文章编号:1000-5862(2018)01-0019-04

基于 Copula 相依模型的指数保费预测

杜梦颖,章 溢,温利民*
(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:指数保费原理是非寿险精算中的一种重要保费原理,在理论和实际中都有重要应用. 然而,大部分关于指数保费的统计推断文献都假设风险是相互独立或条件独立的,这种独立性在实际中并不一定成立. 基于 Copula 相依模型,给出了指数保费的预测,并讨论了保费预测的性质. 最后给出了在 Calyton Copula 模型下指数保费预测公式.

关键词:相依风险;指数保费原理; Copula 函数;Calyton Copula
中图分类号:O 212.7 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.01.04

0 引言

保费厘定是精算师通过科学分析风险的可能损失并对之制定合理价格的过程. 科学合理的保费制定有利于保险公司财务的稳定,有利于提高保险公司的核心竞争力[1]. 在寿险精算领域中,常用的保费原理包括净保费原理、期望值原理、方差保费原理、标准差保费原理等. 注意到这些保费原理仅仅依赖于风险随机变量的前 2 阶矩,而与风险的具体分布无关. 然而,在实际中,非寿险的风险常常呈现厚尾的性质,风险分布的前 2 阶矩无法完全刻画风险的厚尾性. 为此,H. U. Gerber[2] 提出指数保费原理,定义为

$$H(X)=\frac{1}{\alpha}\log[E(e^{\alpha X})],\alpha>0,$$

其中 $\alpha>0$ 为已知参数,而 $F(x)$ 为 X 的分布函数.

指数保费原理满足非负安全负荷性、独立风险可加性、随机序的单调性、正齐次性、转移不变性等性质,因此它是非寿险精算中最常用的保费原理之一. 指数保费原理在实际中得到广泛运用,在理论上也得到详细研究[2-4].

然而,在实际运用中指数保费 $H(X)$ 依赖于风险的分布 $F(x)$,而分布函数 $F(x)$ 往往是未知的. 这里一般假设对风险 X 具有 n 年的观测值 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,并根据观测值估计或预测未来的保费 $H(X_{n+1})$. 在传统的数理统计中,常常假设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,进而对 $H(X_{n+1})$ 进行估计或预测. 但在实际运用中,这种独立性假设有时是不成立的,有时可能只是近似地成立,从而所得结论与复杂的风险实际是不相符的. 事实上,存在许多保险场合,使得保险合同之间的索赔具有某种相依性. 在精算学中,已经有许多文献研究了相依风险在各种保险定价中的应用[5-6]. 为了解决风险之间的相依性问题,H. Bühlmann[7] 引入贝叶斯模型. 在贝叶斯模型中,假设 X 的分布依赖于某个风险参数 θ,由于风险的非齐次性,假设风险参数 θ 本身是随机变量,具有先验分布 $\pi(\theta)$. 此时将样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 看成是在 θ 给定下条件独立同分布的样本. H. Bühlmann[7] 将保费的预测限定在样本的线性函数下,从而得到常用的信度保费预测公式为

$$\hat{X}_{n+1}=Z\overline{X}+(1-Z)\mu.$$

Pan Maolin 等[8] 在此基础上进行了研究;Wen Limin 等[9] 在指数保费原理下对信度保费进行了研究. 注意到,在贝叶斯模型中样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 都依赖于随机风险参数 θ,从而具有一定的相依性. 但这种相依性仅仅是一种等相依性,只能刻画一部分现实情况.

在现代精算理论中,研究者一致认为连接函数(Copula)是度量相依风险的最有效工具. 根据 Sklar 定理,多个风险之间的相依性可以完全由 Copula 函数来刻画,而不依赖于单个风险的边际分布,关于 Copula 的详细介绍可参见文献[10]. 近年来,已有不少学者引进 Copula 函数来研究保费定价及风险管理模型. E. W. Frees 等[11] 将 Copula 函数引入时间分量来度量时间效应上的相依性,建立了时间分

收稿日期:2017-08-06
基金项目:国家自然科学基金(71361015)和江西省自然科学基金青年重点课题(S2017QNZDB0027)资助项目.
通信作者:温利民(1978-),男,江西石城人,教授,博士,主要从事精算学的研究. E-mail:wlmjxnu@163.com

量的 Copula 信度模型. 吴吉林等[12] 研究了时变混合 Copula 模型的非参数统计推断问题.

基于以上的研究,提出利用 Copula 函数来刻画索赔样本之间的相依性,从而推导未来保费在指数保费原理下的保费预测公式,并探讨相关的统计性质.

1 相依风险模型下指数保费的最优预测

记 $\chi = \{X: X$ 为非负随机变量,且 $\exists t_0 > 0$, $M_X(t_0) < \infty\}$ 表示可保风险随机变量的集合,则当 $0 < \alpha < t_0$ 时,指数保费 $H(X) = \log[E(e^{\alpha X})]/\alpha$ 是存在的. 因此本文均假设 $0 < \alpha < t_0$.

命题 1 若对风险 X 取决策函数 $\delta(X)$,且取指数损失函数为

$$L(X,P) = (\exp(\alpha X) - \exp(\alpha P))^2, \qquad (1)$$

则最小化 $\min\limits_{\delta} E[\exp(\alpha X) - \exp(\alpha\delta))^2]$,最优决策函数 $\delta^*(X) = \log[E(e^{\alpha X})]/\alpha$ 为指数保费.

证 令 $\Phi = E[\exp(\alpha X) - \exp(\alpha\delta))^2]$,关于 Φ 对 δ 求导,并令导数为 0 即可得到

$$\delta^*(X) = \log[E(e^{\alpha X})]/\alpha.$$

易证指数保费 $H(x) = \log[E(e^{\alpha X})]/\alpha$ 是 α 的增函数,且 $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} H(X) = E(X)$. 另外,易证指数保费满足风险度量的一致性公理,关于指数保费原理的相关讨论可参见文献[13-15].

一般地,指数保费 $H(X)$ 是未知的,需要根据已有的样本信息进行估计. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}$ 为风险 X 的若干次索赔,其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是已经观测到的索赔样本,而 X_{n+1} 是未来的索赔,需要根据已有的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 进行预测.

为了得到指数保费 $H(X_{n+1})$ 的预测,考虑

$$H(X_{n+1}) = H(X) = \log[E(e^{\alpha X})]/\alpha = \log[\int e^{\alpha X} dF(x)]/\alpha.$$

在经典的统计学中,样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立且具有与总体相同的分布,这时经验分布函数 $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} I(X_i \leqslant x)$ 是总体分布函数 $F(x)$ 的无偏相合估计,因此容易得到 $H(X_{n+1})$ 的一个估计为

$$\hat{H}(X_{n+1}) = \frac{1}{\alpha}\log[\int e^{\alpha X} dF_n(x)] = \frac{1}{\alpha}\log\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha X_i}\Big). \qquad (2)$$

命题 2 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 X 的简单随机样本,则(2)式是 $H(X_{n+1})$ 的强相合估计,且当 $n\to\infty$ 时,$\hat{H}(X_{n+1})$ 是渐近正态的,即有

$$\sqrt{n}[\hat{H}(X_{n+1}) - H(X_{n+1})] \xrightarrow{L} N(0,\sigma^2(\alpha)),$$

其中 $\sigma^2(\alpha) = (M_X(2\alpha) - M_X^2(\alpha))/[\alpha^2 M_X^2(\alpha)]$ 是渐近方差.

证 记 $Y_i = e^{\alpha X_i}$,因此 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 独立同分布,且 $EY_1 = E(e^{\alpha X_1}) = M_X(\alpha)$. 根据独立同分布的中心极限定理有

$$\sqrt{n}[\bar{Y} - M_X(\alpha)] \xrightarrow{L} N(0, M_X(2\alpha) - M_X^2(\alpha)).$$

令 $g(x) = (\log x)/\alpha$,则 $g(M_X(\alpha)) = \log M_X(\alpha)/\alpha$. 因此,根据 Crámer 定理可得

$$\sqrt{n}[g(\bar{Y}) - g(M_X(\alpha))] \xrightarrow{L} N(0, [g'(M_X(\alpha))]^2 \cdot (M_X(2\alpha) - M_X^2(\alpha))),$$

即 $\sqrt{n}[\hat{H}(X_{n+1}) - H(X_{n+1})] \xrightarrow{L} N(0,\sigma^2(\alpha))$.

在风险管理的实际运用中,风险 X 在不同年的观测值往往是相依的,相互独立的假设往往不能满足,这时 $\hat{H}(X_{n+1})$ 的相合性和渐近正态性就未必成立. 注意到,根据命题 1,指数保费 $H(X_{n+1})$ 是在损失函数 $L(X_{n+1},\delta) = (\exp(\alpha X_{n+1}) - \exp(\alpha\delta))^2$ 下期望损失达到最小的估计. 为此,若仍然取损失函数(1),利用已知的观测值 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的函数 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 预测 X_{n+1},且使得期望损失函数达到最小,即求解下面的最小化问题

$$\min_{g\in\psi} E[\exp(\alpha X_{n+1}) - \exp(\alpha g(X_1, X_2, \cdots, X_n)]^2, \qquad (3)$$

其中 $\psi = \{g: g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为可测函数$\}$. 因此得到定理 1.

定理 1 在指数损失函数(1)下,求解最小化问题(3)得到 X_{n+1} 的最优预测为

$$\hat{X}_{n+1} = \frac{1}{\alpha}\log E(e^{\alpha X_{n+1}} | X_1, X_2, \cdots, X_n).$$

证 记 $\Phi(g) = E[\exp(\alpha X_{n+1}) - \exp(\alpha g(X_1, X_2, \cdots, X_n)]^2$,以及 $\Phi(g|X_1, X_2, \cdots, X_n) = E\{[\exp(\alpha X_{n+1}) - \exp(\alpha g(X_1, X_2, \cdots, X_n)]^2 | X_1, X_2, \cdots, X_n\}$,则 $\Phi(g) = E[\Phi(g|X_1, X_2, \cdots, X_n)]$. 若有 g^* 使 $\Phi(g|X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 达到最小,则也能使得 $\Phi(g)$ 达到最小. 由于 $\Phi(g|X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 中 g 为非随机变量,所以对 $\Phi(g|X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 g 求导,并令导数为 0,得到

$$\partial\Phi(g|X_1, X_2, \cdots, X_n)/\partial g = -2e^{\alpha g}E\{[\exp(\alpha X_{n+1}) - \exp(\alpha g)] | X_1, X_2, \cdots, X_n\} = 0,$$

因此 $g = \log E(e^{\alpha X_{n+1}} | X_1, X_2, \cdots, X_n)/\alpha$.

在贝叶斯统计中,假设 θ 给定条件下 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且具有相同的分布,而 θ 也是随机变量,具有先验分布 $\pi(\theta)$,此时

$$H(X_{n+1}) = \frac{1}{\alpha}\log[E(e^{\alpha X_{n+1}} | \theta) = \frac{\theta(1 - e^{\alpha})}{\alpha},$$

$\hat{X}_{n+1} = \frac{1}{\alpha}\log E(E(e^{\alpha X_{n+1}} \mid \theta, X_1, X_2, \cdots, X_n) \mid X_1, X_2, \cdots, X_n) = \frac{1}{\alpha}\log E(M_X(\alpha;\theta) \mid X_1, X_2, \cdots, X_n)$,

其中 $M_X(\alpha;\theta) = E(e^{\alpha X} \mid \theta)$ 为 X 的条件矩母函数在 α 处的值. 进一步,假设 X 服从泊松 Poisson(θ) 分布,而 θ 服从 Gamma(a,b) 分布,则容易得到

$$M_X(\alpha;\theta) = E(e^{\alpha X} \mid \theta) = \exp(\theta(e^{\alpha} - 1)).$$

这是后验分布 $\pi(\theta \mid x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 服从 Gamma($a + n\bar{x}, b + n$),则此时有

$$E(M_X(\alpha;\theta) \mid X_1, X_2, \cdots, X_n) = \int \exp(\theta(e^{\alpha} - 1)) \cdot \frac{(b+n)^{a+n\bar{x}}}{\Gamma(a+n\bar{x})}\theta^{a+n\bar{x}-1}e^{-(b+n)\theta}d\theta = \frac{(b+n)^{a+n\bar{x}}}{\Gamma(a+n\bar{x})} \cdot \frac{\Gamma(a+n\bar{x})}{(b+n+1-e^{\alpha})^{a+n\bar{x}}} = \frac{(b+n)^{a+n\bar{x}}}{(b+n+1-e^{\alpha})^{a+n\bar{x}}} = \left(1 + \frac{1-e^{\alpha}}{b+n}\right)^{a+n\bar{x}},$$

因此 $\hat{X}_{n+1} = \frac{a+n\bar{x}}{\alpha}\log\left(1 + \frac{1-e^{\alpha}}{b+n}\right)$. 由于当 $n \to \infty$ 时,$\lim_{n\to\infty}[1 + (1-e^{\alpha})/(b+n)]^{(b+n)/(1-e^{\alpha})} = e$,且根据大数定律有 $(a+n\bar{x})(1-e^{\alpha})/(b+n) \to \theta(1-e^{\alpha})$,a. s. 则

$$\hat{X}_{n+1} = \frac{a+n\bar{x}}{\alpha}\log\left(1 + \frac{1-e^{\alpha}}{b+n}\right) \to \frac{\theta(1-e^{\alpha})}{\alpha} = H(X_{n+1}).$$

即 $\hat{X}_{n+1}$ 是 $H(X_{n+1})$ 的一个相合估计.

一般地,假设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 n 个同分布的随机变量,可以看作是 n 个具有相依结构的风险随机变量,也可以看作是一个风险的 n 个观测值,但假设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 不相互独立,指数保费 $H(X_{n+1})$ 的一个最优预测为

$$\hat{H}(X_{n+1}) = \frac{1}{\alpha}\log E(e^{\alpha X_{n+1}} \mid X_1, X_2, \cdots, X_n).$$

显然,$\hat{H}(X_{n+1})$ 的计算需要给定 $X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}$ 的相依结构. 虽然在贝叶斯模型中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 依赖于共同的 θ 呈现一定的等相依性,然而这种等相依性并不能完全刻画风险之间的相依性情况. 在金融统计中,Copula 函数是刻画相依性最有效的工具. 接下来将在一般 Copula 相依模型下讨论 $H(X_{n+1})$ 的最优预测问题.

2　Copula 相依风险模型下的指数保费预测

为了计算 $\hat{H}(X_{n+1})$ 表达式,将用 Copula 函数来刻画 $X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}$ 之间的相依性. 这里假设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}$ 具有相同的边际分布 $F(x)$.

定义 1　若随机向量 $\boldsymbol{X}_n = (X_1, X_2, \cdots, X_n)'$ 有一个联合分布 $H(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,且有连续的边际分布 $F_1, F_2, \cdots, F_n$,则 X_n 的 Copula 定义为($F_1(X_1)$, $F_2(X_2)$, $\cdots$, $F_n(X_n)$) 的分布函数 C,其中 $F_i(x)$ 为随机变量 X_i 的边际分布函数.

根据 Sklar 定理,若边际分布 $F_i(x)$ 是连续函数,则对任意联合分布 $H(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,都存在唯一的 Copula 函数 $C(u_1, u_2, \cdots, u_n)$,使得

$$H(x_1, x_2, \cdots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \cdots, F_n(x_n)). \tag{4}$$

对(4)式关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 求偏导数,可得到密度函数为

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c\left(F_1(x_1), F_2(x_2), \cdots, F_n(x_n)\right)\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i),$$

其中 $c(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 为 Copula 密度.

注意到 $\hat{H}(X_{n+1}) = \log E(e^{\alpha X_{n+1}} \mid X_1, X_2, \cdots, X_n)/\alpha = \log\int e^{\alpha x_{n+1}} f(x_{n+1} \mid x_1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_{n+1}/\alpha$,而 $f(x_{n+1} \mid x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为给定 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 下 X_{n+1} 的条件密度函数. 根据条件密度公式有 $f(x_{n+1} \mid x_1, x_2, \cdots, x_n) = h(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1})/h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 记 $u_i = F(x_i)$,则 $h(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) = c(u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1})\prod_{i=1}^{n+1} f(x_i)$,因此

$$f(x_{n+1} \mid x_1, x_2, \cdots, x_n) = c(u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}) f(x_{n+1}) / [c(u_1, u_2, \cdots, u_n)].$$

从而得到定理 2.

定理 2　指数保费 $H(X_{n+1})$ 的最优预测为

$$\hat{H}(X_{n+1}) = \frac{1}{\alpha}\log\int e^{hx_{n+1}} \frac{c(u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1})}{c(u_1, u_2, \cdots, u_n)} f(x_{n+1})\,dx_{n+1}, \tag{5}$$

其中 $u_i = F(x_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n, n+1$.

由(5)式可看出比率 $c(u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1})/c(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 决定了 X_{n+1} 原来概率密度的变化. 当给出 Copula 密度 $c(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 的形式时,可得到 $\hat{H}(X_{n+1})$ 的解.

3　Calyton Copula 风险相依模型下的指数保费

在 Copula 理论中,Calyton Copula 是应用最为广泛的一种 Copula 函数.

定义 2　若 $C(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 满足 $C(u_1, u_2,$

$\cdots, u_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{-\theta} - n + 1\right)^{-1/\theta}$，则称 $C(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 为 Calyton Copula.

关于 $C(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 求偏导数易得 Calyton Copula 的密度为

$$c(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \frac{\theta^n \Gamma(n + 1/\theta)}{\Gamma(1/\theta)} \prod_{i=1}^{n} u_i^{-\theta-1} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{-\theta} - n + 1\right)^{-n-1/\theta}.$$

因此有

$$c(u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}) / c(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \theta(n + 1/\theta)(1 + 1/\xi)^{1/\theta+n} u_{n+1}^{-\theta-1} (u_{n+1}^{-\theta} + \xi)^{-1/\theta-n-1},$$

这里 $\xi = \sum_{i=1}^{n} u_i^{-\theta} - n$. 令 $Y = [F(X_{n+1})]^{-\theta}$，则随机变量 Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = \frac{(n + 1/\theta)(1 + \xi)^{1/\theta+n}}{(y + \xi)^{1/n+n+1}}, y > 1.$$

注意到 $f_Y(y)$ 是帕累托分布的密度函数，参数分别为 $n + 1/\theta$ 和 $1 + \xi$，则有

$$E(\mathrm{e}^{\alpha X_{n+1}} | X_1, X_2, \cdots, X_n) = \int_1^{\infty} \mathrm{e}^{hF_{n+1}^{-1}(y^{-1/\theta})} \cdot \frac{c(u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1})}{c(u_1 u_2, , \cdots, u_n)} \mathrm{d}y^{-1/\theta} = \int_1^{\infty} \mathrm{e}^{hF_{n+1}^{-1}(y^{-1/\theta})} f_Y(y)\, \mathrm{d}y = E_Y[-\exp(hF_{n+1}^{-1}(Y^{-1/\theta}))],$$

因此有

$$\hat{H}(X_{n+1}) = \log E_Y[-\exp(hF_{n+1}^{-1}(Y^{-1/\theta}))] / \alpha.$$

4 参考文献

[1] 温利民. 信度估计的理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2012.

[2] Gerber H U. On additive premium calculation principles[J]. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 1974, 7(3): 215-222.

[3] Edward W Frees, Ping Wang Ph D. Credibility using copulas[J]. North American Actuarial Journal, 2004, 9(2): 31-48.

[4] Denuit M. The exponential premium calculation principle revisited[J]. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 1999, 29(2): 215-226.

[5] Müller A. Stop-loss order for portfolios of dependent risks[J]. Insurance Mathematics and Economics, 1997, 21(3): 219-223.

[6] Dhaene J, Denuit M, Goovaerts M J, et al. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: applications[J]. Insurance Mathematics and Economics, 2002, 31(2): 133-161.

[7] Bühlmann H. Experience rating and credibility[J]. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 1969, 5(2): 157-165.

[8] Pan Maolin, Wang Rongming, Wu Xianyi. On the consistency of credibility premiums regarding Esscher principle[J]. Insurance Mathematics and Economics, 2008, 42(1): 119-126.

[9] Wen Limin, Wu Xianyi. The credibility estimator with general dependence structure over risks[J]. Communication in Statistics-Theory and Methods, 2011, 40(10): 1893-1910.

[10] Nelsen R B. An introduction to copulas[M]. 2nd ed. New York: Springer Publishing Company, 2010.

[11] Frees E W, Valdez E A. Understanding relationships using Copulas[J]. North American Actuarial Journal, 1998, 2(1): 1-25.

[12] 吴吉林，孟纹羽. 时变混合 Copula 模型的非参数估计及应用研究[J]. 数量经济技术经济研究，2013(8): 124-136.

[13] 腾叶，吴黎军. 指数保费原理下的双相依信度保费[J]. 高校应用数学学报: A 辑, 2013(4): 417-423.

[14] 温利民，吴贤毅. 指数保费原理下的经验厘定[J]. 中国科学: 数学, 2011(10): 861-876.

[15] Young V R. Premium principles[M]. New York: Wiley, 2004: 1322-1331.

The Predictor of Exponential Premium Based on Copula Dependent Risk Model

DU Mengying, ZHANG Yi, WEN Limin*

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: Exponential premium principle is a kind of important premium principle in non-life insurance actuarial science. It has important application in theory and practice. However, most of exponential premium principle statistical inference in the literature is assumed that risk is mutually independent or conditional dependent. But this independence is not satisfied in general practices. The exponential premium estimator is given based on dependent risk model. And the properties of estimate are discussed. The exponential premium formula under Calyton copula model is also given.

Key words: dependent risk; exponential premium principle; Copula function; Calyton copula

(责任编辑: 曾剑锋)