文章编号:1000-5862(2018)01-0012-04

Blaschke 乘积 Julia 集的性质

高军杨,李婷婷
(中国矿业大学(北京)理学院,北京　100083)

摘要: 主要研究 Blaschke 乘积函数 Julia 集的动力学性质,对一类 Blaschke 乘积在参数空间中的性质给出了完备的刻画.

关键词: Blaschke 乘积; 动力学性质; Julia 集
中图分类号: O 174.5　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.01.02

0　引言及主要结论

复动力系统理论是研究复 Riemann 曲面上解析映照迭代生成的动力系统. 19 世纪 20 年代,P. Fatou 和 G. Julia 将正规族理论应用于复动力系统,创立了经典的 Fatou-Julia 理论[1-5],为复动力系统理论的形成和发展奠定了坚实的基础. 近 30 年来,复动力系统理论迅速发展[6],并应用到双曲几何、分形几何、现代分析和混沌学等众多领域中. 人们对映射在 Fatou 集和 Julia 集上的动力学性质也进行了大量研究[7-11].

本文记 D 为单位圆,∂D 为单位圆边界. 众所周知,若映射 $R(z): D \to D$ 为解析映射且为有限层的覆盖,则

$$R(z) = e^{i\theta}\prod_{i=1}^{d}\frac{z-a_i}{1-\bar{a}_i z}, |a_i| < 1, \theta \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

称 $R(z)$ 是有限 Blaschke 乘积,这里 $d \geqslant 2$,许多学者对其进行了大量研究[12-17]. 本文对有限 Blaschke 乘积的 Julia 集的性质进行了详细研究,并对一类 Blaschke 乘积在参数空间中的性质给出了完备的刻画. 主要结论如下.

定理 1(有限 Blaschke 乘积 Julia 集判别定理)　设 $R(z) = e^{i\theta}\prod_{i=1}^{d}\frac{z-a_i}{1-\bar{a}_i z}$, $d \geqslant 2$,则 $\exists z_0 \in \bar{D}$, $\bar{D} = D \cup \partial D$,满足 $R(z_0) = z_0$,有

(i) 若 $z_0 \in D$,则 z_0 为 $R(z)$ 的吸性不动点且 $J(R) = \partial D$;

(ii) 若 $z_0 \in \partial D$ 且是 $R(z)$ 的吸性不动点,则 $J(R)$ 为 ∂D 上的 Cantor 集;

(iii) 若 $z_0 \in \partial D$ 且是 $R(z)$ 的抛物不动点,当 $R''(z_0) = 0$ 时,则 $J(R) = \partial D$; 当 $R''(z_0) \neq 0$ 时,则 $J(R)$ 为 ∂D 上的 Cantor 集.

这里 $J(R)$ 是 $R(z)$ 的 Julia 集.

考虑 $a_i \in \mathbf{R}$,有下面的结论.

定理 2　设 $R(z) = \prod_{i=1}^{d}\frac{z-a_i}{1-a_i z}$,$a_i \in \mathbf{R}$ 且 $|a_i| < 1$,若 $z_0 = 1$ 是定理 1 中的抛物不动点,则 $J(R) = \partial D$.

推论 1　设 $R(z) = \prod_{i=1}^{d}\frac{z-a_i}{1-a_i z}$,$a_i \in \mathbf{R}$ 且 $|a_i| < 1$; 若 d 为偶数,则 $J(R) = \partial D$ 的充要条件为 $\sum_{i=1}^{d}\frac{1+a_i}{1-a_i} \geqslant 1$. 若 d 为奇数,则 $J(R) = \partial D$ 的充要条件为 $\sum_{i=1}^{d}\frac{1+a_i}{1-a_i} \geqslant 1$ 且 $\sum_{i=1}^{d}\frac{1-a_i}{1+a_i} \geqslant 1$.

推论 2　有理函数 $R_1(z) = e^{i\theta}\prod_{i=1}^{d}\frac{1-\bar{a}_i z}{z-a_i}$, $|a_i| < 1$, $\theta \in \mathbf{R}$,则

(i) 若 $z_0 \in \partial D$ 是 $R_1(z)$ 的吸性不动点,则 $J(R_1)$ 为 ∂D 上的 Cantor 集;

(ii) 若 $z_0 \in \partial D$ 是 $R_1(z)$ 的抛物不动点,当 $R''_1(z_0) = 0$ 时,则 $J(R_1) = \partial D$; 当 $R''_1(z_0) \neq 0$ 时,则 $J(R_1)$ 为 ∂D 上的 Cantor 集.

收稿日期:2017-07-14
基金项目:国家自然科学基金(11371363,11571049)和中央高校基本科研业务费专项基金(2009QS15)资助项目.
作者简介:高军杨(1975-),男,湖北嘉鱼人,教授,博士生导师,主要从事复动力系统及应用的研究. E-mail: gaojy@cumtb.edu.cn

考虑一类特殊的 Blaschke 乘积在参数空间中的性质.

定理 3　设 $R(z)=\dfrac{(z-c)(z-\bar{c})}{(1-\bar{c}z)(1-cz)}$，则存在 Jordan 闭曲线 $\gamma\in\Delta(0,1)$，这里 $\Delta(0,1)$ 是单位圆，使得下列成立:

(i) 若 $c\in \mathrm{int}\,\gamma$，这里 $\mathrm{int}\,\gamma$ 为曲线 γ 的有界内部区域，则 $z=1$ 是斥性不动点且 $J(R)=\partial\Delta$;

(ii) 若 $c\in\gamma$，则 $z=1$ 是抛物不动点且 $J(R)=\partial\Delta$;

(iii) 若 $c\in\Delta(0,1)/\overline{\mathrm{int}\,\gamma}$，则 $z=1$ 是吸性不动点且 $J(R)$ 为 $\partial\Delta$ 上的 Cantor 集.

推论 3　若 $R(z)=\prod\limits_{i=1}^{d}\dfrac{(z-c_i)(z-\bar{c}_i)}{(1-\bar{c}_i z)(1-c_i z)}$，则存在 Jordan 闭曲线 $\gamma\in\Delta(0,1)$，使得下列成立:

(i) 若 $c_i\in\mathrm{int}\,\gamma, i=1,2,\cdots,d$，则 1 是斥性不动点且 $J(R)=\partial\Delta$;

(ii) 若 $c_i\in\gamma$，$i=1,2,\cdots,d$，则 1 是抛物不动点且 $J(R)=\partial\Delta$;

(iii) 若 $c_i\in\Delta(0,1)/\overline{\mathrm{int}\,\gamma}, i=1,2,\cdots,d$，则 1 是吸性不动点，$J(R)$ 为 ∂D 上的 Cantor 集.

1　预备知识

定义 1　给定有理映照 $f(z)$，设点 $c\in\hat{\mathbb{C}}$，若 $f(z)$ 在 c 的任意邻域内都不是单射，则称 c 为 $f(z)$ 的临界点.

定义 2[4]　设 $f(z)$ 是 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的有理映照，其次数 $\deg f\geqslant 2$，若迭代序列 $\{f^n\}$ 在 $z_0\in\hat{\mathbb{C}}$ 的某个邻域内是正规的，则称 z_0 是 f 的正规点. f 的正规点集称为 Fatou 集，记为 $F(f)$. Fatou 集的余集称为 Julia 集，记为 $J(f)$.

定义 3[4]　设 $f(z)$ 是 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的有理映照，若存在自然数 p，使得 $f^p(z_0)=z_0$，则称 z_0 为 $f(z)$ 的周期点. 把具有上述性质的最小自然数 p 称为 z_0 的周期，称 z_0 为 p 阶周期点. 特别地，当 $p=1$ 时，称 z_0 为 $f(z)$ 的一个不动点.

定义 4[4]　设 $z_0\in\hat{\mathbb{C}}$ 为有理映照 f 的 p 阶周期点. $\lambda=(f^p)'(z_0)$ 称为 z_0 的特征值. 进一步，若 $0<|\lambda|<1$，则称 z_0 为吸性周期点; 若 $|\lambda|=0$，则称 z_0 为超吸性周期点; 若 $|\lambda|=1$，则称 z_0 为中性周期点; 若 $|\lambda|>1$，则称 z_0 为斥性周期点.

引理 1[3]　设 $\mathscr{F}$ 是区域 U 到 $\hat{\mathbb{C}}$ 的解析映照族，如果每个 $f\in\mathscr{F}$ 都不取 $\hat{\mathbb{C}}$ 内固定的 3 个不同点 a_1，a_2，a_3，则 $\mathscr{F}$ 是正规族.

引理 2[5]（Riemann-Hurwitz 公式）　设 U,V 是 $\hat{\mathbb{C}}$ 中 2 个连通区域，欧拉示性数分别为 χ_U，χ_V，f: $U\to V$ 是逆紧映照，$\deg f=k$，r 为 R 在 U 中的临界点个数，则 $\chi_U=k\chi_V-r$.

引理 3[5]　设 $f(z)$: $D\to D$ 是解析映射，则下列 2 者之一成立:

(i) f 是绕某个不动点 $z_0\in D$ 的旋转;

(ii) $f^n(z)$ 在 D 内局部一致收敛于某个 $z_0\in\bar{D}$.

引理 4[1]　设 $f(z)$ 是 $\hat{\mathbb{C}}$ 上度为 d 的有理映照，则 $f(z)$ 在 $\hat{\mathbb{C}}$ 上有且仅有 $d+1$ 个不动点.

2　定理的证明

为证明本文定理，先证明下面的 3 个引理.

引理 5　设 $R(z)$ 如(1)式定义，则 $R(z)$ 在 D 内有 $d-1$ 个临界点(计重数)，在 ∂D 上没有临界点.

证　因 $R(z)$: $D\to D$，D 的欧拉示性数 $\chi(D)=1$，记 r 为 $R(z)$ 在 D 内的临界点个数(计重数)，由引理 2 得 $r=d-1$，又

$$R(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\prod_{i=1}^{d}\frac{z-a_i}{1-\bar{a}_i z},$$

其中 $|a_i|<1,\theta\in\mathbf{R}$，则 $R'(z)=R(z)\cdot\sum\limits_{i=1}^{d}\dfrac{1-|a_i|^2}{(z-a_i)\cdot(1-\bar{a}_i z)}$，$z\neq a_i$，$\forall z\in\partial D$，$z\bar{z}=1$，有 $\sum\limits_{i=1}^{d}\dfrac{1-|a_i|^2}{(z-a_i)\cdot(1-\bar{a}_i z)}=\dfrac{1}{z}\sum\limits_{i=1}^{d}\dfrac{1-|a_i|^2}{|z-a_i|^2}$，即有 $R'(z)\neq 0$，$R(z)$ 在 ∂D 上没有临界点.

引理 6　设 $R(z)$ 如(1)式定义，若 $z_0\in\partial D$ 是周期为 k 的周期点，则 $(R^k)'(z)>0$ 且有下列结论之一成立:

(i) z_0 是 $R(z)$ 唯一的吸性或抛物不动点;

(ii) z_0 是斥性周期点.

证　设 $R(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\prod\limits_{i=1}^{d}\dfrac{z-a_i}{1-\bar{a}_i z}$，$|a_i|<1$，则

$$R'(z)=R(z)\cdot\sum_{i=1}^{d}\frac{1-|a_i|^2}{(z-a_i)\cdot(1-\bar{a}_i z)},$$

其中 $z\neq a_i$，若 $z_0\in\partial D$ 是 $R(z)$ 的不动点，则

$$R'(z_0)=R(z_0)\frac{1}{z_0}\sum_{i=1}^{d}\frac{1-|a_i|^2}{|z_0-a_i|^2}=\sum_{i=1}^{d}\frac{1-|a_i|^2}{|z_0-a_i|^2}.\tag{2}$$

$\forall k>0$，$R^k(z)$ 也是有限 Blaschke 乘积，则有 $\lambda=$

$(R^k)'(z) > 0$.

(i) 若 $\lambda \le 1$,则 z_0 是 $R(z)$ 的吸性或抛物周期点,由引理 3 知 $k = 1$ 且 z_0 是 $R(z)$ 唯一的吸性或抛物不动点;

(ii) 若 $\lambda > 1$,则 z_0 是 $R(z)$ 的斥性周期点.

引理 7 设 $R(z)$ 如(1)式定义,则 $R(z)$ 的 Julia 集 $J(R) = \partial D$ 或者 $J(R)$ 为 ∂D 上的 Cantor 集.

证 因 $R^{-1}(D) = D = R(D)$,$R^{-1}(\hat{\mathbf{C}}/\overline{D}) = \hat{\mathbf{C}}/\overline{D} = R(\hat{\mathbf{C}}/\overline{D})$,故 $J(R) \subset \partial D$.

若 $J(R) \ne \partial D$,下证 $J(R) \subset \partial D$ 为 Cantor 集,即 $J(R)$ 每个连通分支为单点.

反证,假设 $J(R)$ 有非单点连通分支 K,取 $z_0 \in K$ 及 z_0 的开邻域 $U(z_0)$,有 $U(z_0) \cap \partial D \subset K \subset J(R)$;$\forall z_1 \in \partial D / J(R)$ 并且不是例外点,$J(R) \subset \overline{\bigcup_{n \ge 0} R^{-n}(z_1)}$,存在 n_0 和 $R^{-n_0}(z_1)$ 的 1 个分支 $R_j^{-n_0}(z_1) \in U(z_0) \cap \partial D \subset J(R)$,则有 $z_1 \in R^{n_0}(J(R)) = J(R)$,即 $z_1 \in J(R)$. 矛盾,则 $J(R)$ 为 ∂D 上的 Cantor 集.

定理 1 的证明 由引理 3 知,$\exists z_0 \in \overline{D}$,使得 $R^n(z) \to z_0$,$n \to \infty$,$z \in D$,故 z_0 是 $R(z)$ 的吸性或抛物不动点.

(i) 当 $z_0 \in D$ 是 $R(z)$ 的不动点时,因 $R(z): D \to D$,由引理 1,有 $D \subset F(R)$,故 z_0 是吸性不动点,则由对称性可知 $1/\bar{z}_0$ 是吸性不动点,即 z_0 和 $1/\bar{z}_0$ 是 $R(z)$ 的 2 个吸性不动点,$R(z)$ 有 2 个吸性 Fatou 分支,且由引理 5 知每个分支内有 $d-1$ 个临界点,又 D 和 $\hat{\mathbf{C}}/\overline{D}$ 是 2 个完全不变的 Fatou 分支,则有 $J(R) = \partial D$;

(ii) 当 $z_0 \in \partial D$ 是 $R(z)$ 的吸性不动点时,有 $z_0 \in F(R)$,$J(R) \ne \partial D$,由引理 7 知 $J(R)$ 为 ∂D 上的 Cantor 集;

(iii) 当 $z_0 \in \partial D$ 是 $R(z)$ 的抛物不动点时,由引理 6 知 $R'(z_0) = 1$,又 $D \subset F(R)$,$\hat{\mathbf{C}}/\overline{D} \subset F(R)$,故 $R(z)$ 在 z_0 处至多有 2 个不变分支. 由 Fatou 花瓣定理知,当 $R''(z_0) = 0$ 时,$R(z)$ 在 z_0 处有 2 个不变 Fatou 分支,$J(R) = \partial D$;当 $R''(z_0) \ne 0$ 时,$R(z)$ 在 z_0 处只有 1 个不变的 Fatou 分支,则由引理 7 知 $J(R)$ 为 ∂D 上的 Cantor 集.

定理 1 的应用 设 $R(z)$ 如(1)式定义,$R(z)$ 存在吸性不动点或在 ∂D 上存在 1 个抛物不动点且 $J(R) = \partial D$ 的应用很多[3],下面给出在 ∂D 上存在 1 个抛物不动点,且 $J(R)$ 为 ∂D 上的 Cantor 集的 1 个 Blaschke 乘积.

例 1 设 $R(z) = ((z - \mathrm{i}\sqrt{2}/2)/(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}z/2)) \cdot ((z - 1/5 + \mathrm{i}2\sqrt{2}/5)/(1 - (1/5 + \mathrm{i}2\sqrt{2}/5)z))$.

计算可得 $R(1) = 1$ 且 $R'(1) = 1$,即 1 为 $R(z)$ 的抛物不动点,又 $R''(1) \ne 0$,由定理 1 即知 $R(z)$ 在不动点 $z_0 = 1$ 处只有 1 个抛物不变花瓣,则 $J(R)$ 为 ∂D 上的 Cantor 集.

定理 2 的证明 由引理 4 知 $R(z)$ 有 $d+1$ 个不动点. 由 $R'(1) = 1$ 可得 $a_i \in (-1,0)$.

当 d 为奇数时,$R(-1) = -1$,由

$$R'(-1) = \sum_{i=1}^{d} \frac{1 - a_i^2}{(1 + a_i)^2} > \sum_{i=1}^{d} \frac{1 - a_i^2}{(1 - a_i)^2} = R'(1) = 1$$

得 $z_0 = -1$ 为 $R(z)$ 的斥性不动点,则一定有 1 为 2 重或者 3 重抛物不动点,事实上,-1 是 1 重不动点,若 $R(z)$ 有不动点 z_0,则当 $z_0 \notin \mathbf{R}$ 时,有 $\bar{z}_0$ 也是 $R(z)$ 的不动点;当 $z_0 \in (-1,1)$ 时,有 $1/z_0$ 也是 $R(z)$ 的不动点,即除不动点 ± 1 外的其他不动点成对出现,由引理 4 知 $R(z)$ 有 $d+1$(偶数)个不动点,故 1 为 $R(z)$ 的 3 重抛物不动点,即 $R(z)$ 在点 1 有 2 个抛物不变的花瓣,而 D 和 $\hat{\mathbf{C}}/\overline{D}$ 是 2 个完全不变的 Fatou 分支,由定理 1 知 $J(R) = \partial D$.

当 d 为偶数时,$R(-1) = 1$,$R(z)$ 有奇数个不动点,1 为抛物不动点,类似于上面的分析,不动点 1 为 3 重抛物不动点. 故 $J(R) = \partial D$.

推论 1 的证明 (i) 若 d 为偶数,$R(z)$ 有奇数个不动点,又 $R(1) = 1$,由引理 6 证明中的(2)式知

$$R'(1) = \sum_{i=1}^{d} \frac{1 - a_i^2}{(1 - a_i)^2} = \sum_{i=1}^{d} \frac{1 + a_i}{1 - a_i},$$

即若 1 为斥性不动点,有 $\sum_{i=1}^{d} \frac{1 + a_i}{1 - a_i} > 1$,若 $R(z)$ 在 D 有不动点 z_0,则由对称性可知在 $\hat{\mathbf{C}}/\overline{D}$ 有 $1/\bar{z}_0$ 也是 $R(z)$ 的不动点. 又由 $a_i \in \mathbf{R}$ 知,若 $R(z)$ 有不动点 z_0,$z_0 \notin \mathbf{R}$,则 $\bar{z}_0$ 也是 $R(z)$ 的不动点,即有 D 和 $\hat{\mathbf{C}}/\overline{D}$ 上的不动点在实轴上. 由引理 3 知 ∂D 上不存在吸性和抛物不动点,则 $\exists z_0 \in (-1,1)$,$R(z_0) = z_0$ 且 $R(1/z_0) = 1/z_0$,由定理 1 有 z_0 和 $1/z_0$ 分别为 D 和 $\hat{\mathbf{C}}/\overline{D}$ 上的吸性不动点,则 $J(R) = \partial D$.

若 1 为中性不动点,有 $\sum_{i=1}^{d} \frac{1 + a_i}{1 - a_i} = 1$,由引理 6 证明中的(2)式知 $R'(1) = 1$,由定理 2 得 $J(R) = \partial D$.

若 1 为吸性不动点，有 $\sum_{i=1}^{d}\frac{1+a_i}{1-a_i}<1$，由定理 1 知 $J(R)$ 为 ∂D 上的 Cantor 集.

(ii) 若 d 为奇数，$R(z)$ 有偶数个不动点，$R(1)=1$，$R(-1)=-1$，$R'(-1)=\sum_{i=1}^{d}\frac{1-a_i}{1+a_i}$.

由定理 2，类似于上面分析可知，若点 1 为斥性不动点，有 $\sum_{i=1}^{d}\frac{1+a_i}{1-a_i}>1$，当且仅当 -1 为斥性或抛物不动点，即当 $\sum_{i=1}^{d}\frac{1-a_i}{1+a_i}\geqslant 1$ 时，有 $J(R)=\partial D$.

若 1 为中性和抛物不动点时，证明与当 d 为偶数时相同.

综上，若 d 为偶数时，当且仅当 1 为斥性或抛物不动点，即当 $\sum_{i=1}^{d}\frac{1+a_i}{1-a_i}\geqslant 1$ 时，有 $J(R)=\partial D$. 若 d 为奇数时，当且仅当 1 为斥性不动点且 -1 为斥性或抛物不动点，或 1 为抛物不动点，即当 $\sum_{i=1}^{d}\frac{1+a_i}{1-a_i}\geqslant 1$ 且 $\sum_{i=1}^{d}\frac{1-a_i}{1+a_i}\geqslant 1$ 时，有 $J(R)=\partial D$. 命题得证.

注 1　推论 2 的证明与定理 1 中 (ii)、(iii) 证明类似.

定理 3 的证明　易见 $R(1)=1$，即 $z=1$ 是 $R(z)$ 的不动点. 又

$$R'(z)=R(z)\left(\frac{1-|c|^2}{(z-c)(1-\bar{c}z)}+\frac{1-|\bar{c}|^2}{(z-\bar{c})(1-cz)}\right)$$

且 $|c|<1$，则有 $R'(1)=2(1-|c|^2)/[(1-c)(1-\bar{c})]>0$.

(i) 假设 1 是斥性不动点，则有 $R'(1)=2(1-|c|^2)/[(1-c)(1-\bar{c})]>1$，不妨设 $c=x+\mathrm{i}y$，得

$$2(1-(x^2+y^2))>1-2x+(x^2+y^2).$$

令 γ: $3(x^2+y^2)-2x=1$，即得曲线 $3(x^2+y^2)-2x<1$ 在 γ 内部，即证存在曲线 γ，若 $c\in\operatorname{int}\gamma$，有 $R'(1)>1$，1 是斥性不动点. 又 $R(z)$ 的不动点在实轴上，故一定存在一个不动点 $x_0\in(-1,1)$，由定理 1 知 x_0 是一个吸性不动点，且由对称性知 $1/x_0$ 也是吸性不动点. 由定理 1 即知 $J(R)=\partial\Delta$.

(ii) 若 $c\in\gamma$，由 (1) 式得 $3(x^2+y^2)-2x=1$，则 $R'(1)=2(1-|c|^2)/[(1-c)(1-\bar{c})]=1$，1 是抛物不动点，由定理 2 可知 1 是 3 重抛物不动点，即有 $J(R)=\partial\Delta$.

(iii) 若 $c\in\Delta(0,1)/\overline{\operatorname{int}\gamma}$，由 (1) 式得 $3(x^2+y^2)-2x>1$，则 $R'(1)=2(1-|c|^2)/[(1-c)(1-\bar{c})]<1$，1 是吸性不动点，由定理 1 知 $J(R)$ 为 $\partial\Delta$ 上的 Cantor 集.

注 2　推论 3 的证明与定理 3 相同，可得 γ: $(1+2d)(x^2+y^2)-2x=2d-1$.

3　参考文献

[1] Beardon A F. Iteration of rational functions [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

[2] Carleson L, Gamelin T. Complex dynamics [M]. New York: Spring-Verlag, 1992.

[3] 任福尧. 复解析动力系统 [M]. 上海: 复旦大学出版社, 1997.

[4] 乔建永. 重整化变换的复动力学 [M]. 北京: 北京科学出版社, 2010.

[5] Milnor J. Dynamics in one complex variable [M]. Braun Schweig: Vieweg Verlag, 1999.

[6] 蔡克聚，陈传成. 复解析动力系统发展概况 [J]. 数学进展, 1994, 23(1): 1-24.

[7] 高军杨，马庆文. 涉及重整化变换的有理函数的 Fatou 集 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2014, 38(4): 395-398.

[8] Zakeri S. On critical points of proper holomorphic maps on the unit disk [J]. Bull Lond Math Soc, 1998, 30(1): 62-66.

[9] Beardon A F. The component sofa Julia set [J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A, I Math, 1991: 16(1): 173-177.

[10] 翟羽. Julia 集为 Cantor 集的有理函数的动力系统 [D]. 杭州: 浙江大学, 2008.

[11] 杨卫锋，李颖，龚志民. 有限个有理函数的随机复动力系统的 Julia 集 [J]. 数学进展, 2004, 33(4): 447-452.

[12] Basallote M, Contreras M D. Commuting finite Blaschke products with no fixed points in the unit disk [J]. J Math Anal Appl, 2009, 359(2): 547-555.

[13] Daepp U, Gorkin P. Decomposing finite Blaschke products [J]. J Math Anal Appl, 2015, 426(2): 1201-1216.

[14] Colwell P, Rudin W. Blaschke products: bounded analytic functions [J]. Am Math Mon, 1987, 94(3): 311.

[15] Cowen C C. Finite Blaschke products as compositions of other finite Blaschke products [J]. Mathematics, 2012, arXiv: 1207.4010v1.

[16] Daepp U, Gorkin P, Voss K. Poncelet′s theorem, Sendov′s conjecture and Blaschke products [J]. J Math Anal Appl, 2010, 365(1): 93-102.

[17] Singer D A. The location of critical points of finite Blaschke products [J]. Conform Geom Dyn, 2013, 10(6): 117-124.

(下转第 37 页)

digm of the multinational enterprise [J]. Asia Pacific Journal of Management，2008，25(4)：573-593.

[18] North D C. Structure and change in economic history [M]. New York：W W Norton Co，1981.

[19] Ang S H，Benischke M H，Doh J P. The interactions of institutions on foreign market entry mode [J]. Strategic Management Journal，2015，36(10)：1536-1553.

[20] 聂爱云，陆长平. 制度约束、外商投资与产业结构升级调整：基于省际面板数据的实证研究 [J]. 国际贸易问题，2012(2)：136-145.

[21] 樊纲，王小鲁，朱恒鹏. 中国市场化指数：各地区市场化相对进程 2011 年报告 [M]. 北京：经济科学出版社，2011.

[22] Wooldridge J M. Econometric analysis of cross section and panel data [M]. London：MIT Press，2003：352-356.

[23] 聂爱云，陆长平. OFDI、市场分割与国际贸易：基于中国省级面板数据的实证研究 [J]. 中南财经政法大学学报，2016，215(2)：115-121.

The Institutional Cost and the Trade Effect of OFDI

——Empirical Research Based on Chinese Provincial Panel Data

NIE Aiyun[1]，HE Xiaogang[2]， HUANG Ruojia[3]，HUA Mengqing[2]

(1. College of Political Science and Law，Jiangxi Normal University，Nanchang Jiangxi 330022，China;
2. Institute of Industrial Economics，Jiangxi University of Finance and Economics，Nanchang Jiangxi 330013，China;
3. School of Economics and Management，Nanjing University of Science and Technology，Nanjing Jiangsu 210094，China)

Abstract: The specific impact mechanism and effecthow the institutional costs influence OFDI investment motive，reverse spillover effect and how the institutional cost influence the trade effect of OFDI are discussed through combining the OFDI investment motivation theory，reverse spillover theory and institutional environment into a unified analysis framework from the angel of home country institutional environment. Furthermore，an empirical test on the above mechanism is analyzed by using China´s provinces panel data from 2003 to 2010. The estimation results show that the trade effect of OFDI f is no longer positive，or even to turn into a significant negative effect under the condition of controlling the degree of marketization. It is shown that the home country´s reverse spillover effect and the trade effect of OFDI have the significant effect of "institution threshold" characteristic. The trade effect of OFDI on the home country is implemented by the local institutional quality improved. There will be a remarkable increase of trade effect of OFDI with the improvement of regional marketization. It is also shown that the improvement of the regional institutional quality is the key to promote the positive interaction between the opening and the domestic economy.

Key words: institution cost; OFDI; trade effect; effect of institution threshold

（责任编辑：曾剑锋）

（上接第 15 页）

Some Properties of Julia Sets of Blaschke Products

GAO Junyang，LI Tingting

(School of Science，China University of Mining and Technology(Beijing)，Beijing 100083，China)

Abstract: The properties of Julia sets of Blaschke product function are mainly studied. A complete characterization of the properties of a class of Blaschke products in parameter spaces is given.

Key words: Blaschke product; dynamical properties; Julia set

（责任编辑：王金莲）