文章编号:1000-5862(2018)01-0016-03

弱压缩多值映射的公共不动点定理

任琛琛,李　璐
(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌　330022)

摘要:在完备的度量空间中,利用泛函分析和集值映射的理论工具,研究了已有文献提出的一个问题并给出了正面回答,即建立了满足 φ-弱压缩性质的 2 个多值映射的公共不动点定理,把公共不动点定理推广到了 2 个多值映射.

关键词:多值映射;不动点定理;φ-弱压缩映射.
中图分类号:O 177.91　　文献标志码:A　　DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.01.03

0　引言

多值映射的不动点定理已经在许多文献中被广泛地讨论[1-15]. 特别地,文献[1]研究了满足广义 φ-弱压缩的 2 个映射的公共不动点定理;文献[2]讨论了满足 $H(Tx,Ty) \leqslant \alpha N(x,y)$ 的多值映射的不动点定理.

本文记 (X,d) 是一个度量空间,$C_B(X)$ 是 X 中的一切非空有界闭子集的集合. 记 H 为由 d 诱导的 Hausdorff 度量,在很多关于多值映射的不动点定理的研究中都利用了这种度量[1-4]:$\forall A,B \in C_B(X)$,$H(A,B) = \max\{\sup\limits_{b\in B} d(b,A),\sup\limits_{a\in A} d(a,B)\}$,其中 $d(x,A) = \inf\limits_{a\in A} d(x,a)$.

定义 1[2]　设 $T: X \to C_B(X)$ 是 1 个映射,若存在一个函数 $\varphi: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 满足 $\varphi(0) = 0$ 且 $\forall t > 0$ 有 $\varphi(t) > 0$,使得
$$H(Tx,Ty) \leqslant d(x,y) - \varphi(d(x,y)),\forall x,y \in X,$$
则称 T 为 φ-弱压缩映射.

文献[1]拓展了上述定义,给出了 2 个映射的广义 φ-弱压缩的概念.

定义 2[1]　设 $T,S: X \to C_B(X)$ 是 2 个映射,若存在一个函数 $\varphi: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 满足 $\varphi(0) = 0$ 且 $\forall t > 0$ 有 $\varphi(t) > 0$,使得
$$H(Tx,Sy) \leqslant M(x,y) - \varphi(M(x,y)),\forall x,y \in X,$$
其中 $M(x,y) = \max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Sy),[d(x,Sy) + d(y,Tx)]/2\}$,则称 T,S 是广义 φ-弱压缩映射.

引理 1[1]　设 (X,d) 是一个完备的度量空间,$T: X \to X$ 且 $S: X \to C_B(X)$,有
$$H(\{Tx\},Sy) \leqslant M(x,y) - \varphi(M(x,y)),\forall x,y \in X,$$
其中 $\varphi: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 是下半连续,$\varphi(0) = 0$,且对一切 $t > 0$ 有 $\varphi(t) > 0$,则存在唯一的点 $x \in X$,有 $x = Tx$ 且 $x \in Sx$.

在引理 1 所讨论的映射中一个为多值映射,另一个为单值映射. 因此文献[1]提出了下述问题:2 个广义 φ-弱压缩多值映射是否有类似于引理 1 的公共不动点定理?本文主要探讨上述问题,并给出了一个正面回答.

在证明主要定理之前,首先介绍一个引理.

引理 2[5]　若 $A,B \in C_B(X)$ 且 $a \in A$,则 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists b \in B$,使得 $d(a,b) \leqslant H(A,B) + \varepsilon$.

1　主要结果及证明

定理 1　设 (X,d) 是一个完备的度量空间,$T,S: X \to C_B(X)$,有
$$H(Tx,Sy) \leqslant M(x,y) - \varphi(M(x,y)),\forall x,y \in X, \quad (1)$$
其中 $\varphi: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 是下半连续,$\varphi(0) = 0$,且对一切 $t > 0$ 有 $\varphi(t) > 0$,则存在唯一的点 $x \in X$ 使得 $x \in Tx$ 且 $x \in Sx$.

证　若 $\exists x,y \in X$ 使得 $M(x,y) = 0$,则显然 $x = y$ 是 T 和 S 的一个公共不动点.

下面假设 $\forall x,y \in X$ 有 $M(x,y) \neq 0$. 任取 $x_0 \in$

收稿日期:2017-06-10
基金项目:江西省自然科学基金重大课题(20143ACB21001)资助项目.
作者简介:任琛琛(1980-),女,江西九江人,讲师,主要从事泛函分析、代数几何等理论的研究. E-mail:nihal524@163.com

X 和 $x_1 \in Sx_0$,由引理 2 知

$\exists x_2 \in Tx_1, d(x_2,x_1) \leqslant H(Tx_1,Sx_0) + \frac{1}{2}\varphi(M(x_1,x_0))$,

$\exists x_3 \in Sx_2, d(x_3,x_2) \leqslant H(Sx_2,Tx_1) + \frac{1}{2}\varphi(M(x_1,x_2))$,

依此类推可通过引理 2 找到序列$\{x_n\}$满足

$$x_{2n+1} \in Sx_{2n}, d(x_{2n+1},x_{2n}) \leqslant H(Sx_{2n},Tx_{2n-1}) + \varphi(M(x_{2n-1},x_{2n}))/2, \tag{2}$$

$$x_{2n+2} \in Tx_{2n+1}, d(x_{2n+2},x_{2n+1}) \leqslant H(Tx_{2n+1},Sx_{2n}) + \varphi(M(x_{2n+1},x_{2n}))/2, \tag{3}$$

接下来分 3 步来证明定理 1.

(i) 先证$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x_{n+1}) = 0$. 通过(1)式和(2)式有

$$d(x_{2n},x_{2n+1}) \leqslant H(Tx_{2n-1},Sx_{2n}) + \varphi(M(x_{2n-1},x_{2n}))/2 \leqslant M(x_{2n-1},x_{2n}) - \varphi(M(x_{2n-1},x_{2n}))/2. \tag{4}$$

又

$$d(x_{2n-1},x_{2n}) \leqslant M(x_{2n-1},x_{2n}) = \max\{d(x_{2n-1},x_{2n}), d(x_{2n-1},Tx_{2n-1}), d(x_{2n},Sx_{2n}), [d(x_{2n-1},Sx_{2n}) + d(x_{2n},Tx_{2n-1})]/2\} \leqslant \max\{d(x_{2n-1},x_{2n}), d(x_{2n-1},x_{2n}), d(x_{2n},x_{2n+1}), [d(x_{2n-1},x_{2n+1}) + 0]/2\} = \max\{d(x_{2n-1},x_{2n}), d(x_{2n},x_{2n+1})\}, \tag{5}$$

则

$$d(x_{2n},x_{2n+1}) \leqslant d(x_{2n-1},x_{2n}). \tag{6}$$

若 $d(x_{2n-1},x_{2n}) \leqslant d(x_{2n},x_{2n+1})$,则由(4)式与(5)式可以得到 $d(x_{2n},x_{2n+1}) \leqslant d(x_{2n},x_{2n+1}) - \varphi(d(x_{2n},x_{2n+1}))/2$,即 $\varphi(d(x_{2n},x_{2n+1})) \leqslant 0$,这与 φ 的定义矛盾. 同时利用(5)式与(6)式可得 $M(x_{2n-1},x_{2n}) = d(x_{2n-1},x_{2n})$.

同理,由(1)式和(3)式可得

$$d(x_{2n+1},x_{2n+2}) \leqslant d(x_{2n},x_{2n+1}). \tag{7}$$

由(6)式和(7)式可知,$d(x_k,x_{k+1}) \leqslant d(x_{k-1},x_k)$,$\forall k \in \mathbf{N}$. 所以$\{d(x_k,x_{k+1})\}$是单调递减且有下界的序列,故 $\exists r \geqslant 0$,有$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x_{n+1}) = r$,$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_{2n-1},x_{2n}) = \lim\limits_{n\to\infty}M(x_{2n-1},x_{2n}) = r$. 又由于 φ 是下半连续,则 $\varphi(r) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty}\varphi(M(x_{2n-1},x_{2n}))$,故由(5)式可知 $r \leqslant r - \varphi(r)/2$,即 $\varphi(r) = 0$,所以 $r = 0$.

(ii) 再证$\{x_n\}$是柯西列. 类似于文献[1]可得$\{x_n\}$是有界数列. 令 $P_n = \sup\{d(x_i,x_j): i,j \geqslant n\}$,显然$\{P_n\}$是递减的,则必定 $\exists P \geqslant 0$ 使得$\lim\limits_{n\to\infty}P_n = P$,只需证 $P = 0$ 即可.

由 $\forall k \in \mathbf{N}$,$\exists n(k), m(k) \in \mathbf{N}$ 有 $m(k) > n(k) \geqslant k$ 且 $P_k - 1/k \leqslant d(x_{m(k)},x_{n(k)}) \leqslant P$ 可得 $\lim\limits_{k\to\infty}d(x_{m(k)},x_{n(k)}) = P$. 由(i)可得

$$\lim_{k\to\infty}d(x_{m(k)+1},x_{n(k)+1}) = \lim_{k\to\infty}d(x_{m(k)+1},x_{n(k)}) = \lim_{k\to\infty}d(x_{m(k)},x_{n(k)+1}) = P.$$

$\forall k \in \mathbf{N}$,不妨设 $m(k)$ 是奇数,$n(k)$ 是偶数,

$d(x_{m(k)},x_{n(k)}) \leqslant M(x_{m(k)},x_{n(k)}) = \max\{d(x_{m(k)},x_{n(k)}), d(x_{m(k)},Tx_{m(k)}), d(x_{n(k)},Sx_{n(k)}), [d(x_{m(k)},Sx_{n(k)}) + d(x_{n(k)},Tx_{m(k)})]/2\} \leqslant \max\{d(x_{m(k)},x_{n(k)}), d(x_{m(k)},x_{m(k)+1}), d(x_{n(k)},x_{n(k)+1}), [d(x_{m(k)},x_{n(k)+1}) + d(x_{n(k)},x_{m(k)+1})]/2\}$,

这个不等式可以说明$\lim\limits_{k\to\infty}M(x_{m(k)},x_{n(k)}) = P$. 由(1)式得

$d(x_{m(k)+1},x_{n(k)+1}) \leqslant H(Tx_{m(k)},Sx_{n(k)}) + \varphi(M(x_{m(k)} + x_{n(k)}))/2 \leqslant M(x_{m(k)},x_{n(k)}) - \varphi(M(x_{m(k)},x_{n(k)}))/2$,

因为 φ 是下半连续,故 $P \leqslant P - \varphi(P)/2$,即 $\varphi(P) = 0$,所以 $P = 0$. 因此$\{x_n\}$是柯西列.

(iii) 最后证 T 和 S 有一个公共不动点. 因为 (X,d) 是一个完备的度量空间且$\{x_n\}$是柯西列,则 $\exists x \in X$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = x$. 由(1)式可得

$d(x_{2n+2},Sx) \leqslant H(Tx_{2n+1},Sx) \leqslant M(x_{2n+1},x) - \varphi(M(x_{2n+1},x))$,$\forall n \in \mathbf{N}$,

则 $d(x_{2n+2},Sx) < M(x_{2n+1},x)$,故有

$$d(x,Sx) \leqslant \lim_{n\to\infty}M(x_{2n+1},x). \tag{8}$$

然而,

$M(x_{2n+1},x) = \max\{d(x_{2n+1},x), d(x_{2n+1},Tx_{2n+1}), d(x,Sx), [d(x_{2n+1},Sx) + d(x,Tx_{2n+1})]/2\} \leqslant \max\{d(x_{2n+1},x), d(x_{2n+1},x_{2n+2}), d(x,Sx), [d(x_{2n+1},Sx) + d(x,x_{2n+2})]/2\}$,

所以

$$\lim_{n\to\infty}M(x_{2n+1},x) \leqslant d(x,Sx). \tag{9}$$

由(8)式和(9)式知$\lim\limits_{n\to\infty}M(x_{2n+1},x) = d(x,Sx)$.

因为 φ 是下半连续且(7)式成立,易证$d(x,Sx) = 0$. 由于 $Sx \in C_B(X)$,则 $x \in Sx$. 同时,

$$d(Tx,x) \leqslant H(Tx,Sx) \leqslant M(x,x) - \varphi(M(x,x)), \tag{10}$$

其中 $M(x,x) = \max\{d(x,x), d(x,Tx), d(x,Sx), [d(x,Sx) + d(x,Tx)]/2\} = d(x,Tx)$,由(10)式可知 $\varphi(d(Tx,x)) = 0$,则 $d(Tx,x) = 0$. 由于 $Tx \in C_B(x)$,则 $x \in Tx$.

2　结论

本文通过利用泛函分析和集值映射的理论工具,对文献[1]提出的一个问题给出了正面回答,即对于 2 个广义 φ-弱压缩多值映射,引理 1 的推广形式仍然成立. 定理 1 中弱下半连续性的条件是否可以减弱或者去掉,是今后值得研究的一个课题. 对于半度量空间、广义度量空间以及锥度量空间,本文的

结果是否成立?也是值得进一步系统探讨的问题.

3 参考文献

[1] Rouhani B D,Moradi S. Common fixed point of multivalued generalized-weak contractive mapping [J]. Fixed Point Theory and Applications,2010,2010(1):1-13.

[2] Daffer P Z,Kaneko H. Fixed points of generalized contractive multi-valued mappings [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1995,192(2):655-666.

[3] Abbas M,Rhoades B E,Nazir T. Common fixed points of generalized contractive multivalued mappings in cone metric spaces [J]. Mathematical Commmunication,2009,14(2):365-378.

[4] Cho S H,Kim M S. Fixed point theorems for general contractive multivalued mappings [J]. J Appl Math Informatics,2009,27(1/2):343-350.

[5] Kiran Q,Kamran T. Fixed point theorems for generalized contractive multi-valued maps [J]. Computers and Mathematics with Applications,2010,59(12):3813-3823.

[6] Abkar A,Eslamian M. Fixed point theorems for Suzuki generalized nonexpansive multivalued mappings in Banach spaces [J]. Fixed Point Theory and Applications,2010,2010(2):1-10.

[7] Zhang Xian. Fixed point theorems of multivalued monotone mapping in ordered metric spaces [J]. Computers and Mathematics with Applications,2010,23(3):235-240.

[8] Chifu C,Petrusel G. Existence and data dependence of fixed points and strict fixed points for contractive-type multivalued operators [J]. Fixed Point Theory and Applications,2007,2007(1):1-8.

[9] Assad N A,Kirk W A. Fixed point theorems for set-valued mappings of contractive type [J]. Pacific Journal of Mathematics,1972,43(3):553-562.

[10] 甘会林. 整函数差分的零点和不动点 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2015,39(5):519-521.

[11] 金瑾. 单位圆内高阶齐次线性微分方程解与不动点的研究 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(4):406-410.

[12] 李效敏,仪洪勋,张学. 涉及复合亚纯函数和不动点的亚纯函数的正规族 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2016,40(6):578-586.

[13] 王金明,郑雄军. 半序空间混合单调算子的耦合不动点定理及其应用 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2014,38(3):240-243.

[14] Zhao Jingyun,Ding Huisheng,N´Guérékata G M. Positive almost periodic solutions to integral equations with superlinear perturbations via a new fixed point theorem in cones [J]. Electron J Differential Equations,2017,2017(2):1-10.

[15] Ding Huisheng,Ozturk Vi,Radenović S. On some new fixed point results in b-rectangular metric spaces [J]. J Nonlinear Sci Appl,2015,8(4):378-386.

The Common Fixed Point Theorem for Multivalued Weak Contractive Mappings

REN Chenchen, LI Lu

(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: In the complete metric space,a problem posed by the literature and a positive answer is given using the theoretical tods of functional analysis and set-valued mapping. The common fixed point theorem of two multivalued generalized φ-weak contractive mappings is established. This theorem is a generalization of the common fixed point theorem for two multi-valued maps.

Key words: multivalued mappings; fixed point theorem; φ-weak contractive mappings

(责任编辑:曾剑锋)