant \sum_{k=-\infty}^{n}\sum_{i=1}^{m}\gamma_i(\lambda,x(k))\cdot f_i(k,x(k))\psi_i(\lambda,y(k))g_i(k,y(k)) + h(n,z(n)) \geqslant \varphi(\lambda,x,y)\sum_{k=-\infty}^{n}\sum_{i=1}^{m}f_i(k,x(k))g_i(k,y(k)) + h(n,z(n)) \geqslant \varphi(\lambda,x,y)\left[\sum_{k=-\infty}^{n}\sum_{i=1}^{m}f_i(k,x(k))\cdot g_i(k,y(k)) + h(n,z(n))\right] = \varphi(\lambda,x,y)A(x,y,z).$$

因此,有

$A(\lambda x,\lambda^{-1}y,z) \geqslant \varphi(\lambda,x,y)A(x,y,z), \forall x,y,z\in P^o, \forall \lambda\in(0,1)$.

即引理4的假设(S2)满足.

最后,证明引理4的假设(S3)和(S4)成立. 由条件(H4)易知,$A(c,d,c)\geqslant c$;$A(d,c,d)\leqslant d$. 同样地,$\forall\lambda\in(0,1)$ 有

$$\inf_{x,y\in[c,d]}\varphi(\lambda,x,y) = \min_{i=1,2,\cdots,m}\inf_{x,y\in[c,d]}\varphi_i(\lambda,x,y) = \min_{i=1,2,\cdots,m}\varphi_i(\lambda,c,d) = \varphi(\lambda,c,d) > \lambda.$$

因此,假设(S3)满足. 除此之外,由条件(H1)得出假设(S4)也满足.

综上,引理4中4个假设均成立,故在 $[c,d]$ 上有一个唯一的不动点 x^*. 即方程(2)具有正下确界的概周期解.

接下来证明 x^* 是 A 在 P^o 上的唯一不动点. 令 $y^*\in P^o$ 是 A 的一个不动点,则 $\exists\lambda\in(0,1)$ 使得 $\lambda c\leqslant x^*, y^*\leqslant\lambda^{-1}d$. 记 $c'=\lambda c$ 和 $d'=\lambda^{-1}d$. 不难证明:

$A(c',d',c')\geqslant c'$, $A(d',c',d')\leqslant d'$,

$\inf_{x,y\in[c',d]}\varphi(\lambda,x,y) > \lambda, \forall\lambda\in(0,1)$.

类似上述证明,由引理4知 A 在 $[c',d]$ 上有唯一的不动点,从而 $x^*=y^*$.

3　算例

以下举出 2 个例子来说明定理 1 中的 4 个条件是可以实现的.

例 1　方程

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\frac{1}{1+(n-k)^2}\frac{1+|\sin k+\sin(\pi k)|}{10}\cdot\sqrt{x^2(n)+x(n)}+\sin^2 n/[1+x^2(n)],\qquad(3)$$

对应于方程(2)，此时，

$m=1$，$f_1(k,x)=(1+|\sin k+\sin(\pi k)|)\cdot\sqrt{x^2+x}/10$，$g_1(k,x)\equiv 1$，$h(n,x)=\sin^2 n/(1+x^2)$，$\alpha(n,k)\equiv 1/(1+k^2)$，$\beta(n,k)\equiv 1/k^2$.

令

$$L=1,\varphi_1(\lambda,x)=\sqrt{\frac{\lambda^2x^2+\lambda x}{x^2+x}},\psi_1(\lambda,y)\equiv 1.$$

易证(H1)～(H3)成立. 由于

$$\sum_{k=-\infty}^{n}\frac{1}{1+(n-k)^2}\frac{1+|\sin k+\sin(\pi)k|}{10}\cdot\sqrt{c^2+c}\geqslant\frac{\pi}{20}\sqrt{c^2+c}.$$

而 $\pi\sqrt{c^2+c}|20>c$ 只要 $c<\pi^2/(400-\pi^2)$ 成立即可，故(H4)成立.

因此，由定理 1 可推出方程(3)有唯一的伪概周期解，且其有正的下确界.

例 2　设

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha(n,n-k)(1+\sin^2(k\pi)+\sin^2 k)\cdot\sqrt{\ln(x(k)+1)}\frac{1}{\sqrt{x(k)+1}}+e^{-x(n)}.$$

若

$$\tau(n)=\begin{cases}1,n\text{ 为奇数},\\2,n\text{ 为偶数},\end{cases}\alpha(n,k)=\begin{cases}0,k>\tau(n),\\1,k\leqslant\tau(n).\end{cases}$$

由函数 α 的构造，原方程变成有限和:

$$x(n)=\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}(1+\sin^2(k\pi)+\sin^2 k)\cdot\sqrt{\ln(x(k)+1)}\frac{1}{\sqrt{x(k)+1}}+e^{-x(n)},$$

此时 $m=1$，$h(x)=e^{-x}$，$f_1(n,x)=(1+\sin^2(n\pi)+\sin^2 n)\sqrt{\ln(x+1)}$，$g_1(n,x)\equiv 1/\sqrt{x+1}$. 并且，

$$\varphi_1(\lambda,x)=\sqrt{\frac{\ln(\lambda x+1)}{\ln(x+1)}},\psi_1(\lambda,x)\equiv\sqrt{\lambda}.$$

则不难证明(H1)～(H3)是成立的. 除此之外，$\forall d>0$，要使得

$$\inf_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f_1(k,c)g_1(k,d)\geqslant c,$$

只要有不等式 $3\sqrt{\ln(c+1)}/c\geqslant\sqrt{d+1}$ 成立即可，由于 $\lim_{c\to 0^+}\sqrt{\ln(c+1)}/c=+\infty$，因此，满足(H4)中的条件 $c\in(0,d)$ 是显然存在的.

综上，由定理 1 知，方程

$$x(n)=e^{-x(n)}+\sum_{j=n-k(n)}^{n}(1+\sin^2(j\pi)+\sin^2 j)\cdot\sqrt{\ln[x(j)+1]}/\sqrt{x(j)+1}$$

有唯一的具有正下确界的伪概周期解.

注 1　在文献[2]中，Ding Huisheng 等研究了差分方程

$$x(n)=h(x(n))+\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k,x(k)),n\in\mathbf{Z},$$

结合例 2 中的证明过程可以发现，实际上此方程是本文中所研究的方程(2)的一种特例，即只需取

$$\alpha(n,k)=\begin{cases}0,k>\tau(n),\\1,k\leqslant\tau(n),\end{cases}$$

而 $\tau(n):\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ 为一个周期函数，且 $h(n,x(n))\equiv h(x(n))$ 即可.

致谢：在此特别感谢丁惠生教授对本文悉心指导和帮助，并且衷心感谢评审老师给出诸多宝贵意见.

4　参考文献

[1] Ding Huisheng，Liang Jin，Xiao Jijun. Fixed point theorems for nonlinear operators with and without monotonicity in partially ordered Banach spaces [J]. Fixed Point Theory and Applications，2010，2010(1)：1-11.

[2] Ding Huisheng，Fu Jiudong，N′Guérékata G M. Positive almost periodic type solutions to a class of nonlinear difference equations [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations，2011，25(25)：1-17.

[3] Smith H L. On periodic solutions of a delay integral equation modelling epidemics [J]. Journal of Mathematical Biology，1977，4(1)：69-80.

[4] Ezzinbi K，Hachii M A. Existence of positive almost periodic solutions of functional equations via Hilbert′s projective metric [J]. Nonlinear Anal TMA，1996，26(6)：1169-1176.

[5] Hamaya Y. Existence of an almost periodic solution in a difference equation with infinite delay [J]. J Differ Equations Appl，2003，9(2)：227-237.

[6] Ding Huisheng，N′Guérékata G M，Nieto J J. Weighted pseudo almost periodic solutions for a class of discrete hematopoiesis model [J]. Revista Matemática Complutense，2013，26(2)：427-443.

[7] Ding Huisheng，Chen Yuanyuan，N′Guérékata G M. Exist-

ence of positive pseudo almost periodic solutions to a class of neutral integral equations [J]. Nonlinear Anal TMA, 2011, 74(18): 7356-7364.

[8] Dads E H A, Cieutat P, Lhachimi L. Positive pseudo almost periodic solutions for some nonlinear infinite delay integral equations [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49(3): 721-739.

[9] Ezzinbi K, Hachimi M A. Existence of positive almost periodic solutions of functional equations via Hilbert's projective metric [J]. Nonlinear Anal TMA, 1996, 26(6): 1169-1176.

[10] Ding Huisheng, Liang Jin, N' Guérékata G M, et al. Existence of positive almost automorphic solutions to neutral nonlinear integral equations [J]. Nonlinear Anal TMA, 2008, 69(4): 1188-1199.

[11] Ding Huisheng, Xiao Jijun, Liang Jin. Existence of positive almost automorphic solutions to nonlinear delay integral equations [J]. Nonlinear Anal TMA, 2009, 70(6): 2216-2231.

[12] Abadias L, Lizama C. Almost automorphic mild solutions to fractional partial difference-differential equations [J]. Applicable Analysis, 2015, 95(6): 1347-1369.

[13] Zhao Jingyun, Ding Huisheng, N'Guérékata G M. S-asymptotically periodic solutions for an epidemic model with superlinear perturbation [J]. Advances in Difference Equations, 2016, 2016(1): 221.

[14] Zhang Chuangyi. Almost periodic type functions and ergodicity [M]. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[15] 郭大均. 非线性泛函分析 [M]. 2 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2001.

The Pseudo Almost Periodic Type Solutions to a Class of Nonlinear Difference Equations

JIAN Weigang[1], CHEN Yuanyuan[2]

(1. Department of Nature and Science, Yuzhang Normal University, Nanchang Jiangxi 330103, China;
2. Department of Public Education, Nanchang Institute of Technology, Nanchang Jiangxi 330044, China)

Abstract: The existence theorem of pseudo almost periodic solutions to difference equations

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha(n, n-k) f(k, x(k)) + h(n, x(n)), n \in \mathbf{Z}$$

is established, where $\alpha: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^+$, $h: \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ and $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$. In addition, in order to illustrate the four conditions in Theorem 1 that are achievable, two examples is given to point out that the studied equation is a special case of the equation.

Key words: nonlinear difference equation; pseudo almost periodic solution; pseudo almost periodic sequence; normal cone

(责任编辑: 曾剑锋)