文章编号: 1000-5862(2018)02-0111-19

变分方法及其在非线性偏微分方程应用方面的进展和未决问题

邹文明
(清华大学数学科学系,北京 100084)

摘要: 先介绍变分法发展的简单历史以及将来的发展趋势. 然后综述变分法应用于非线性偏微分方程的基本思想和最新成果. 通俗介绍环绕理论、变号临界点理论及应用,其中包括对称扰动方程和 Rabinowitz 公开问题、Brezis-Nirenberg 临界指数方程、Li-Lin 公开问题、Bose-Einstein 凝聚、Berestycki-Caffarelli-Nirenberg 猜测和 Lane-Emden 方程及猜想.

关键词: 变分法; 非线性偏微分方程; 环绕理论; 临界指数; 变号临界点理论; 薛定谔方程
中图分类号: O 176; O 175.29 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.02.01

0 变分法简史和将来的发展趋势

变分的思想可以追溯到法国科学家费马(Pierre de Fermat,1601—1665)时代. 他在 1662 年提出了现在被称为的极小作用原理: 光传播的路径是光程取极值的路径. 这个极值可能是最大值(或最小值),甚至可以是函数的拐点. 在最初提出时,又被人们称为“最短时间原理”,即光线传播的路径是需时最少的路径. 此时,微积分还没有产生!

17 世纪后半叶,更多的非线性问题需要更加严密的理论工具,这就促使了微积分的产生. 当时,许多科学家,如法国的费马、笛卡尔,英国的巴罗、瓦里士,德国的开普勒等,都为微积分的产生做了大量的前期研究工作,为微积分的创立做出了启蒙的贡献. 英国的数学家牛顿(1643—1727)在 1684—1685 年写《自然哲学的数学原理》,于 1687 年正式出版. 德国数学家莱布尼茨(1646—1716)于 1684 年在《博学学报》(Acta Eruditorum)发表了《一种求极大极小和切线的新方法,它也适用于分式和无理量,以及这种新方法的奇妙类型的计算》. 这 2 个工作标志着微积分的诞生. 牛顿-莱布尼茨发明微积分后,有了系统且严谨的办法来研究变分问题. 但围绕着微积分的发明权之争,引发了欧洲大陆学派如德国(莱布尼茨学派)和英国(牛顿学派)的数学家们之间的互相挑战[1].

约翰·贝努利(Johann Beinoulli,瑞士数学家,1667—1748)在 1696 年 6 月提出一个作为向欧洲数学家(甚至包括他哥哥 Jakob Bernoulli,瑞士数学家,1654—1705)挑战的数学问题,即现在被称为的“最速下降线问题”. 问题提出半年后,仍然未解决. 于是 Johann Beinoulli 在 1697 年元旦发表著名的“公告”(Programma),再次向“全世界最聪明的数学家”(意指牛顿)挑战,1 月 29 日牛顿从英国造币局下班回到住处,看到了转达 Johann Beinoulli 挑战的信件,随后他利用一个晚上的时间解决了这个问题,并将结果匿名(这是他常用的办法)发表. Johann Beinoulli 读到这篇文章后惊叹“终于看见了雄狮的利爪”,意指是牛顿所为. “最速下降线问题”现在被认为是变分法的起源. 瑞士数学家 Leonhard Euler(1707—1783)作为 Johann Beinoulli 的学生,也对变分法做出了极大贡献. 例如,Leonhard Euler 在 1734 年推广了最速降线问题,寻找这类问题的更一般方法. 1744 年,Leonhard Euler 的《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的方法》一书出版[1]. 这是变分学史上的里程碑,它标志着变分法作为一个新的数学分支的诞生. 在这个数学分支中,函数本身就是自变量,因此比微积分的极值问题更加抽象和复杂.

收稿日期: 2018-01-20
基金项目: 国家自然科学基金(11771234)资助项目.
作者简介: 邹文明(1966-),男,江西宁都人,教授,博士生导师,国家杰出青年基金获得者,主要从事变分法和非线性微分方程的研究. E-mails: zou-wm@mail.tsinghua.edu.cn

Leonhard Euler 找到了解决这类问题的一般方法. 因此,教科书中变分法的基本方程就叫欧拉方程. 在西方数学界,Johann Beinoulli,Jakob Bernoulli 和 Leonhard Euler 被称为"变分法之父"(founding fathers). 当然,后来很多贡献也由拉格朗日(J. L. Lagrange,意大利数学家,1736—1813)、狄里克雷(P. G. L. Dirichlet,德国数学家,1805—1859)、高斯(C. F. Gauss,德国数学家,1777—1855)、勒让德(A. M. Legendre,法国数学家,1752—1833)、雅可比(C. G. J. Jacobi,德国数学家,1804—1851)、哈密顿(W. R. Hamilton,1805—1865,爱尔兰数学家)等做出[1].

1900 年 D. Hilbert 公布 23 个著名数学问题,引领了此后的数学发展,其中的最后一个问题就是"变分法的进一步发展". 受此鼓舞,勒贝格(H. L. Lebesgue,1875—1941)于 1907 年研究了 Dirichlet 问题;G. D. Birkhoff 于 1917 年研究了闭测地线问题;Douglas 在 1931 年研究了 Plateau 问题,以上研究成果标志了大范围变分法的诞生. 1934 年,Ljusternik-Schnirelman 理论和 Morse 理论相继出现,使得变分和拓扑方法的结合成为强有力的工具. 在 Milnor,S. Smale 的推动下,Morse 理论得到进一步大力发展和利用. 特别是 S. Smale(美国数学家,2007 年获得 Wolf 奖,1966 年获得 Fields 奖)利用 Morse 理论解决了 5 维及其以上的庞加莱猜想,这引起了轰动. 1973 年,意大利数学家 A. Ambrosetti 和美国数学家 P. Rabinowitz 建立山路引理[2],引发了现代大范围变分法的大发展. 近几十年的研究成果非常丰富. 将来,变分法的发展趋势大致如下:

1) 变分方法的进一步发展(即 Hilbert 的 23 个著名问题当中的最后一个问题). 例如,非光滑临界点理论及其应用的发展是相对滞后的,因为现实世界很多非线性现象都是非光滑的;

2) 大范围变分和拓扑方法与非线性偏微分方程(PDE)的结合:目前许多重要的非线性微分方程的解的存在性、解的个数、解的拓扑与几何性质等问题还远远没有得到解决. 具有引领作用的问题有:关于 Laplace 算子特征值估计的 Polya 猜测;关于半线性椭圆方程的 De Giorgi 猜想的相关问题;关于极小曲面的 Bernstein 猜想;关于半线性椭圆方程的 Gibbons 猜想;关于没有对称性的椭圆方程无穷多解的存在性问题等[3];

3) 变分和拓扑方法应用于各类物理、非线性力学、光学中的数学模型. 如各类 Schrödinger 方程或系统、Dirac 方程、Gross-Pitaevskii 方程、Bose-Einstein 凝聚模型问题、高维临界 Bose-Einstein 凝聚型方程等;

4) Morse 理论和指标理论的进一步发展(应用于辛几何、测地线、多体问题等). 利用非线性泛函分析方法,尤其是变分方法、临界点理论、Morse 理论和指标理论等,研究辛几何与哈密顿系统等领域中的若干著名猜测,包括关于 Hamilton 系统在给定能量面上周期解的存在性的 Weinstein 猜测;关于闸轨道多重性的 Seifert 猜测;紧流型上的闭测地线猜测;研究非线性哈密顿系统周期解及其相关的某些边值问题(开弦问题,Lagrange 边值问题);研究 N-体问题等[3];

5) 非线性泛函分析与微分几何、几何分析的结合. 这方面有太多的结合点,比如极小曲面问题;常平均曲率曲面和常平均曲率超曲面(保持曲面围成体积不变的曲面面积变分的临界点),它的研究是微分几何学的重要课题;黎曼流形之间的调和映射是黎曼流形之间映射的能量泛函的临界点,它是极小子流形的推广;高维 Willmore 猜想的研究,它是微分几何中重要问题[3];

6) 应用于其它学科分支:控制论、金融数学、变分方法在图像处理方面的应用等,发现并解决新的交叉学科中的问题.

1 变分法的若干基本思想

假设 $(E, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间,E' 是它的对偶空间.

定义 1 称非线性泛函 $G: E \to \mathbf{R}$ 在 $u \in E$ 点具有 Fréchet 导数 $F \in E'$,若

$$\lim_{h \in E, h \to 0} \frac{G(u+h) - G(u) - F(h)}{\|h\|} = 0,$$

记为 $G'(u) = F$. 通常 $G'(\cdot)$ 是非线性的. 元素 u 被称为是 G 的临界点,若 $G'(u) = 0$. 当 Fréchet 导数存在时,有如下计算公式:

$$G'(u)h = \left.\frac{\mathrm{d}G(u+th)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}.$$

该泛函的临界点对应微分方程的(弱)解. 如 Dirichlet 边值问题、薛定谔方程、哈密顿系统等,此时称该类微分方程具有变分结构.

定义 2 称非线性泛函 $G: E \to \mathbf{R}$ 满足 Palais-Smale(简称(PS))条件,若 $\{G(u_n)\}$ 有界且 $G'(u_n) \to 0\ (n \to +\infty)$ 能够推出 $\{u_n\}$ 有收敛子列.

Palais-Smale 条件是一种紧性条件,往往和泛函的工作空间的嵌入紧性密切相连. 它的定义有各种变形和推广[4]. 例如

定义 3　若给定序列$\{u_n\}$满足

$$\sup_n |J(u_n)| < \infty, (1 + \|u_n\|) J'(u_n) \to 0, \quad (1)$$

则称其为弱 Palais-Smale(简称弱(PS),或 w-PS)序列. 若J的任何弱(PS)序列有收敛子序列,则称J满足 w-PS 条件. 若(1)式中的上确界改为$J(u_n) \to c$, $n \to \infty$,则称J在c处满足弱(PS)条件,记(w-PS)$_c$.

定义 4　假设$A, B \subset E$是 2 个闭子集. 称A和∂B环绕,若

(i) $A \cap \partial B = \varnothing$;

(ii) 对于任何连续映射$h \in \mathbf{C}(E, E)$,满足$h|_{\partial B} = \mathrm{id}$都有$h(B) \cap A \neq \varnothing$.

环绕的基本思想粗略地讲就是: 假设$G \in \mathbf{C}^1(E)$满足(PS)条件且A和∂B环绕,满足值分离条件: $\alpha = \inf_A F(u) > \sup_{\partial B} F(u) = \alpha_0$,则可定义

$$\beta := \inf_{h \in \Gamma} \sup_B G(h(u)),$$

这里$\Gamma := \{h \in \mathbf{C}(E, E) : h|_{\partial B} = \mathrm{id}\}$,则$\beta$是$G$的 1 个临界值,且$\beta \geqslant \alpha$.

其它变形的环绕,可参见文献[5-7].

1.1　Rabinowitz 的鞍点定理

假设E是一个 Hilbert 空间,具有内积$\langle \cdot, \cdot \rangle$及其诱导的范数$\|\cdot\|$. 假设$E$具有正交分解$E = Y \oplus M$,这里$\dim Y < \infty$. 有以下形式的 Rabinowitz 的鞍点定理(Saddle Point Theorem). 这个鞍点定理可以在 P. H. Rabinowitz 著名的小册子[8]中找到.

定理 1[8]　若泛函$G \in \mathbf{C}^1(E, \mathbf{R})$满足 Palais-Smale 条件,存在常数$\alpha$以及零点的有界邻域$D$满足

$$G|_{\partial D} \leqslant \alpha, \inf_M G \geqslant \beta > \alpha,$$

则G有 1 个临界值$\geqslant \beta$.

它在变分法中有着广泛而又基本的应用[8-10]. 它的各种推广或者变形可以参见文献[11-12]. 下面的推广形式是 E. A. B. Silva[13]获得的,也可以参见文献[14-15].

定理 2[13]　假设$G \in \mathbf{C}^1(E, \mathbf{R})$满足弱形式的 Palais-Smale 条件. 如果

$$a_0 := \sup_Y G \neq \infty, b_0 := \inf_M G \neq -\infty,$$

则G有 1 个临界点.

遗憾的是,上面的定理没有获得关于临界点、临界值的更多信息,尤其不能排除临界点的平凡性. 所以,要得到非平凡的临界点,另外的假设是必须的,参见文献[4](早期的形式也参见文献[12]).

$$\begin{cases} G \in \mathbf{C}^2(E, \mathbf{R}), G'(0) = 0, \\ \quad G''(0) \text{ 是一个 Fredholm 算子}; \\ \text{要么 } \dim Y < m(G, 0) \text{ 或者} \\ \overline{m}(G, 0) < \dim Y, \end{cases} \quad (2)$$

这里$m(G,0)$ ($\overline{m}(G,0)$) 是G在 0 点的 Morse Index 和补偿的(augmented) Morse 指标. 在这些条件下,G有非平凡的临界点. 条件(2)由 A. C. Lazer-S. Solimini[12]引进. 在定理 2 和定理 1 的假设下,文献[12]也获得了非平凡解,包括 Morse Index 的估计. 所有这些文章,即使在条件(2)下,无更多的关于临界点的信息. 另外,条件(2)通常是难于验证的.

1.2　变号临界点定理

问题是双重的: 若$G'(0) = 0$,则什么时候鞍点是非平凡的?另外,能否获得临界点的进一步性质,比如变号临界点?关于后一问题,实际应用当中也是需要获得更多的几何或拓扑性质的. 比如,考虑如下半线性椭圆方程:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

以及非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} -\Delta u + V_\lambda(x) u = f(x, u), & x \in \mathbf{R}^N, \\ u(x) \to 0, & |x| \to \infty, \end{cases}$$

这里$\Omega \subset \mathbf{R}^N$是一个有界光滑区域. 这些方程的解是一个多元函数$u$,那么,这样的函数什么时候是正的,什么时候是变号的函数?由此而产生了变号临界点理论. 下面介绍这方面的 2 个重要定理.

假设E是一个 Hilbert 空间,内积和范数分别是$\langle \cdot, \cdot \rangle$和$\|\cdot\|$. 考虑如下形式的泛函$G \in \mathbf{C}^1(E, \mathbf{R})$. 它的梯度$G'$具有以下形式

$$G'(u) = \kappa(u) u - \Theta_G u, \quad (3)$$

这里$\kappa(u) : E \to [1/2, 1]$是局部 Lipschits 连续函数; $\Theta_G : E \to E$是一个连续算子. 令$\mathscr{K} := \{u \in E : G'(u) = 0\}$和$\widetilde{E} := E \backslash \mathscr{K}$.

假设$\mathscr{P}$是一个闭凸锥,且是一个弱闭子集满足$(\mathscr{P}) \backslash \{0\} \neq \varnothing$. $\forall \delta > 0$,定义

$$\pm \mathscr{D}(\delta) := \{u \in E : \mathrm{dist}(u, \pm \mathscr{P}) < \delta\},$$

$$\mathscr{D}^* := \mathscr{D}(\delta) \cup (-\mathscr{D}(\delta)), \mathscr{S} = E \backslash \mathscr{D}^*,$$

则$\pm \mathscr{D}(\delta)$都是开凸的,$\mathscr{D}^*$是开集,$\pm \mathscr{P} \subset \pm \mathscr{D}(\delta/2) \subset \pm \mathscr{D}(\delta)$),$\mathscr{S}$是闭集. 还要如下假设:

(A_1) $\exists \delta > 0$使得$\Theta_G(\pm \mathscr{D}(\delta)) \subset \pm \mathscr{D}(\delta/2)$.

通常$\mathscr{P}$就是由 Sobolev 空间的全体非负函数构成,它就是一个闭凸锥. 从而,在$E \backslash (-\mathscr{P} \cup \mathscr{P})$里面的临界点就是变号的临界点,从而得到变号解(也称

Nodal 解).

定理 3[16] 假设(3)式和(A_1)成立且假设紧集 $A\subset E$ 和闭集 $B\subset\mathscr{S}$ 是环绕的,而且

$$a_0:=\sup_A G\leqslant b_0:=\inf_B G.$$

定义 $d^*:=\inf_{\Gamma\in\Phi^*}\sup_{\Gamma([0,1],A)\cap\mathscr{S}}G(u)$,则 $d^*\in[b_0,\sup_{(t,u)\in[0,1]\times A}G((1-t)u)]$. 进一步,若 G 满足(w-PS)$_c$ 条件,这里 $c\in[b_0,\sup_{(t,u)\in[0,1]\times A}G((1-t)u)]$,则 $\mathscr{K}[d^*-\varepsilon,d^*+\varepsilon]\cap(E\backslash(-\mathscr{P}\cup\mathscr{P}))\neq\varnothing$,这里 $\varepsilon>0$ 很小. 进一步,如果 $d^*=b_0$,则 $\mathscr{K}[d^*,d^*]\subset B$.

定理 4[16] 假设(3)式和(A_1)成立,$\Theta_G:E\to E$ 是一个紧算子. 假设 $E=Y\oplus M$,$1<\dim Y<\infty$ 并且

(i) $G(v)\leqslant\alpha,\forall v\in Y$,这里 α 是一个正常数;

(ii) $G(w)\geqslant\alpha$ 对所有 $w\in B:=\{w:w\in M,\|w\|=\rho\}\subset\mathscr{S}$ 成立,这里 $\rho>0$;

(iii) $G(sw_0+v)\leqslant T_0,\forall s\geqslant0,v\in Y;w_0\in M\backslash\{0\}$ 是一个固定元素,T_0 是常数,

若 G 满足(w-PS)$_c(c>0)$ 条件,则存在序列 $\{u_n\}\subset E\backslash(-\mathscr{P}\cup\mathscr{P})$ 满足

$$G'(u_n)\to0,G'(u_n)=T_nu_n/n,G(u_n)\to c,$$

这里 $\{T_n\}$ 是一个有界序列,$c\in[\alpha/2,2T_0]$.

注 1 关于变号解,更多的理论和应用可以参见文献[4,16-19].

1.3 喷泉定理

当偏微分方程的非线性项是奇函数时,它对应的能量泛函是偶的,称它具有对称性. 此时,通常比较容易地获得无穷多个临界点. 比如,利用对称的山路引理[2,8,10]. 下面,介绍“喷泉定理”,意思是临界点像喷泉一样喷出来[4].

假设 E 是一个 Banach 空间,具有范数 $\|\cdot\|$. 令 $\{X_j\}$ 是 E 的一个子空间序列满足 $\dim X_j<\infty$,$j\in\mathbf{N}$. 进一步,$E=\overline{\oplus_{j\in\mathbf{N}}X_j}$. 记

$W_k=\oplus_{j=0}^kX_j,Z_k=\overline{\oplus_{j=k}^\infty X_j},B_k:=\{u\in W_k:\|u\|\leqslant\rho_k\},S_k:=\{u\in Z_k:\|u\|=r_k\},\rho_k>r_k>0.$

考虑一族 $\mathscr{C}^1$ 泛函 $\Phi_\lambda:E\to\mathbf{R}$ 满足 $\Phi_\lambda(u):=I(u)-\lambda J(u)$,$\lambda\in[1,2]$. 作如下假设:

(A_1) Φ_λ 对 $\lambda\in[1,2]$ 一致地将有界集映成有界集. 更多地,$\Phi_\lambda(-u)=\Phi_\lambda(u)$,$(\lambda,u)\in[1,2]\times E$;

(A_2) $J(u)\geqslant0,u\in E;I(u)\to\infty$ 或者 $J(u)\to\infty(\|u\|\to\infty)$ 或

(A_3) $J(u)\leqslant0,\forall u\in E;J(u)\to-\infty(\|u\|\to\infty)$.

令 $a_k(\lambda):=\max_{u\in W_k,\|u\|=\rho_k}\Phi_\lambda(u)$,$b_k(\lambda):=\inf_{u\in Z_k,\|u\|=r_k}\Phi_\lambda(u)$. 定义 $c_k(\lambda):=\inf_{\gamma\in\Gamma_k}\max_{u\in B_k}\Phi_\lambda(\gamma(u))$,这里 $\Gamma_k:=\{\gamma\in\mathscr{C}(B_k,E):\gamma$ 是奇映射,$\gamma|_{\partial B_k}=\mathrm{id}\}$,$k\geqslant2$.

定理 5[4] 假设(A_1)并且(A_2)或者(A_3)成立. 如果 $b_k(\lambda)>a_k(\lambda),\forall\lambda\in[1,2]$,则 $c_k(\lambda)\geqslant b_k(\lambda),\forall\lambda\in[1,2]$. 进一步,对几乎所有的 $\lambda\in[1,2]$,都存在序列 $\{u_n^k(\lambda)\}_{n=1}^\infty$ 满足 $\sup_n\|u_n^k(\lambda)\|<\infty$,$\Phi_\lambda'(u_n^k(\lambda))\to0$ 和 $\Phi_\lambda(u_n^k(\lambda))\to c_k(\lambda)$,$n\to\infty$.

定理 6[4] 假设

(B_1) Φ_λ 对所有 $\lambda\in[1,2]$ 一致地将有界集映到有界集. 进一步,$\Phi_\lambda(-u)=\Phi_\lambda(u),\forall(\lambda,u)\in[1,2]\times E$;

(B_2) $J(u)\geqslant0$ 且在 E 的任意有限维子空间上 $J(u)\to\infty$,$\|u\|\to\infty$;

(B_3) $\exists\rho_k>r_k>0$ 满足 $a_k(\lambda):=\inf_{u\in Z_k,\|u\|=\rho_k}\Phi_\lambda(u)\geqslant0$,$b_k(\lambda):=\max_{u\in W_k,\|u\|=r_k}\Phi_\lambda(u)<0$ 对所有 $\lambda\in[1,2]$ 成立,并且 $d_k(\lambda):=\inf_{u\in Z_k,\|u\|\leqslant\rho_k}\Phi_\lambda(u)\to0$,$k\to\infty$ 对所有 $\lambda\in[1,2]$ 一致成立,则 $\exists\lambda_n\to1,u(\lambda_n)\in W_n$ 满足 $\Phi'_{\lambda_n}|_{W_n}(u(\lambda_n))=0$,$\Phi_{\lambda_n}(u(\lambda_n))\to c_k$,$n\to\infty$,这里 $c_k\in[d_k(2),b_k(1)]$. 特别地,如果 $\{u(\lambda_n)\}$ 对每个 k 有收敛子序列,则 Φ_1 有无穷多非平凡临界点 $\{u_k\}\in E\backslash\{0\}$ 满足 $\Phi_1(u_k)\to0^-$,$k\to\infty$.

2 若干重要的非线性 PDE 问题

2.1 Rabinowitz 公开问题

1988 年,A. Bahri 和 P. L. Lions(1994 年 Fields 奖获得者)研究了以下对称扰动的椭圆方程:

$$-\Delta u=|u|^{p-2}u+f(x,u),u\in H_0^1(\Omega),$$

这里 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant2)$ 是 1 个有界光滑区域,$2<p<2N/(N-2)$[20],$f(x,u)$ 不必是 u 的奇函数. 当 $f(x,u)$ 是 u 的奇函数时,方程对应的能量泛函是

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x,$$

它是一个偶泛函,此时有一些工具,例如对称的山路引理或者利用亏格指标,能够比较容易获得无穷多解的存在性. 但是,当 $f(x,u)$ 不是 u 的奇函数时,方程对应的能量泛函不再是偶泛函,要获得无穷多解异常困难. 此时,A. Bahri 和 P. L. Lions[20] 证明:当 $2<p<p_0<2^*=2N/(N-2)$(临界指数),该方程

具有无穷多解. 该结果一直没有获得突破. 在 A. Bahri 和 P. L. Lions 的上述工作之前,P. Rabinowitz 等[8] 也研究过这类问题.

文献 [21] 证明了在 A. Bahri 和 P. L. Lions 的条件下,该方程具有无穷多变号的函数解 $\{u_k\}$,而且获得了能量的近似估计,即

$$J(u_{k_n}) \sim k_n^{2p/(N(p-2))}, k_n \to \infty.$$

这是关于这一问题到目前为止的最好结果.

Rabinowitz 公开问题: 若非线性项 $g(x,u)$ 不是 u 的奇函数,且在次临界条件下,方程 $-\Delta u = g(x,u)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ 是否有无穷多解存在[8]?这个问题还没有最终解决. 部分结果请参见文献 [22].

2.2　Brézis-Nirenberg 临界指数方程

考虑如下的 H. Brézis-L. Nirenberg 临界指数方程:

$$-\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u, u \in H_0^1(\Omega), \tag{4}$$

这里 Ω 是 $\mathbf{R}^N(N \geqslant 3)$ 的一个有界光滑区域; $2^* = 2N/(N-2)$ 是临界 Sobolev 指数; $\lambda > 0$. 记 $(0 <) \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$ 为 $-\Delta$ 在 Dirichlet 零边值条件下的特征值.

方程(4) 出现在几何领域 Yamabe 猜想的研究中. Yamabe 猜想的基本内容是: 给定流形 $\mathscr{M}$ 上的度量 $\mathscr{D}$,具有数量曲率(scalar curvature) μ,是否可以共形形变(conformally deformed) 到度量 $\mathscr{D}_0$ 具有常数量曲率. 令 $\mathscr{D}_0 = u^{4/(N-2)}\mathscr{D}$,这里 u 是一个共形因子(conformal factor),$\mathscr{D}_0$ 的常数曲率 μ_0 由以下方程给出:

$$-\frac{4(N-1)}{N-2}\Delta_{\mathscr{M}}u + \mu u = \mu_0 u|u|^{2^*-2},$$

这里 $\Delta_{\mathscr{M}}$ 是流形 $\mathscr{M}$ 上相对于度量 $\mathscr{D}$ 的 Laplace-Beltrami 算子.

H. Yamabe 在 1960 年的文献 [23] 中给出了一个解答,但是 N. Trudinger 在 1968 年的文献 [24] 里发现 H. Yamabe 的证明是错的! 主要问题就是默认紧性是成立的,但实际上该问题不满足大范围的紧性条件. 遗憾的是 N. Trudinger 在他的论文里也未能给出正确的证明. T. Aubin 在 1976 年的文献 [25] 中给出了该问题的本质性进展,证明了当维数大于 5 时,猜想成立. Yamabe 猜想的最终解决是由 R. Schoen[26] 给出的. 但在此之前,H. Brézis-L. Nirenberg 为了更好地理解 Yamabe 猜想,提出了以上临界指数方程(4). 该问题对应于以下泛函的临界点:

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda u^2)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}\,\mathrm{d}x,$$

由于 2^* 是 Sobolev 嵌入 $H_0^1(\Omega) \to L^p(\Omega)$ 的临界指数,泛函 F 不满足全局的(PS) 条件. 注意到,次临界的方程

$$-\Delta u = \lambda u + |u|^p u, p < 2^*, u \in H_0^1(\Omega),$$

当 $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$ 时是可解的. 但当 $p = 2^*$ 且 Ω 是星型区域时,方程对所有 $\lambda \in (-\infty, 0]$ 是仅有平凡解的. 这说明临界和次临界有本质的区别.

H. Brézis-L. Nirenberg 在文献 [27] 中证明,当 $N \geqslant 4$ 时,方程(4) 对于 $\lambda \in (0, \lambda_1)$ 是可解的. 但当 $N = 3$ 时,情况变得更加复杂. 他们证明当 $\lambda \in (\lambda_1/4, \lambda_1)$ 且区域 Ω 是一个球时方程是可解的. 这也表明 Yamabe 猜想的解决可能与流形的整体性质有关. Yamabe 猜想的最终解决恰恰证明了这一点[26].

Capozzi-Fortunato-Palmieri[28] 和 Zhang Dong[29] 证明当 $N \geqslant 4$ 且 $\lambda \neq \lambda_i$, $\forall i \in \mathbf{N}$ 时,方程(4) 至少有一个非平凡解; Zhang Dong[29] 证明在 $\lambda = \lambda_i$, $\forall i \in \mathbf{N}$,且 $N \geqslant 5$ 时,方程(4) 有一个非平凡解. 关于多解性的结果参见文献 [30],该文证明当区域 Ω 有对称性时,方程有无穷多解. Cerami-Solimini-Struwe[31] 证明当 $N \geqslant 6$ 时,方程(4) 有 2 个非平凡解且其中 1 个是变号的. 当 $N \geqslant 4$ 且 $\lambda \in (0, \lambda_1)$ 时,M. Lazzo[32] 用 Lusternik-Schnirelmann 范畴理论(category) 获得了正解个数的下界估计. Devillanova-Solimini[33] 证明: 若 $N \geqslant 7$,则方程(4) 有无穷多对解(一般区域,不需要更多条件). 进一步,文献 [34] 将文献 [33] 的结果推广到了 p-Laplace 的情形. 笔者和美国著名数学家 M. Schechter 合作证明如下定理.

定理 7[35]　若 $N \geqslant 7$,则 Brézis-Nirenberg 临界指数方程(4) 具有无穷多变号解,并且,当 $\lambda \geqslant \Lambda_1$ 时,方程只有变号解(零除外).

进一步,G. Devillanova 等[36] 证明: 若 $N \geqslant 4$ 且 $\lambda \in (0, \lambda_1)$,则方程至少有 $\lceil (N+2)/2 \rceil$ 对非平凡解,这里 $\lceil a \rceil$ 表示最小自然数 n 满足 $n \geqslant a$, $a > 0$. Clapp-Weth[37] 推广了 Devillanova-Solimini[36] 的后一个结果,获得以下定理.

定理 8[37]　假设 $N \geqslant 4$,则

(i) 若 $\lambda \in (0, \lambda_1)$,则方程(4) 至少有 $\lceil (N+2)/2 \rceil$ 对非平凡解;

(ii) 若 $\lambda \in (\lambda_n, \lambda_{n+1})$, $n \in \mathbf{N}$,则方程(4) 至少有 $\lceil (N+1)/2 \rceil$ 对非平凡解;

(iii) 若 $\lambda = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{k+l}$ 和 $\lambda \in (\lambda_{k+1}, \lambda_{k+l+1})$, $k \in \mathbf{N}$ 和重数 $l \in \mathbf{N}$,则方程(4) 至少有 $\lceil (N+1-l)/2 \rceil$ 对非平凡解.

在以上(iii)中,若 l 足够大,则实际上没有获得解.目前最好的结果是以下定理,由笔者和陈志杰以及日本数学家 Shioji 合作获得的.

定理 9[38] 令 $N \geqslant 5$ 且 $\lambda \geqslant \lambda_1$,则方程(4)至少有 $\lceil (N+1)/2 \rceil$ 对非平凡解.

迄今为止,以上定理 7 和定理 9 是方程(4)多解问题的最好结果.

问题 1 当维数小于 7 维(即低维情形)时,方程是否也有无穷多(变号)解?

2.3 Berestycki-Lions 理论及奇异扰动椭圆方程

考虑如下定义在全空间 $\mathbf{R}^N$ 上的薛定谔方程:

$$-\Delta u = g(u),u \in H^1(\mathbf{R}^N), \tag{5}$$

这里 g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是一个连续函数.方程(5)有深刻的物理背景.它的一个解 $\omega(x)$ 称为极小能量解(或基态解),如果 $I(\omega) = m$,这里

$m: = \inf\{I(u): u \in H^1(\mathbf{R}^N)\backslash\{0\}$ 是(5)式的一个非平凡解},

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^N} G(u)\,\mathrm{d}x, u \in H^1(\mathbf{R}^N).$$

1983 年,H. Berestycki 和 P. L. Lions 证明了如下关于基态解存在性的著名定理.

定理 10[39-40] 假设

(H_1) $g(s) \in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 是连续和奇的;

(H_2) $-\infty < \liminf\limits_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} \leqslant \limsup\limits_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} = -a < 0$;

(H_3) $\limsup\limits_{s\to\infty} \frac{g(s)}{|s|^{(N+2)/(N-2)}} \leqslant 0$;

(H_4) $\exists \xi_0 > 0$ 使得 $G(\xi_0) > 0$,

则方程(5)拥有一个基态解.

进一步,他们证明,当 $N \geqslant 3$ 时,为使得方程(5)存在基态解,条件(H_1)~(H_4)几乎是充分必要的.但是当 $N = 2$ 时,文献[41]获得了径向对称正解的存在性.H. Brezis 等[42]也研究了以下椭圆系统:$-\Delta u_i = g^i(u)$ in $\mathbf{R}^d$,$i = 1,2,\cdots,n$,该文在适当条件下获得了非零解的存在性.文献[43]考虑了条件(H_2)的更弱形式.这个定理后来有很多的应用,此后的很多研究都离不开这个基态解的存在性.但是,当非线性项是临界增长时,基态解的存在性及其特征没有解决.特别地,以下特例

$$-\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2}u, x \in \mathbf{R}^N, \lambda \neq 0$$

没有非平凡解.那么,什么情况下临界方程能有基态解存在?这也是一个非常重要的问题.因为这时的基态解不知道存在与否,这类临界方程的进一步研究(尤其是研究奇异扰动的临界薛定谔方程的解及其集中现象)也很难推进.因为这个方程通常作为其它方程的极限方程,所以必须从这个极限方程的基态解出发来研究其它的临界方程.笔者和张建军在文献[44]里考虑临界增长的方程,再加上一个次临界项,例如

$$-\Delta u + u = |u|^{2^*-2}u + |u|^{q-2}u, x \in \mathbf{R}^N.$$

更一般地,引进如下条件:

(g_1) $g(s) \in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 是奇函数;

(g_2) $\lim\limits_{s\to 0} g(s)/s = -a < 0$;

(g_3) $\lim\limits_{s\to+\infty} g(s)/s^{2^*-1} = \mu > 0$;

(g_4) $\exists C > 0$ 和 $q < 2^*$ 使得 $g(s) - \mu s^{2^*-1} + as \geqslant Cs^{q-1}$ 对所有 $s > 0$ 成立.

定理 11[44] 假设 $q > 2$,$N \geqslant 4$ 或者 $q > 4$,$N = 3$ 且(g_1)~(g_4),则(5)式用于正的径向解 $\omega \in C^2(\mathbf{R}^N) \cap H_r^1(\mathbf{R}^N)$ 满足

(i) ω 是(5)式的极小能量解;

(ii) ω 满足 Pohozǎev 型等式:

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla\omega|^2 = N\int_{\mathbf{R}^N} G(\omega);$$

(iii) 存在道路 $\gamma \in \Gamma$ 使得 $\omega(x) \in \gamma([0,1])$ 且 $\max\limits_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = I(\omega)$;

(iv) $c = m$,即山路值和极小能量值是相等的;

(v) (a) ω 是 $r > 0$ 的严格递减函数,即 $\omega'(r) < 0, r > 0$;

(b) ω 以及它的 1 阶导数是指数衰减的,即 $\exists C > 0$ 和 $\delta > 0$ 使得 $|D^\alpha\omega(x)| \leqslant Ce^{-\delta|x|}$,$|\alpha| = 0,1$.

对于基态解的存在性,(g_4)起了重要作用.没有条件(g_4),方程(5)可以没有解.例如,令 $g(s) = \mu|s|^{2^*-1}s - as$,利用 Pohozǎev 等式可知方程(5)无解.下面考虑这一结果的应用.

假设 Ω 是 $\mathbf{R}^N(N \geqslant 3)$ 的一个有界光滑区域,具有 C^2 边界 $\partial\Omega$.考虑如下的奇异摄动(singularly perturbed)椭圆问题:

$$-\varepsilon^2\Delta v + v = f(v), v > 0 \text{ in } \Omega, v = 0 \text{ on } \partial\Omega. \tag{6}$$

关于这一方程的次临界情形,已有很多研究[45-51].文献[49]证明了极小能量解的存在性和它唯一 spike x_ε 的性质.在文献[45,52]中,M. D. Pino,P. L. Felmer 和 T. Byeon 分别证明了 x_ε 的渐近行为.后来,在文献[53]中,J. Byeon 发展了一种变分方法构造这类解,但需要如下条件:

(f_1) $f \in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 满足 $f(t) = 0, t \leqslant 0$,且 $\lim\limits_{t\to 0} f(t)/t = 0$;

(f_2) $\exists p \in (1,(N+2)/(N-2))$ 使得
$$\limsup_{t\to\infty} f(t)/t^p < \infty;$$

(f_3) $\exists T > 0$ 使得 $T^2/2 < F(T) :\equiv \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

定理 12[53]　假设 $(f_1) \sim (f_3)$,则对充分小的 $\varepsilon > 0$,方程(6)有一个正解 v_ε 以及它的最大值点 $x_\varepsilon \in \Omega$ 满足

(i) $v_\varepsilon(x) \leqslant C\exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}|x - x_\varepsilon|\right)$,$c,C > 0$;

(ii) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathrm{dist}(x_\varepsilon,\partial\Omega) = \max\limits_{x\in\Omega} \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$;

(iii) $w_\varepsilon(x) \equiv v_\varepsilon(\varepsilon(x - x_\varepsilon))$ 一致收敛到以下方程的基态解:

$$-\Delta u + u = f(u),u > 0,u \in H^1(\mathbf{R}^N). \tag{7}$$

条件 $(f_1) \sim (f_3)$ 在次临界情形下是几乎最优的,它们首次出现在经典文献[39-40]中. 条件 $(f_1) \sim (f_3)$ 现在称为 Berestycki-Lions 条件,由 Pohozǎev 等式[54],条件 (f_3) 是必须的. 当 $f(u) = u^p$,$p \geqslant (N+2)/(N-2)$ 时,方程在 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 中没有非平凡解. 特别地,C. O. Alves 等[55]证明了方程(7)的基态解的存在性,而且 f 可以是临界增长的. 假设

(G_1) $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)/t = 0$;

(G_2) $\lim\limits_{t\to\infty} \sup f(t)/t^{2^*-1} \leqslant 1$;

(G_3) $2F(t) \leqslant tf(t)$,$\forall t \geqslant 0$;

(G_4) $\exists \lambda > 0$ 和 $2 < p < 2^*$ 使得 $f(t) \geqslant \lambda t^{p-1}$,$t \geqslant 0$.

该文的结果要求 $\lambda > \lambda_0$(足够大). 当所有 $\lambda > 0$ 时,文献[44]解决了方程(7)的基态解的存在性,需要的条件是:

(F_1) 当 $t < 0$ 时,$f(t) = 0$. 进一步,$\lim\limits_{t\to 0} f(t)/t = 0$;

(F_2) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)/t^{2^*-1} = \kappa > 0$;

(F_3) $\exists C > 0$ 和 $p < 2^*$ 使得 $f(t) \geqslant \kappa t^{(N+2)/(N-2)} + Ct^{p-1}$,$t \geqslant 0$.

自然的问题是,以上 J. Byeon 的定理在临界非线性条件下是否成立?下面定理是由文献[56]给出的肯定回答.

定理 13[56]　假设 $p > 2$ 且 $N \geqslant 4$ 或者 $p > 4$ 且 $N = 3$. 如果 $f \in C(\mathbf{R})$ 满足 $(F_1) \sim (F_3)$,则对充分小的 $\varepsilon > 0$,方程(5)有正解 v_ε 以及它的最大值点 $x_\varepsilon \in \Omega$ 满足:

(a) $v_\varepsilon(x) \leqslant C\exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}|x - x_\varepsilon|\right)$,$c,C > 0$;

(b) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathrm{dist}(x_\varepsilon,\partial\Omega) = \max\limits_{x\in\Omega} \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$;

(c) $w_\varepsilon(x) \equiv v_\varepsilon(\varepsilon x + x_\varepsilon)$(子列意义下)一致收敛到如下方程的基态解:

$$-\Delta u + u = f(u),u > 0,u \in H^1(\mathbf{R}^N).$$

一个特例是以下形式的方程:

$$-\varepsilon^2\Delta u + u = \kappa u^{2^*-1} + u^{p-1},x \in \mathbf{R}^N.$$

对于临界情形,问题(6)的基态解及其解的集中现象以前是没有被解决的. 临界非线性问题,由于(PS)-条件不在大范围成立,使得很多工具不能够直接应用,问题变得很困难[27,57-59]. 文献[53]的方法也不能用于这类问题.

问题 2　关于奇异扰动的薛定谔方程,以前的大量次临界条件下获得的结果,如何发展到临界条件?

2.4　Sobolev-Hardy 临界方程以及 Li-Lin 公开问题

1984 年,L. Caffarelli,R. Kohn 和 L. Nirenberg 在文献[60]中建立了下面一族插值不等式,如今被称为 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式或者简称为 CKN 不等式.

注 2　美国数学家 L. Nirenberg 获得过瑞典 Crafoord 奖(1982)、美国国家科学奖(1995)、陈省身奖(2010)、Abel 奖(2015). 美国数学家 L. Caffarelli 获得了沃尔夫奖(2012).

定理 14[60]　假设 $p,q,r,\alpha,\beta,\sigma$ 和 a 为固定的实数(称为参数)满足

$$p \geqslant 1,q \geqslant 1,r > 0,0 \leqslant a \leqslant 1; \tag{8}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{N} > 0,\frac{1}{q} + \frac{\beta}{N} > 0,\frac{1}{r} + \frac{\gamma}{N} > 0, \tag{9}$$

其中 $\gamma = a\sigma + (1 - a)\beta$,则存在一个正的常数 C 使得下面不等式成立

$$\||x|^\gamma u\|_{L^r} \leqslant C\||x|^\alpha|Du|\|_{L^p}^a\||x|^\beta u\|_{L^q}^{1-a},\forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

当且仅当下面的关系成立:

$$\frac{1}{r} + \frac{\gamma}{N} = a\left(\frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{N}\right) + (1 - a)\left(\frac{1}{q} + \frac{\beta}{N}\right), \tag{10}$$

(这是维数平衡条件)$0 \leqslant \alpha - \sigma$,如果 $a > 0$ 和 $\alpha - \sigma \leqslant 1$,如果 $a > 0$ 且 $1/p + (\alpha - 1)/N = 1/r + \gamma/N$.

在由(8)~(10)式和 $0 \leqslant \alpha - \sigma \leqslant 1$ 所决定的参数空间的任意紧集上,常数 C 是有界的. 一些高阶情形的 CKN 不等式由林长寿[61]给出. CKN 不等式以及它的高阶情形包含了众多经典的著名不等式,在泛函分析、椭圆偏微分方程中扮演着非常关键的角色. 因此自从 CKN 不等式提出以来,关于等号是否可以取到、最佳常数为多少、达到函数又满足什么样的性质等问题,一直是数学家们关注的焦点. 特别地,在最近十几年来,与这个不等式相关的一些非线

性椭圆偏微分方程的研究成为本专业方向的一个研究热点.

令 $\Omega\subset\mathbf{R}^N, s\in[0,2]$,定义

$$\mu_s(\Omega):=\inf\left\{\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x: u\in D_0^{1,2}(\Omega)\text{ 且 }\int_\Omega\frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x=1\right\},$$

则这个最佳常数的达到函数往往对应某个欧拉方程(微分方程)的基态解. 当 $0\in\overline{\Omega}$ 时,这类带 0 为奇异点的欧拉方程往往可以看做是一些揭示某种物理现象的非线性退化椭圆方程的更一般化. 特别地,当 $0\in\partial\Omega$ 具有一定的光滑性时,随着 N. Ghoussoub 和 F. Robert 的开拓性文献[62]的出现,揭示了曲率对最佳常数的影响. 从此,这类问题逐渐变成一个很重要的热点研究问题.

假设 Ω 是 $\mathbf{R}^N(N\geqslant3)$ 的 C^1 的有界光滑区域,$0\in\partial\Omega$ 或者 $0\in\Omega$. 研究以下的带有 Hardy-Sobolev 指数的 PDE:

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda\dfrac{u^p}{|x|^{s_1}}+\dfrac{u^{2^*(s_2)-1}}{|x|^{s_2}}=0, & x\in\Omega,\\ u(x)>0, & x\in\Omega,\\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{11}$$

这里 $s_1,s_2\in[0,2)$,$2^*(s_2)=2(N-s_2)/(N-2)$,$0\neq\lambda\in\mathbf{R}$,$1\leqslant p\leqslant2^*(s_1)-1$. 对于特殊情形 $s_1=s_2=0$,方程(11)成为

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda u^p+u^{2^*-1}=0, & x\in\Omega,\\ u(x)>0, & x\in\Omega,\\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{12}$$

这里 $1\leqslant p<2^*-1$,此时 $2^*:=2N/(N-2)$. 方程(12)变成了 Brézis 和 Nirenberg 临界指数方程[27]. 这里关心的是 $s_1^2+s_2^2\neq0$. 李岩岩和林长寿在文献[63]中提出以下公开问题.

Li-Lin(李岩岩-林长寿)公开问题: 当 $s_1<s_2$ 和 $\lambda<0$ 时,以下方程正解的存在性是完全未知的:

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda\dfrac{u^{2^*(s_1)-1}}{|x|^{s_1}}+\dfrac{u^{2^*(s_2)-1}}{|x|^{s_2}}=0, & x\in\Omega,\\ u(x)>0, & x\in\Omega,\\ u(x)=0 & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

特别地,即使是如下方程

$$\Delta u-u^p+u^{2^*(s)-1}/|x|^s=0, x\in\Omega,$$

这里 $0<s<2$ 和 $2^*(s)-1<p<(N+2)/(N-2)$,它的解的存在性问题依然是有趣的公开问题.

实际上,前人研究工作的前提都是最高幂方项的系数是正的(包括文献[63]). Li-Lin 公开问题恰好就是不满足这个前提. 还可以考虑下面比 Li-Lin 提出的更广泛的一类问题.

广义的 Li-Lin 公开问题: 在 $0\leqslant s_1<s_2<2$,$2^*(s_2)-1<p\leqslant2^*(s_1)-1$ 且 $\lambda<0$ 的前提下,以下方程的正解是否存在?

$$\begin{cases}\Delta u+\dfrac{\lambda u^p}{|x|^{s_1}}+\dfrac{u^{2^*(s_2)-1}}{|x|^{s_2}}=0, & x\in\Omega,\\ u(x)>0, & x\in\Omega,\\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{13}$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant3)$ 为一个有界开集且 $0\in\partial\Omega$,平均曲率 $H(0)<0$.

如果应用常规的研究方法,会有一些困难:标准的 Nehari 流形不再是一个好的定义. 考虑 $\mathscr{A}(u):=\{tu|t>0\}\cap\{\langle I'_\lambda(u),u\rangle=0|u\neq0\}$,则对某个 $u\neq0$ 来说 $\mathscr{A}(u)$ 可能是空集,也可能不止一个元素;找不到一条合适的山路路径对所有的 $\lambda<0$ 均适用;泛函 I_λ 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中可能是无界的了,即能量的有限性导不出序列自身的有界性. 因此通常的 Nehari 流形方法不再适用,可以容易验证泛函具有山路结构,因此 $(\mathrm{PS})_c$ 序列的存在性是没有问题的,但是正如上面所讲的无法保证这个序列是有界的. 因此发现了这个问题的关键在于如何找到一个适当的有界的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列. 自然就想到了单调性技巧或者约束在某个有界集或者紧集附近来找 $(\mathrm{PS})_c$ 序列. 笔者和 G. Cerami(意大利女数学家,曾提出著名的 Cerami 紧性条件:$(\mathrm{PS})_c$ 条件)以及钟学秀在文献[64]中首次研究了这个 Li-Lin 公开问题,得到下面定理.

定理 15[64] 考虑 Ω 为 $\mathbf{R}^N$ 中的一个 C^1 的有界开集,$0\in\partial\Omega$ 且边界 $\partial\Omega$ 在 $x=0$ 处是 C^2 的同时平均曲率 $H(0)<0$. 如果更进一步,$0\leqslant s_1<s_2<2$,$\lambda<0$ 且 $2^*(s_2)-1<p\leqslant2^*(s_1)-1$,则存在某个 $\lambda_0<0$ 使得对所有的 $\lambda_0<\lambda<0$,方程(13)都至少有 1 个正解.

利用单调性技巧,得到下面定理.

定理 16[64] 考虑 Ω 为 $\mathbf{R}^N$ 中的一个 C^1 的有界开集,$0\in\partial\Omega$ 且边界 $\partial\Omega$ 在 $x=0$ 处是 C^2 的同时平均曲率 $H(0)<0$. 如果更进一步,$0\leqslant s_1<s_2<2$,$\lambda<0$ 且 $2^*(s_2)-1<p<(N-2s_1)/(N-2)$,则对几乎处处的 $\lambda<0$,方程(13)都至少有 1 个正解.

问题 3 文献[64]是关于 Li-Lin 公开问题迄今为止的唯一一个工作. 从定理 16 可以看出,Li-Lin 公开问题的解决还差一个零测度集合. 但离 Li-Lin 公

开问题的彻底解决还有很大难度，值得彻底解决该公开问题.

2.5　Bose-Einstein 凝聚薛定谔系统 ——Sirakov 猜想

印度物理学家 S. N. Bose(玻色) 提出了早期的凝聚的思想，当然是在“纸上谈兵”. 可能是由于当初玻色的论文被当时主流的物理学家认为是奇谈怪论，使得他的文章遭到退稿. 他随后将论文寄给爱因斯坦，爱因斯坦以深邃的学术洞察力意识到玻色工作的重要性，亲自将 S. N. Bose 的文章由英文翻译成德文，并提交发表在 1924 年的德国刊物上. 他还立即着手开始这一问题的进一步研究，推广了 S. N. Bose 的想法，将玻色对光子(粒子数不守恒) 的统计方法推广到原子(粒子数守恒) ，预言当这类原子在一定条件下(如温度足够低时) ，会有新的物质状态产生，所有的原子会突然“统一”聚集在一种尽可能低的能量状态(极小能量态，或称基态) ，这就是现在所说的玻色 - 爱因斯坦凝聚(Bose-Einstein Condensate，简称 BEC) . 这一物质形态具有的奇特性质，在当今的许多高科技(如芯片技术、精密测量、纳米技术、激光技术等) 领域都有极其重要的应用. 现在全世界已经有数 10 个室验室实现了 BEC 的实验验证. 20 世纪 90 年代以来，由于大家所熟知的 3 位物理学家(朱棣文，Cohen，Phillips) 的杰出工作，为玻色 - 爱因斯坦凝聚的实现提供了条件. 1995 年实验观察原子的玻色 - 爱因斯坦凝聚终于实现. 第一批实现 BEC 的几个研究小组分别来自美国科罗拉多大学实验天体物理联合研究所(JILA) 、美国莱斯大学(Bradley 小组) 、麻省理工学院(MIT) (Davis) 等. 这 3 个实验宣告了实验观察玻色 - 爱因斯坦凝聚的实现. 这项工作获得 2001 年的诺贝尔物理学奖. 关于 BEC 物理背景的论文，可以参见文献 [65-66] .

大约从 20 世纪 90 年代中期开始，BEC 当中的数学模型受到数学家的关注和研究. 玻色 - 爱因斯坦凝聚态理论当中的一个重要数学模型是以下的 Schrödinger 方程组:

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{i}\partial \Phi_1}{\partial t} = \Delta \Phi_1 + \mu_1 |\Phi_1|^2 \Phi_1 + \beta |\Phi_2|^2 \Phi_1, \\ \quad x \in \Omega, t > 0, \\ -\dfrac{\mathrm{i}\partial \Phi_2}{\partial t} = \Delta \Phi_2 + \mu_2 |\Phi_2|^2 \Phi_2 + \beta |\Phi_1|^2 \Phi_2, \\ \quad x \in \Omega, t > 0, \\ \Phi_j = \Phi_j(x,t) \in \mathbf{C}, j = 1,2, \\ \Phi_j(x,t) = 0, x \in \partial\Omega, t > 0, j = 1,2, \end{cases} \tag{14}$$

这里 $\Omega = \mathbf{R}^N (N \leqslant 4)$ 或者 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 是光滑区域，i 是虚数单位，$\mu_1, \mu_2 > 0, \beta \neq 0$ 是耦合常数. 当 $N \leqslant 3$ 时，系统(14) 出现在很多物理问题中，尤其在非线性光学物理上，方程的解 Φ_j 表示光束的物理性态. 正常数 μ_j 代表光束的第 j 个分量的自聚焦. 耦合常数 β 表示 2 种物质态的相互作用. 方程(14) 也出现在双物质态凝聚的 Hartree-Fock 理论中，即 2 种超精细态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 的 Bose-Einstein 凝聚的 2 元混合 [67] . 耦合系数 β 的符号决定了 2 种物质态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 之间的相互关系: 当 $\beta > 0$ 时，说明它们是相吸引的，否则就是相排斥的.

为了获得孤立波解(solitary wave solutions) ，作变换 $\Phi_1(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_1 t} u(x)$ 和 $\Phi_2(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_2 t} v(x)$ ，则系统(14) 转变为

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 u^3 + \beta u v^2, x \in \Omega, \\ -\Delta v + \lambda_2 v = \mu_2 v^3 + \beta v u^2, x \in \Omega, \\ u \geqslant 0, v \geqslant 0, \quad x \in \Omega, \\ u = v = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{15}$$

当维数 $N \leqslant 3$ 时，方程(15) 的非线性项都是次临界的(即 $4 < 2N/(N-2)$) ，这方面有大量的结果 [68-83] .

称解 (u,v) 为非平凡，如果 $u \neq 0$ 和 $v \neq 0$; 称解 (u,v) 为半平凡，如果 (u,v) 是 $(u,0)$ 或者 $(0,v)$. 称解 (u,v) 是正的，如果 $u > 0$ 且 $v > 0$. 注意到方程(15) 具有半平凡解 $(\omega_1, 0)$ 和 $(0, \omega_2)$ ，这里 ω_i 是以下方程的唯一径向正解:

$$-\Delta u + \lambda_i u = \mu_i u^3, u > 0, u \in H^1(\mathbf{R}^N), \tag{16}$$

它的能量是

$$B_i := \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla \omega_i|^2 + \lambda_i \omega_i^2) - \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^N} \mu_i \omega_i^4. \tag{17}$$

并且 $\int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda_i u^2)\mathrm{d}x \geqslant 2\sqrt{B_i}\left(\int_{\mathbf{R}^N} \mu_i u^4 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$，$\forall u \in H^1(\mathbf{R}^N)$.

定义 $H := H^1(\mathbf{R}^N) \times H^1(\mathbf{R}^N)$. 方程(15) 的解对应于 C^2 - 泛函 $E_\beta : H \to \mathbf{R}$:

$$E_\beta(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda_1 u^2 + |\nabla v|^2 + \lambda_2 v^2) - \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^N} (\mu_1 u^4 + 2\beta u^2 v^2 + \mu_2 v^4) .$$

记

$$\mathscr{N}_\beta = \{(u,v) \in H, u \neq 0, v \neq 0, \int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda_1 u^2) = \int_{\mathbf{R}^N} (\mu_1 u^4 + \beta u^2 v^2), \int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla v|^2 + \lambda_2 v^2) = \int_{\mathbf{R}^N} (\mu_2 v^4 + \beta u^2 v^2)\}.$$

则方程(15)的任何非平凡解都属于$\mathcal{N}_\beta$. 记

$$A_\beta:=\inf_{(u,v)\in\mathcal{N}_\beta}E_\beta(u,v)=\inf_{(u,v)\in\mathcal{N}_\beta}\frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2+\lambda_1u^2+|\nabla v|^2+\lambda_2v^2).$$

由Sobolev不等式知,$A_\beta>0,\forall\beta$. 称解(u,v)是极小能量解,如果(u,v)是非平凡的且满足$E_\beta(u,v)=A_\beta$. 称A_β可以达到,如果$A_\beta=E_\beta(u,v)$,$(u,v)\in\mathcal{N}_\beta$. 方程(15)解的存在性可以参见文献[68-74,84-87]. 下面的结果属于B. Sirakov[73].

定理17[73] 假设$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$.

(i) 若$\beta\in(0,\min\{\mu_1,\mu_2\})\cup(\max\{\mu_1,\mu_2\},+\infty)$,则$A_\beta$是可以被$(\sqrt{k_\beta}\Omega_0,\sqrt{l_\beta}\omega_0)$所达到的,这里$(k_\beta,l_\beta)$满足$\mu_1k+\beta l=1,\mu_2l+\beta k=1$,$\omega_0$是方程(16)的唯一正解且满足$\mu_i=1$;

(ii) 若$\beta\in[\min\{\mu_1,\mu_2\},\max\{\mu_1,\mu_2\}]$且$\mu_1\neq\mu_2$,则方程(15)有非平凡的非负解.

Sirakov猜想: 在平移意义下,$(\sqrt{k_\beta}\omega_0,\sqrt{l_\beta}\omega_0)$是方程(15)的唯一正解.

文献[88]在一定条件下证明了该猜测,所需要的条件是$\beta>\max\{\mu_1,\mu_2\}$,文献[88]要求$0<\beta<\beta'$,这里$\beta'$是一个小的常数. 后来笔者和陈志杰在文献[89]中证明$(\sqrt{k_\beta}\omega_0,\sqrt{l_\beta}\omega_0)$是唯一极小能量,条件是$0<\beta<\min\{\mu_1,\mu_2\}$[89]. 这里有下面的解的唯一存在性结果.

定理18[90] 假设$\lambda_1=\lambda_2$且$\mu_1\neq\mu_2$,则$\exists\delta>0$使得$\min\{\mu_1,\mu_2\}-\delta<\beta<\min\{\mu_1,\mu_2\}$,且$(\sqrt{k_\beta}\omega_0,\sqrt{l_\beta}\omega_0)$是方程(15)的唯一正解.

对于一般情形$\lambda_1,\lambda_2>0$,回忆起(16)~(17)式中的ω_i,定义

$$\beta_1:=\inf_{\phi\in H^1(\mathbf{R}^N)\setminus\{0\}}\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla\phi|^2+\lambda_2\phi^2)\Big/\int_{\mathbf{R}^N}\omega_1^2\phi^2,$$

$$\beta_2:=\inf_{\phi\in H^1(\mathbf{R}^N)\setminus\{0\}}\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla\phi|^2+\lambda_1\phi^2)\Big/\int_{\mathbf{R}^N}\omega_2^2\phi^2.$$

下面的结论来自A. Ambrosetti和E. Colorado.

定理19[68] (i) $\forall\beta,0<\beta<\min\{\beta_1,\beta_2\}$,系统(15)有正的径向解$(U_\beta,V_\beta)$;

(ii) $\forall\beta,\beta>\max\{\beta_1,\beta_2\}$,系统(15)有正的径向对称极小能量解$(U_\beta,V_\beta)$且满足

$$E_\beta(U_\beta,V_\beta)=A_\beta<\min\{B_1,B_2\}.$$

同时,A. Ambrosetti和E. Colorado猜测定理17中(ii)的解也是径向对称极小能量解[68,Remark 5]. 后来,N. Ikoma等[87]部分回答了这个问题.

定理20[87,Propositions 2.3 and 2.5, Remark 2.6] $\forall\beta,0<\beta<\min\{\beta_1,\beta_2,\sqrt{\mu_1\mu_2}\}$,定理19中(i)的$(U_\beta,V_\beta)$是极小能量解且满足

$$E_\beta(U_\beta,V_\beta)=A_\beta>\max\{B_1,B_2\}.$$

Sirakov的问题[73,Remark 4]**:** 使得系统(15)存在非平凡非负解的最佳常数是什么?

当$\lambda_1=\lambda_2$时,这个问题由定理17完全解决了. 因为$\beta_1=\mu_1$且$\beta_2=\mu_2$,悉知β_i是$\lambda_1=\lambda_2$情形下使得极小能量解存在的最佳常数. 对一般的情形$\lambda_1\neq\lambda_2$,必须定义

$\bar{\beta}_1:=\sup\{\beta'>0$,(15)式对所有$0<\beta<\beta'$有极小能量解$\}$,

$\bar{\beta}_2:=\inf\{\beta'>0$,(15)式对所有$\beta>\beta'$有极小能量解$\}$,

那么,问题是否像$\lambda_1=\lambda_2$的情形一样,$\bar{\beta}_1=\min\{\beta_1,\beta_2\}$或者$\bar{\beta}_2=\max\{\beta_1,\beta_2\}$?如果这是对的,则$\beta_i$是使得极小能量解存在的最佳常数. 定义

$H_r:=\{(u,v)\in H:u,v$是径向对称的$\}$,

$$\mathcal{N}_\beta^*:=\mathcal{N}_\beta\cap H_r,A_\beta^*:=\inf_{(u,v)\in\mathcal{N}_\beta^*}E_\beta(u,v).$$

不失一般性,假设$\lambda_1<\lambda_2$. B. Sirakov[73]获得了以下结果.

定理21[73,Propositions 1.1] 如果A_β(或A_β^*)可以被$(u,v)\in\mathcal{N}_\beta$(或$(u,v)\in\mathcal{N}_\beta^*$)达到,且$\beta<\sqrt{\mu_1\mu_2}$,则$(u,v)$是$E_\beta$的临界点.

定理22[73] 假设$\lambda_1<\lambda_2$.

(i) $\exists\beta'>0$使得当$\beta\in(0,\beta')$时,方程(15)有正的极小能量解(u,v)满足$E_\beta(u,v)=A_\beta=A_\beta^*$;

(ii) 当$\beta\in[\mu_2,\mu_1]$时,系统(15)没有非负的非平凡解;

(iii) 当$\beta\in[\mu_2,\sqrt{\mu_1\mu_2})$时,$A_\beta$和$A_\beta^*$都是不可达到的.

定理21隐含着,对于$\beta<\sqrt{\mu_1\mu_2}$,极小能量解的存在性等价于A_β是可达的. 对上面的Sirakov的问题,笔者和陈志杰在文献[89]中给出了部分的结果.

定理23[89] 假设$\lambda_1<\lambda_2$且$\mu_1\geqslant\mu_2$,则$\beta_2<\mu_2\leqslant\mu_1<\beta_1$,并且

(i) $\exists\delta>0,\forall\beta\in(\mu_2-\delta,\mu_1+\delta)$,系统(15)没有非负的非平凡解;

(ii) $\forall\beta\in[\beta_2,\sqrt{\mu_1\mu_2})$,极小能量$A_\beta$和$A_\beta^*$均不可达到,即系统(15)无极小能量解. 由定理20可知,β_2是极小能量解存在的最佳常数.

由定理23中(i)和(ii)可以看出:当$\beta\in[\beta_2,\mu_1+\delta)$时,系统(15)没有极小能量解. 若$\lambda_1>\lambda_2$且

$\mu_1 \leqslant \mu_2$,则能获得类似的结果. 这样的话,若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 且$(\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1) \leqslant 0$,则 $\overline{\beta_1} = \min\{\beta_1, \beta_2\}$ 和 $\overline{\beta_2} = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ 是极小能量解存在的最佳常数. 这是这个方面的第一个结果[89].

问题 4 在一般情形 $\lambda_1 < \lambda_2$ 和 $\mu_1 \geqslant \mu_2$ 中,以下问题至今没有解决:

1) 仅仅能够证明 β_2 是最佳常数,则 β_1 是最佳常数吗?

2) 当 $\beta \in [\beta_2, \mu_1 + \delta)$ 时,证明极小能量解的不存在性,这里 $\delta > 0$. 若 $\beta \in [\beta_2, \beta_1]$,则猜测同样的结论也是对的,正如 $\lambda_1 = \lambda_2$ 和 $\mu_1 \neq \mu_2$ 的情形一样;

3) 仅仅能够证明当 $\beta \in (\mu_2 - \delta, \mu_1 + \delta)$ 时非平凡非负解的不存在性. 猜测,当 $\beta \in [\beta_2, \beta_1]$ 时,结论同样成立. 如果这个猜测是对的,则 $\beta_i (i = 1, 2)$ 是存在非平凡非负解的最佳常数;

4) 一般情形下的另一方面,即当 $\lambda_1 < \lambda_2$ 和 $\mu_1 < \mu_2$ 时,迄今没有关于最佳常数的任何结果. 该问题值得研究!

2.6 Bose-Einstein 凝聚薛定谔系统——4 维情形

注意到 2.5 节提到的文献都是研究 $N \leqslant 3$(即次临界)的情形. 对于 $N = 4$(即临界情形),之前没有结果. 第 1 个关于 $N = 4$ 的结果由笔者和陈志杰在文献[89]中获得,考虑

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 u^3 + \beta u v^2, & x \in \Omega, \\ -\Delta v + \lambda_2 v = \mu_2 v^3 + \beta v u^2, & x \in \Omega, \\ u \geqslant 0, v \geqslant 0, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{18}$$

当 $N = 4$ 时,Sobolev 临界指数恰好是 $2^* = 2N/(N-2) = 4$. 故上述方程系统(18)里的非线性项和耦合项都是临界增长的,从而求解带来极大的困难.

令 $\lambda_1(\Omega)$ 为 $-\Delta$ 满足 Dirichlet 边界条件的第一特征值,$\phi_1 > 0$ 为对应的第一特征函数. 系统(18)可认为是扰动的 4 维 Brezis-Nirenberg 临界指数方程. 记 $H := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. 系统(18)的能量泛函是

$$E(u,v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda_1 u^2) + \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v|^2 + \lambda_2 v^2) - \frac{1}{4}\int_\Omega (\mu_1 u^4 + 2\beta u^2 v^2 + \mu_2 v^4).$$

定义

$$\mathscr{M} = \{(u,v) \in H, u \neq 0, v \neq 0, \int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda_1 u^2) = \int_\Omega (\mu_1 u^4 + \beta u^2 v^2), \int_\Omega (|\nabla v|^2 + \lambda_2 v^2) = \int_\Omega (\mu_2 v^4 + \beta u^2 v^2)\}.$$

则 $\mathscr{M} \neq \varnothing$. 定义

$$B := \inf_{(u,v) \in \mathscr{M}} E(u,v) = \inf_{(u,v) \in \mathscr{M}} \frac{1}{4}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda_1 u^2 + |\nabla v|^2 + \lambda_2 v^2)\,\mathrm{d}x.$$

当 $-\lambda_1(\Omega) < \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ 时,由著名的文献[27]知,Brezis-Nirenberg 临界指数问题

$$-\Delta u + \lambda u = u^3, u \geqslant 0, u \in H_0^1(\Omega) \tag{19}$$

有极小能量正解 ω,它的能量是

$$B_1 := \frac{1}{4}\int_\Omega (|\nabla\omega|^2 + \lambda\omega^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_\Omega \omega^4 \mathrm{d}x.$$

进一步地

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda u^2)\,\mathrm{d}x \geqslant 2\sqrt{B_1}\left(\int_\Omega u^4 \mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

$\forall u \in H_0^1(\Omega)$.

笔者和陈志杰在文献[89]中获得

定理 24[89] 假设 $-\lambda_1(\Omega) < \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$.

(i) 如果 $0 < \beta < \min\{\mu_1, \mu_2\}$ 或者 $\beta > \max\{\mu_1, \mu_2\}$,则 B 可以被$(\sqrt{k}\omega, \sqrt{l}\omega)$达到,这里 $k, l > 0$ 满足

$$\begin{cases} \mu_1 k + \beta l = 1, \\ \beta k + \mu_2 l = 1, \end{cases} \tag{20}$$

即$(\sqrt{k}\omega, \sqrt{l}\omega)$是方程(18)的正的极小能量解;

(ii) 如果 $\beta \in [\min\{\mu_1, \mu_2\}, \max\{\mu_1, \mu_2\}]$ 且 $\mu_1 \neq \mu_2$,则方程(18)没有非平凡的非负解.

当维数 $N \leqslant 3$ 时,关于解的唯一性结果和解的分类结果可以参见文献[88]. 对于 4 维临界情形,有

定理 25[89] 假设 $-\lambda_1(\Omega) < \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ 且 $0 < \beta < \min\{\mu_1, \mu_2\}$ 或者 $\beta > \max\{\mu_1, \mu_2\}$. 如果$(u,v)$是(18)式的任意极小能量解,则$(u,v) = (\sqrt{k}U, \sqrt{l}U)$,这里$(k,l)$满足(20)式,$U$ 是(19)式的正的极小能量解. 特别地,如果 Ω 是 $\mathbf{R}^4$ 的一个球,则方程(18)的解是唯一的.

进一步考虑更一般的情形: $-\lambda_1(\Omega) < \lambda_1, \lambda_2 < 0$. 不失一般性,假设 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. 定义

$$\alpha := \min\left\{\mu_i^{-1}\left(1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_1(\Omega)}\right)^2, i = 1, 2\right\}. \tag{21}$$

定理 26[89] 假设 $-\lambda_1(\Omega) < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 0$.

(i) $\forall \beta < 0$,系统(18)有正的极小能量解(u, v)满足 $E(u,v) = B$;

(ii) $\exists \beta_1 \in (0, \min\{\mu_1, \mu_2\}]$,使得(18)式有正的极小能量解$(u,v)$满足 $E(u,v) = B$, $\forall \beta \in (0, \beta_1)$;

(iii) 令 β_2 为以下方程的最大根:

$$\beta^2 - \frac{2}{\alpha}\beta + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\alpha} - \mu_1\mu_2 = 0,$$

这里 α 由(21)式定义,则 $\beta_2 \geqslant \max\{\mu_1,\mu_2\}$,且对所有 $\beta > \beta_2$,系统(18)有正的极小能量解 (u,v) 满足 $E(u,v) = B$;

(iv) 如果 $\mu_2 \leqslant \beta \leqslant \mu_1$ 且 $\mu_2 < \mu_1$,则方程(18)没有非平凡的非负解.

当 $\beta \to -\infty$ 时,也可以研究基态解的极限行为. 物理上通常期待 2 个分量在区域 Ω 是分离的. 这种现象称为相位分离(phase separation). 当维数 $N = 2,3$ 时,这类现象在文献[82,91-95]中有过研究. 记 $\{u > 0\} := \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$.

定理 27[89] 假设 $-\lambda_1(\Omega) < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 0$. 令 $\beta_n < 0, n \in \mathbf{N}$ 满足 $\beta_n \to -\infty\ (n \to \infty)$,且 (u_n,v_n) 是方程(18)的极小能量解,则 $\int_\Omega \beta_n u_n^2 v_n^2 \mathrm{d}x \to 0, n \to \infty$. 进一步,下列结论之一成立:

(i) $u_n \to u_\infty$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中强收敛且 $v_n \rightharpoonup 0$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛,这里 u_∞ 是以下方程的极小能量解:$-\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 u^3, u \in H_0^1(\Omega)$;

(ii) $v_n \to v_\infty$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中强收敛且 $u_n \rightharpoonup 0$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛,这里 v_∞ 是以下方程的极小能量解:$-\Delta v + \lambda_2 v = \mu_2 v^3, v \in H_0^1(\Omega)$;

(iii) $(u_n,v_n) \to (u_\infty,v_\infty)$ 在 $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ 中强收敛且 $u_\infty v_\infty \equiv 0$,这里 $u_\infty \in C(\overline{\Omega})$ 是以下方程的极小能量解:$-\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 u^3, u \in H_0^1(\{u_\infty > 0\})$ 和 $v_\infty \in C(\overline{\Omega})$ 是以下方程的极小能量解:$-\Delta v + \lambda_2 v = \mu_2 v^3, v \in H_0^1(\{v_\infty > 0\})$. 更多地,$\{v_\infty > 0\}$ 和 $\{u_\infty > 0\}$ 是连通的区域满足 $\{v_\infty > 0\} = \Omega \backslash \overline{\{u_\infty > 0\}}$.

注 3 如果 $B_{\lambda_1,\mu_1} + \mu_2^{-1} S^2/4 <$ (或 $>$) $B_{\lambda_2,\mu_2} + \mu_1^{-1} S^2/4$,则定理 27 中的(ii)(或(i))不成立,即(i)(或(ii))或者(iii)成立.

方程(18)非平凡解的存在性依赖于以下极限方程(定义在全空间上)的基态解. 所以,要先研究以下方程:

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu_1 u^3 + \beta u v^2, x \in \mathbf{R}^4, \\ -\Delta v = \mu_2 v^3 + \beta v u^2, x \in \mathbf{R}^4, \\ u,v \in D^{1,2}(\mathbf{R}^4), \end{cases} \tag{22}$$

这里 $D^{1,2}(\mathbf{R}^4) := \{u \in L^2(\mathbf{R}^4) : |\nabla u| \in L^2(\mathbf{R}^4)\}$,范数为 $\|u\|_{D^{1,2}} := \left(\int_{\mathbf{R}^4} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$.

令 S 是 $D^{1,2}(\mathbf{R}^4) \hookrightarrow L^4(\mathbf{R}^4)$ 的最佳常数,从而

$$\int_{\mathbf{R}^4} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \geqslant S\left(\int_{\mathbf{R}^4} |u|^4 \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

对于 $\varepsilon > 0, y \in \mathbf{R}^4$,考虑 Aubin-Talenti 瞬子[96-97] $U_{\varepsilon,y} \in D^{1,2}(\mathbf{R}^4)$,

$$U_{\varepsilon,y}(x) := \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x-y|^2},$$

则 $U_{\varepsilon,y}$ 在 $\mathbf{R}^4$ 中满足 $-\Delta u = u^3$ 并且

$$\int_{\mathbf{R}^4} |\nabla U_{\varepsilon,y}|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^4} |U_{\varepsilon,y}|^4 \mathrm{d}x = S^2.$$

进一步,$\{U_{\varepsilon,y} : \varepsilon > 0, y \in \mathbf{R}^4\}$ 包含方程 $-\Delta u = u^3$ 在 $\mathbf{R}^4$ 中的全部正解.

明显地,方程(22)有半平凡解 $(\mu_1^{-1/2} U_{\varepsilon,y}, 0)$ 和 $(0, \mu_2^{-1/2} U_{\varepsilon,y})$. 定义 $D := D^{1,2}(\mathbf{R}^4) \times D^{1,2}(\mathbf{R}^4)$ 和 $I : D \to \mathbf{R}$,

$$I(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^4} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^4} |\nabla v|^2 - \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^4} (\mu_1 u^4 + 2\beta u^2 v^2 + \mu_2 v^4).$$

类似于文献[71],定义

$$\mathcal{N} = \left\{(u,v) \in D, u \neq 0, v \neq 0, \int_{\mathbf{R}^4} |\nabla u|^2 = \int_{\mathbf{R}^4} (\mu_1 u^4 + \beta u^2 v^2), \int_{\mathbf{R}^4} |\nabla v|^2 = \int_{\mathbf{R}^4} (\mu_2 v^4 + \beta u^2 v^2)\right\},$$

$$A := \inf_{(u,v) \in \mathcal{N}} I(u,v) = \inf_{(u,v) \in \mathcal{N}} \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^4} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \mathrm{d}x.$$

下面的结论是证明定理 26 的基础.

定理 28[89] (i) 若 $\beta < 0$,则 A 无法达到;

(ii) 若 $0 < \beta < \min\{\mu_1,\mu_2\}$ 或者 $\beta > \max\{\mu_1,\mu_2\}$,则 A 可以由 $(\sqrt{k} U_{\varepsilon,y}, \sqrt{l} U_{\varepsilon,y})$ 达到,这里 k,l 由(20)式所定义. 也就是说,$(\sqrt{k} U_{\varepsilon,y}, \sqrt{l} U_{\varepsilon,y})$ 是方程(22)的极小能量解;

(iii) 若 $\beta \in [\min\{\mu_1,\mu_2\}, \max\{\mu_1,\mu_2\}]$ 和 $\mu_1 \neq \mu_2$,则方程(22)没有非平凡的非负解.

问题 5 对于 4 维情形,相位分离是不是一定会发生?

2.7 5 维及其以上的薛定谔系统

考虑非线性 Schrödinger 方程:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 u^{2p-1} + \beta u^{p-1} v^p, x \in \Omega, \\ -\Delta v + \lambda_2 v = \mu_2 v^{2p-1} + \beta v^{p-1} u^p, x \in \Omega, \\ u \geqslant 0, v \geqslant 0, \quad x \in \Omega, \\ u = v = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{23}$$

这里 $\Omega = \mathbf{R}^N$ 或者 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 是一个有界光滑区域,$p > 1$ 和 $p \leqslant 2^*/2$ 如果 $N \geqslant 3$,$\mu_1,\mu_2 > 0$,$\beta \neq 0$ 是耦合常数. 这里考虑高维临界的情形:

$$N \geqslant 5 \text{ 且 } 2p = 2^*.$$

如果 $\Omega = \mathbf{R}^N$ 并且 (u,v) 是(23)式的任意解,由

Pohozaev 等式容易证明$\int_{\mathbf{R}^4}(\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2)\,dx = 0$,所以当$\lambda_1\lambda_2 > 0$时,有$(u,v) \equiv (0,0)$. 希望弄清楚高维情形与低维情形有没有区别. 以下结果由笔者和陈志杰证明.

定理 29[98]　假设 $-\lambda_1(\Omega) < \lambda_1,\lambda_2 < 0$,则 $\forall\beta \neq 0$,系统(23) 都有正的极小能量解(u,v).

注 4　当$N = 4$并且$2p = 2^*$时,前面的定理表明,若$\beta \in [\min\{\mu_1,\mu_2\},\max\{\mu_1,\mu_2\}]$,$\mu_1 \neq \mu_2$,则方程(23) 没有非平凡解. 但对于$N \geqslant 5$,这样的区间不再存在了. 这就说明 4 维和 5 维及其以上维数的情形是有本质区别的.

同样可以研究相位分离现象(phase separation).

定理 30[98]　假设 $-\lambda_1(\Omega) < \lambda_1,\lambda_2 < 0$. 令$\beta_n < 0$,$n \in \mathbf{N}$满足$\beta_n \to -\infty\ (n \to \infty)$,并且$(u_n,v_n)$是(23) 的正的极小能量解,则$\int_\Omega \beta_n u_n^p v_n^p\,dx \to 0$,并且下列结论之一成立.

(i) $u_n \to u_\infty$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中强收敛;$v_n \rightharpoonup 0$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛;u_∞ 是以下方程的极小能量解: $-\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1|u|^{2^*-2}u$,$u \in H_0^1(\Omega)$;

(ii) $v_n \to v_\infty$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中强收敛;$u_n \rightharpoonup 0$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛;v_∞ 是以下方程的极小能量解: $-\Delta v + \lambda_2 v = \mu_2|v|^{2^*-2}v$,$v \in H_0^1(\Omega)$;

(iii) $(u_n,v_n) \to (u_\infty,v_\infty)$ 在H中强收敛;$u_\infty v_\infty \equiv 0$,这里 $u_\infty \in C(\overline{\Omega})$ 是以下方程的极小能量解: $-\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1|u|^{2^*-2}u$,$u \in H_0^1(\{u_\infty > 0\})$ 和 $v_\infty \in C(\overline{\Omega})$ 是以下方程的极小能量解: $-\Delta v + \lambda_2 v = \mu_2|v|^{2^*-2}v$,$v \in H_0^1(\{v_\infty > 0\})$. 进一步,$\{v_\infty > 0\}$ 和 $\{u_\infty > 0\}$ 都是连通域且满足$\{v_\infty > 0\} = \Omega\backslash\overline{\{u_\infty > 0\}}$;

(iv) 若 $N \geqslant 6$,则只有以上结论(iii) 成立.

注 5　定理 30 表明,当维数$N \geqslant 6$时,相位分离一定会发生.

作为定理 30 的应用,还可以进一步研究 Brezis-Nirenberg 临界指数问题:

$$-\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1|u|^{2^*-2}u,\ u \in H_0^1(\Omega), \tag{24}$$

这里 $-\lambda_1(\Omega) < \lambda_1 < 0$,能量泛函是

$$J(u):= \frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla u|^2 + \lambda_1 u^2)\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega \mu_1|u|^{2^*}\,dx,\ u \in H_0^1(\Omega).$$

定理 31[98]　假设$N \geqslant 6$. 令(u_∞,v_∞)为定理 30 获得的解,满足$\lambda_2 = \lambda_1$和$\mu_2 = \mu_1$,则$u_\infty - v_\infty$是方程(24) 的极小能量变号解,并且

$$J(u_\infty - v_\infty) < B_{\mu_1} + \frac{1}{N}\mu_1^{-(N-2)/2}S^{N/2},$$

这里 S 为以下嵌入的最佳常数: $D^{1,2}(\mathbf{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbf{R}^N)$,

$$\int_{\mathbf{R}^4}|\nabla u|^2\,dx \geqslant S\Big(\int_{\mathbf{R}^4}|u|^{2^*}\,dx\Big)^{2/2^*},$$

且B_{μ_1}是方程(24) 的极小能量.

问题 6　当维数$N = 4,5$时,定理 30 结论(iii) 是否一定成立,即相位分离是否一定发生?

以上方程的结果,也依赖于以下高维薛定谔方程的研究:

$$\begin{cases}-\Delta u = \mu_1|u|^{2p-2}u + \beta|u|^{p-2}u|v|^p, x \in \mathbf{R}^N,\\ -\Delta v = \mu_2|v|^{2p-2}v + \beta|v|^{p-2}v|u|^p,\ x \in \mathbf{R}^N,\\ u,v \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)\end{cases} \tag{25}$$

这里$D^{1,2}(\mathbf{R}^N):=\{u \in L^{2^*}(\mathbf{R}^N): |\nabla u| \in L^2(\mathbf{R}^N)\}$,具有范数 $\|u\|_{D^{1,2}}:=\Big(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}$. 对于$\varepsilon > 0$和$y \in \mathbf{R}^N$,令 $U_{\varepsilon,y} \in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ 是 Aubin-Talenti 瞬子[96-97],

$$U_{\varepsilon,y}(x):= [N(N-2)]^{(N-2)/4}(\varepsilon/(\varepsilon^2 + |x-y|^2))^{(N-2)/2},$$

则 $U_{\varepsilon,y}$ 在 $\mathbf{R}^N$ 中满足方程 $-\Delta u = |u|^{2^*-2}u$,并且

$$\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla U_{\varepsilon,y}|^2\,dx = \int_{\mathbf{R}^N}|U_{\varepsilon,y}|^{2^*}\,dx = S^{N/2}.$$

进一步,$\{U_{\varepsilon,y}: \varepsilon > 0, y \in \mathbf{R}^N\}$ 包含方程 $-\Delta u = |u|^{2^*-2}u$,$x \in \mathbf{R}^N$ 的全部正解. 定义 $D:= D^{1,2}(\mathbf{R}^N) \times D^{1,2}(\mathbf{R}^N)$. 以上方程组的能量泛函为 $I: = D \to \mathbf{R}$,

$$I(u,v):= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) - \frac{1}{2p}\int_{\mathbf{R}^N}(\mu_1|u|^{2p} + 2\beta|u|^p|v|^p + \mu_2|v|^{2p}).$$

记

$$\mathcal{N} = \{(u,v) \in D: u \neq 0, v \neq 0, I'(u,v)(u,0) = I'(u,v)(0,v) = 0\},$$

$$A:= \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}} I(u,v) = \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}} \frac{1}{N}\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,dx.$$

有以下结果.

定理 32[98]　若$\beta < 0$,则A是不可达到的. 如果$\beta > 0$,则(25) 式有正的极小能量解(U,V)满足$I(U,V) = A$,而且是径向对称递减的. 更多地,若$\beta \geqslant 2\max\{\mu_1,\mu_2\}/(N-2)$,则$I(\sqrt{k_0}U_{\varepsilon,y},\sqrt{l_0}U_{\varepsilon,y}) = A$,这里$(k_0,l_0)$满足以下方程组:

$$\begin{cases}\mu_1 k^{p-1} + \beta k^{p/2-1}l^{p/2} = 1,\\ \beta k^{p/2}l^{p/2-1} + \mu_2 l^{p-1} = 1,\\ k > 0, l > 0,\end{cases} \tag{26}$$

即$(\sqrt{k_0}U_{\varepsilon,y},\sqrt{l_0}U_{\varepsilon,y})$是方程(25)的正的极小能量解.另一方面,$\exists\beta_1,0<\beta_1\leqslant 2\max\{\mu_1,\mu_2\}/(N-2)$,并且$\forall\beta,0<\beta<\beta_1$,在(26)式中$\exists(k(\beta),l(\beta))$,满足$I(\sqrt{k(\beta)}U_{\varepsilon,y},\sqrt{l(\beta)}U_{\varepsilon,y})>A=I(U,V)$.也就是说,$(\sqrt{k(\beta)}U_{\varepsilon,y},\sqrt{l(\beta)}U_{\varepsilon,y})$是方程(25)的与$(U,V)$不同的解.

注6 当维数$N=4$并且$2p=2^*$时,前面已经知道,若$\beta\in[\min\{\mu_1,\mu_2\},\max\{\mu_1,\mu_2\}]$,$\mu_1\neq\mu_2$,则方程(25)没有非平凡的正解;但在高维情形下,$(\sqrt{k(\beta)}U_{\varepsilon,y},\sqrt{l(\beta)}U_{\varepsilon,y})$是(25)式的正的极小能量解,如果$0<\beta\leqslant\min\{\mu_1,\mu_2\}$.这进一步说明高维和低维的本质不同.

定理33[98] 存在常数β_0,假设$\beta>\beta_0$.如果(u,v)是方程(25)的任意正的极小能量解,则对$\varepsilon>0$和$y\in\mathbf{R}^N$,$(u,v)=(\sqrt{k_0}U_{\varepsilon,y},\sqrt{l_0}U_{\varepsilon,y})$.

注7 关于Schrödinger方程组的更多结果,可参见文献[89-90,98-114],包括无穷多变号解、半变号解、变号的极小能量解的存在性[108].

2.8 Berestycki-Caffarelli-Nirenberg 猜测

3位著名数学家H. Berestycki、L. Caffarelli和L. Nirenberg在系列文献[115-118]中研究了以下定义在半空间上的微分方程的非负有界解:

$$\begin{cases}\Delta u+f(u)=0,\mathbf{R}_+^n=\{(x',x_n)\mid\\ \qquad x'\in\mathbf{R}^{n-1},x_n>0\},\\ u=0,x_n=0,\end{cases}\tag{27}$$

获得了以下重要定理.

定理34[115-118] 如果$f(u)$是Lipschitz且$f(M)\leqslant 0$,这里$M=\sup u$,则u仅仅是x_n的函数,且当$x_n>0$时,$u_{x_n}>0$.进一步,$f(M)=0$.

对于文献[115,118],笔者提出以下猜测:

BCN猜测:如果(27)式有正的有界解u,则必有$f(M)=0$.

文献[118]证明了当维数$n=2,3$时BCN猜测是成立的.随后,由A. Farina等[119]证明了当$n\leqslant 5$时该猜测也成立.其它维数情形,还没有解决.明显地,如果该猜测是对的,则当$f(s)>0(s>0)$时,方程(27)应该没有正解.反之,如果没有正解,则该猜测自然是成立的.故下面研究该方程何时没有正解存在.假设

(f_1):$f\in C^1(\mathbf{R}_+)\cap C^2(\mathbf{R}_+)$和$f''(u)\geqslant 0(u>0)$.

一个典型的例子是$f(t)=\lambda t+t^p$,这里$\lambda\in\mathbf{R}$且$p>1$,则f满足(f_1).笔者和陈志杰及林长寿合作证明

定理35[109] 假设$f(0)=0$以及(f_1)成立.如果u是方程(27)的非负有界解,则$u(x)\equiv 0$,$(x,x_n)\in\mathbf{R}_+^n$.

一个非常重要的模型是Lane-Emden系统[120-121]:

$$\begin{cases}\Delta u+v^q=0,(x',x_n)\in\mathbf{R}_+^n,\\ \Delta v+u^p=0,(x',x_n)\in\mathbf{R}_+^n,\\ u(x',0)=v(x',0)=0.\end{cases}\tag{28}$$

长期以来人们猜测,关于指数p,q使得刘维尔型定理成立的最佳范围应该是$\min\{p,q\}>1$,但一直没有得到完全解决.在下面的定理中,给出了肯定的回答.

定理36[109] 假设$\min\{p,q\}>1$.如果(u,v)是Lane-Emden系统(28)的非负有界解,则一定有$u\equiv v\equiv 0$,$(x,x_n)\in\mathbf{R}_+^n$.

半空间的椭圆系统有大量的未解决问题.Lane-Emden系统本身也有很多猜测没有解决.

2.9 Lane-Emden 猜测

过去40年来,著名的Lane-Emden方程

$$-\Delta u=u^p\tag{29}$$

及相应的抛物方程形式$u_t-\Delta u=u^p$在非线性PDE的发展中发挥了重要作用.关于方程(29)的一个基本结果是由B. Gidas和J. Spruck给出的如下形式的Liouville型定理.

定理37[122] 如果

$$0<p<p_s:=\begin{cases}\infty, & N\leqslant 2,\\ (N+2)/(N-2), & N\geqslant 3,\end{cases}$$

则方程$-\Delta u=u^p$,$x\in\mathbf{R}^N$不存在正古典解.

此外,Sobolev指数p_s扮演了关键角色:若$N\geqslant 3$且$p>p_s$,则方程(29)没有正的(径向有界)古典解.该定理在椭圆方程和抛物方程中有很多应用[121].与方程(29)相对应的是椭圆系统,即如下形式的Lane-Emden系统:

$$\begin{cases}-\Delta u=v^p,x\in\mathbf{R}^N,\\ -\Delta v=u^p,x\in\mathbf{R}^N.\end{cases}\tag{30}$$

在考虑解的存在性与非存在性问题时,单个方程(29)中的Sobolev指数p_s替换为如下的Sobolev双曲线[123-124]:

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}=1-\frac{2}{N}.$$

在过去几十年中,很多学者对系统(30)提出了类似于定理37的Liouville型猜想[123-133].

Lane-Emden 猜测　设 $p,q>0$,若(p,q)满足次临界条件,即

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}>1-\frac{2}{N},\qquad(31)$$

则系统(30)不存在正古典解.

Lane-Emden 猜想是超线性椭圆系统研究中的重要问题. 对于径向解,Lane-Emden 猜想已由 E. Mitidieri 证得[124],并且在此情形下条件(31)最优,即当(p,q)是临界或超临界时,系统(30)存在正的径向古典解[134-135]. 对于非径向解,Lane-Emden 猜想只有部分结果. 文献[32,135-136]均得到,当

$$pq\leqslant 1 \text{ 或 } pq>1 \text{ 且 } \max\{\alpha,\beta\}\geqslant N-2\qquad(32)$$

时,系统(30)不存在正的古典上解,并且对于上解,条件(32)最优[137]. 这也就意味着 Lane-Emden 猜想对于 $N=1,2$ 成立. 注意到,当 $N\geqslant 3$ 时,条件(32)比条件(31)强. 记

$$\alpha=\frac{2(p+1)}{pq-1},\beta=\frac{2(q+1)}{pq-1}(pq>1).$$

当维数 $N=3$ 时,文献[32]证得: 若考虑多项式有界解,则 Lane-Emden 猜想成立. 之后,文献[30]证明: 去掉解的多项式有界性,Lane-Emden 猜想也成立.

当维数 $N\geqslant 4$ 时,D. G. de Figueiredo 和 P. Felmer[129] 以及 W. Reichel 和 Zou Henghui[131] 均得到: 在次临界情形 $\max\{\alpha,\beta\}\leqslant p_s$,$(p,q)\neq(p_s,p_s)$ 下,系统(30)不存在正古典解. J. Busca 等[126] 得到,当

$$\min\{\alpha,\beta\}\geqslant\frac{N-2}{2},(\alpha,\beta)\neq\left(\frac{N-2}{2},\frac{N-2}{2}\right)\qquad(33)$$

时,系统(30)不存在正古典解.

Lin Changshou[138] 得到,对于双调和情形:

$$q=1,p<\frac{N+4}{(N-4)_+},\qquad(34)$$

系统(30)不存在正古典解. 注意到(34)式包括了指数为次临界情形 $\max\{p,q\}\leqslant p_s$. 注意到,(33)式和(34)式均比(31)式强. P. Souplet[137] 得到,当 $N=3,4$ 时 Lane-Emden 猜想成立. 同时,文献[37]中也得到,当 $N\geqslant 5$ 且 $p,q>0,pq>1$ 满足(31)式以及 $\max\{\alpha,\beta\}>N-3$ 时,系统(30)不存在正古典解.

问题7　当 $N\geqslant 5,p,q>0,pq>1$,满足(31)式以及 $\max\{\alpha,\beta\}\leqslant N-3$ 时,系统(30)是否存在正古典解?

3　参考文献

[1] 吴文俊. 世界著名数学家传记: 上下集[M]. 北京: 科学出版社出版,1997.

[2] Ambrosotti A,Rabinowitz P H. Dual variational methods in critical point theory and applications[J]. J Func Anal,1973,14(4):349-381.

[3] "1 000 个数学难题"数学编委会. 10 000 个科学难题: 数学卷[M]. 北京: 科学出版社,2009.

[4] Zou Wenming,Schechter M. Critical point theory and its application[M]. New York: Springer,2006.

[5] Schechter M,Zou Wenming. Semi-classical bound states of Schrödinger equations[J]. Math Proc Cambridge Philos Soc,2014,156(1):167-181.

[6] Schechter M,Zou Wenming. Double linking theorem and multiple solutions[J]. J Functional Analysis,2003,205(1):37-61.

[7] Szulkin A,Zou Wenming. Homoclinic orbit for asymptotically linear Hamiltonian systems[J]. J Function Analysis,2001,187(1):25-41.

[8] Rabinowitz P H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations[M]. Rhode Island: America Mathematical Society,1986.

[9] Rabinowitz P H. Minimax methods and their application to partial differential equations[M]//Berkeley Calif. Seminar on nonlinear partial differential equations. New York: Springer,1984: 307-320.

[10] Struwe M. Variational methods: applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems[M]. Berlin: Springer-Verlag,1996.

[11] Benci V,Rabinowitz P H. Critical point theorems for indefinite functionals[J]. Invent Math,1979,52(3):241-273.

[12] Lazer A C,Solimini S. Nontrivial solutions of operator equations and Morse indices of critical points of min-max type[J]. Nonlinear Anal TMA,1988,12(8):761-775.

[13] Silva E A B. Subharmonic solutions for subquadratic Hamiltonian systems[J]. J Differential Equations,1995,115(1):120-145.

[14] Furtado M F,Maia L A,Silva E A B. On a double resonant problem in $\mathbf{R}^N$[J]. Differential Integral Equations,2002,15(11):1335-1344.

[15] Furtado M F,Maia L A,Silva E A B. Solutions for a resonant elliptic system with coupling in $\mathbf{R}^N$[J]. Comm Partial Differential Equations,2002,27(7/8):1515-1536.

[16] Zou Wenming. Sign-Changing critical point theory[M]. New York: Springer,2008: 278.

[17] Zou Wenming. On finding Sign-Changing solutions[J]. J Functional Analysis,2006,234(2):364-419.

[18] Zou Wenming. Sign-Changing saddle point[J]. J Functional Analysis,2005,219(2):433-468.

[19] Zou Wenming,Li Shujie. On Schechter's linking theorems [J]. J Functional Analysis,2010,258(10):3347-3361.

[20] Bahri A,Lions P L. Morse index of some min-max critical points I: application to multiplicity results [J]. Comm Pure Appl Math,1988,41(8):1027-1037.

[21] Ramos M,Tavares H,Zou Wenming. A Bahri-Lions theorem revisted [J]. Advances in Mathematics,2009,222(6):2173-2195.

[22] Hirano N,Zou Wenming. A purerbation method for multiple Sign-Changing solutions [J]. Calc Var PDE,2010,37(1/2):87-98.

[23] Yamabe H. On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds [J]. Osaka Math J,1960,12(1):21-37.

[24] Trudinger N. Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds [J]. Ann Scuola Norm Sup Pisa,1968,22(3):265-274.

[25] Aubin T. Equations differentielles non lineaires et probleme de Yamabe concernant la courbure scalaire [J]. J Math Pures Appl,1976,55(3):269-296.

[26] Schoen R. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature [J]. J Differential Geom,1984,20(2):479-495.

[27] Brezis H,Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents [J]. Comm Pure Appl Math,1983,36(4):437-477.

[28] Capozzi A,Fortunato D,Palmieri G. An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent [J]. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire,1985,2(6):463-470.

[29] Zhang Dong. On multiple solutions of $\Delta u+\lambda u+|u|^{4/(n-2)}u=0$ [J]. Nonlinear Anal,1989,13(4):353-372.

[30] Fortunato D,Jannelli E. Infinitely many solutions for some nonlinear elliptic problems in symmetrical domains [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A,1987,105(1):205-213.

[31] Cerami G,Solimini S,Struwe M. Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents [J]. J Funct Anal,1986,69(3):289-306.

[32] Lazzo M. Solutions positives multiples pour unequation elliptique nonlineaire avec lexposant critique de Sobolev [J]. C R Acad Sci Paris Sér I Math,1992,314(1):61-64.

[33] Devillanova G,Solimini S. Concentration estimates and multiple solutions to elliptic problems at critical growth [J]. Adv Differential Equations,2002,7(10):1257-1280.

[34] Cao Daomin,Peng Shuangjie,Yan Shusen. Infinitely many solutions for p-Laplacian equation involving critical Sobolev growth [J]. J Funct Anal,2012,262(6):2861-2902.

[35] Schechter M,Zou Wenming. On a Brézis-Nirenberg theorem [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis,2010,197(1):337-356.

[36] Devillanova G,Solimini S. A multiplicity result for elliptic equations at critical growth in low dimension [J]. Commun Contemp Math,2003,5(2):171-177.

[37] Clapp M,Weth T. Multiple solutions for the Brezis-Nirenberg problem [J]. Adv Differential Equations,2005,10(4):463-480.

[38] Chen Zhijie,Shioji N,Zou Wenming. Ground state and multiple solutions for a critical exponent problem [J]. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl,2012,19(3):253-277.

[39] Berestycki H,Lions P L. Nonlinear scalar field equations (I): existence of a ground state [J]. Arch Ration Mech Anal,1983,82(4):313-346.

[40] Berestycki H,Lions P L. Nonlinear scalar field equations (II): existence of infinitely many solutions [J]. Arch Ration Mech Anal,1983,82(4):347-375.

[41] Berestycki H,Gallouët T,Kavian O. Equations de champs scalaires euclidiens non linéaire dans le plan [J]. C R Acad Sci Paris: Paris Ser I Math,1983,297(2):307-310.

[42] Brezis H,Lieb E H. Minimum action solutions of some vector field equations [J]. Commun Math Phys,1984,96(1):97-113.

[43] Hirata J,Ikoma N,Tanaka K. Nonlinear scalar field equations in $\mathbf{R}^N$: mountain pass and symmetric mountain pass approaches [J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis,2010,35(2):253-276.

[44] Zhang Jianjun,Zou Wenming. A Berestycki-Lions theorem revisited [J]. Comm Contemp Math,2012,14(5):1250033.

[45] Pino M D,Felmer P L. Spike-layered solutions of singularly perturbedelliptic problems in a degenerate setting [J]. Indiana Univ Math J,1999,48(3):883-898.

[46] Gardner R,Peletier L A. The set of positive solutions of semilinear equations in large balls [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A,1986,104(1/2):53-72.

[47] Jang J D. On spike solutions of singularly perturbed semilinear Dirichlet problems [J]. J Differential Equations,1994,114(2):370-395.

[48] Li Yanyan,Nirenberg L. The Dirichlet problem for singularly perturbed elliptic equations [J]. Comm Pure Appl Math,1998,51(11/12):1445-1490.

[49] Ni Weiming,Wei Juncheng. On the location and profile of spike-layer solutions to singularly perturbed semilinear Dirichlet problems [J]. Commun Pure Appl Math,1995,48(7):731-768.

[50] Ni Weiming, Takagi I, Wei Juncheng. On the location and profile of spike-layer solutions to a singularly perturbed semilinear Dirichlet problem: intermediate solutions [J]. Duke Math J, 1998, 94(3): 597-618.

[51] Noussair E, Yan Shusen. The effect of the domain geometry in singular perturbation problems [J]. Proc London Math Soc, 1998, 76(2): 427-452.

[52] Byeon J. Mountain pass solutions for singularly perturbed nonlinear Dirichlet problems [J]. J Differential Equations, 2005, 217(2): 257-281.

[53] Byeon J. Singularly perturbed nonlinear Dirichlet problems with a general nonlinearity [J]. Trans Amer Math Soc, 2010, 362(4): 1981-2001.

[54] Pohozaev S I. On the eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ [J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1965, 165(6): 36-39.

[55] Alves C O, Souto Marco A S, Montenegro Marcelo. Existence of a ground state solution for a nonlinear scalar field equation with critical growth [J]. Calculus of Variations and PDE, 2012, 43(3/4): 537-554.

[56] Byeon J, Zhang Jianjun, Zou Wenming. Singularly perturbed nonlinear Dirichlet problems involving critical growth [J]. Calc Var PDE, 2013, 47(1/2): 65-85.

[57] Alves C O, Marcos do Ó J, Souto M A S. Local mountain-pass for a class of elliptic problems in $\mathbf{R}^N$ involving critical growth [J]. Nonlinear Anal, 2001, 46(4): 495-510.

[58] Berestycki H, Wei Juncheng. On the least energy solutions to a semilinear elliptic equation in a strip [J]. Disc Conti Dyn Sys, 2010, 28(3): 1083-1099.

[59] Ruiz D, Willem M. Elliptic problems with critical exponents and Hardy potentials [J]. J Differential Equations, 2003, 190(2): 524-538.

[60] Caffarelli L, Kohn R, Nirenberg L. First order interpolation inequalities with weights [J]. Compositio Mathematica, 1984, 53(3): 259-275.

[61] Lin Changshou. Interpolation inequalities with weights [J]. Comm Partial Differential Equations, 1986, 11(14): 1515-1538.

[62] Ghoussoub N, Robert F. The effect of curvature on the best constant in the Hardy-Sobolev inequalities [J]. Geom Funct Anal, 2006, 16(6): 1201-1245.

[63] Li Yanyan, Lin Changshou. A nonlinear elliptic pde with two Sobolev-Hardy critical exponents [J]. Arch Ration Mech Anal, 2012, 203(3): 943-968.

[64] Cerami G, Zhong Xuexiu, Zou Wenming. On some nonlinear elliptic PDEs with Sobolev-Hardy critical exponents and a Li-Lin open problem [J]. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 54(2): 1793-1829.

[65] Frantzeskakis D J. Dark solitons in atomic Bose-Einstein condensates: from theory to experiments [J]. J Phys A: Math Theor, 2010, 43(21): 213001.

[66] Kivshar Y S, Luther-Davies B. Dark optical solitons: physics and applications [J]. Physics Reports, 1998, 298(2/3): 81-197.

[67] Esry B, Greene C, Burke J, et al. Hartree-Fock theory for double condesates [J]. Phys Rev Lett, 1997, 78(19): 3594-3597.

[68] Ambrosetti A, Colorado E. Bound and ground states of coupled nonlinear Schrödinger equations [J]. C R Math Acad Sci Paris, 2006, 342(7): 453-458.

[69] Ambrosetti A, Colorado E. Standing waves of some coupled nonlinear Schröinger equations [J]. J London Math Soc, 2007, 75(1): 67-82.

[70] Bartsch T, Wang Zhiqiang, Wei Juncheng. Bound states for a coupled Schrödinger system [J]. J Fixed Point Th Appl, 2007, 2(2): 353-367.

[71] Lin Taichia, Wei Juncheng. Ground state of coupled nonlinear Schrödinger equations in $\mathbf{R}^n$, $n \leqslant 3$ [J]. Commun Math Phys, 2005, 255(3): 629-653.

[72] Maia L, Montefusco E, Pellacci B. Positive solutions for a weakly coupled nonlinear Schrödinger systems [J]. J Differ Eqs, 2006, 229(2): 743-767.

[73] Sirakov B. Least energy solitary waves for a system of nonlinear Schrödinger equations in $\mathbf{R}^n$ [J]. Commun Math Phys, 2007, 271(1): 199-221.

[74] Lin Taichia, Wei Juncheng. Spikes in two coupled nonlinear Schrödinger equations [J]. Ann Inst H Poincaré AN, 2005, 22(4): 403-439.

[75] Lin Taichia, Wei Juncheng. Spikes in two-component systems of nonlinear Schrödinger equations with trapping potentials [J]. J Differ Eqs, 2006, 229(2): 538-569.

[76] Maia L, Pellacci B, Squassina M. Semiclassical states for weakly coupled nonlinear Schrödinger systems [J]. J Eur Math Soc, 2007, 10(1): 47-71.

[77] Pomponio A. Coupled nonlinear Schrödinger systems with potentials [J]. J Differ Eqs, 2006, 227(1): 258-281.

[78] Bartsch T, Dancer N, Wang Zhiqiang. A Liouville theorem, a priori bounds, and bifurcating branches of positive solutions for a nonlinear elliptic system [J]. Calc Var PDE, 2010, 37(3/4): 345-361.

[79] Dancer N, Wei Juncheng, Weth T. A priori bounds versus multiple existence of positive solutions for a nonlinear Schrödinger systems [J]. Ann Inst H Poincaré AN, 2010, 27(3): 953-969.

[80] Liu Zhaoli, Wang Zhiqiang. Multiple bound states of nonlinear Schrödinger systems [J]. Commun Math Phys,

2008,282(3):721-731.

[81] Wei Juncheng,Weth T. Nonradial symmetric bound states for a system of two coupled Schrödinger equations [J]. Rend Lincei Mat Appl,2007,18(1):279-293.

[82] Wei Juncheng,Weth T. Radial solutions and phase separation in a system of two coupled Schrödinger equations [J]. Arch Ration Meth Anal,2008,190(1):83-106.

[83] Wu Yuanze,Wu Tsungfang,Zou Wenming. On a two-component Bose-Einstein condensate with steep potential wells [J]. Ann Mat Pura Appl,2017,196(5):1695-1737.

[84] Conti M,Teraccini S,Verzini G. Nehari´s problem and competing species systems [J]. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire,2002,19(6):871-888.

[85] Conti M,Teraccini S,Verzini G. An optimal partition problem related to nonlinear eigenvalues [J]. J Funct Anal,2003,198(1):160-196.

[86] de Figueiredo D G,Lopes O. Solitary waves for some nonlinear Schrödinger systems [J]. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire,2008,25(1):149-161.

[87] Ikoma N,Tanaka K. A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrödinger equations [J]. Calc Var PDE,2011,40(3/4):449-480.

[88] Wei Juncheng,Yao Wei. Uniqueness of positive solutions to some coupled nonlinear Schrödinger equations [J]. Comm Pure Appl Anal,2012,11(3):1003-1011.

[89] Chen Zhijie,Zou Wenming. Positive least energy solutions and phase separation for coupled Schrödinger equations with critical exponent [J]. Arch Ration Mech Anal,2012,205(2):515-551.

[90] Chen Zhijie,Zou Wenming. An optimal constant for the existence of least energy solutions of a coupled Schrödinger system [J]. Calc Var PDE,2013,48(3/4):695-711.

[91] Wei Juncheng,Weth T. Asymptotic behaviour of solutions of planar elliptic systems with strong competition [J]. Nonlinearity,2008,21(2):305-317.

[92] Noris B,Tavares H,Terracini S,et al. Uniform Hölder bounds for nonlinear Schrödinger systems with strong competition [J]. Comm Pure Appl Math,2010,63(3):267-302.

[93] Caffarelli L A,Lin Fanghua. Singularly perturbed elliptic systems and multi-valued harmonic functions with free boundaries [J]. J Amer Math Soc,2008,21(3):847-862.

[94] Caffarelli L A,Roquejoffre J M. Uniform Höder estimates in a class of elliptic systems and applications to singular limits in models for diffusion flames [J]. Arch Ration Mech Anal,2007,183(3):457-487.

[95] Conti M,Terracini S,Verzini G. Asymptotic estimates for the spatial segregation of competitive systems [J]. Adv Math,2005,195(2):524-560.

[96] Aubin T. Problemes isoperimetriques et espaces de Sobolev [J]. J Diff Geom,1976,11(4):573-598.

[97] Talenti G. Best constant in Sobolev inequality [J]. Ann Mat Pure Appl,1976,110(1):352-372.

[98] Chen Zhijie,Zou Wenming. Positive least energy solutions and phase separation for coupled Schrödinger equations with critical exponent: higher dimensional case [J]. Calc Var Partial Differential Equations,2015,52(1/2):423-467.

[99] Chen Zhijie,Zou Wenming. Existence and symmetry of positive ground states for a doubly critical Schrödinger system [J]. Trans Amer Math Soc,2015,367(5):3599-3646.

[100] Chen Zhijie,Zou Wenming. Standing waves for a coupled system of nonlinear Schrödinger equations [J]. Ann Mat Pura Appl,2015,194(1):183-220.

[101] Chen Zhijie,Lin Changshou,Zou Wenming. Sign-changing solutions and phase separation for an elliptic system with critical exponent [J]. Comm Partial Differential Equations,2014,39(10):1827-1859.

[102] Chen Zhijie,Zou Wenming. A remark on doubly critical elliptic systems [J]. Calc Var Partial Differential Equations,2014,50(3/4):939-965.

[103] Chen Zhijie,Zou Wenming. Standing waves for linearly coupled Schrödinger equations with critical exponent [J]. Ann Inst H Poincare Anal Non Lineaire,2014,31(3):429-447.

[104] Chen Zhijie,Zou Wenming. On linearly coupled Schrödinger systems [J]. Proc Amer Math Soc,2014,142(1):323-333.

[105] Chen Zhijie,Zou Wenming. Standing waves for coupled nonlinear Schrodinger equations with decaying potentials [J]. J Math Phys,2013,54(11):453-458.

[106] Chen Zhijie,Zou Wenming. On the Brezis-Nirenberg problem in a ball [J]. Differential Integral Equations,2012,25(5/6):527-542.

[107] Chen Zhijie,Zou Wenming. Ground states for a system of Schrödinger equations with critical exponent [J]. J Funct Anal,2012,262(7):3091-3107.

[108] Chen Zhijie,Lin Changshou,Zou Wenming. Infinitely many sign-changing and semi-nodal solutions for a nonlinear Schrödinger system [J]. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa,Classe di Scienze,2016,15(5):859-897.

[109] Chen Zhijie,Lin Changshou,Zou Wenming. Monotonicity and nonexistence results to cooperative systems in the half space [J]. J Funct Anal,2014,266(2):1088-1105.

[10] Long Wei, Peng Shuangjie. Segregated vector solutions for a class of Bose-Einstein systems [J]. J Differential Equations, 2014, 257(1): 207-230.

[11] Long Wei, Wang Qingfang. Segregated and synchronized vector solutions to linearly coupled systems of Schrödinger equations [J]. J Math Phys, 2015, 56(9): 091507.

[12] Peng Shuangjie, Wei Shuai, Wang Qingfang. Multiple positive solutions for linearly coupled nonlinear elliptic systems with critical exponent [J]. J Differential Equations, 2017, 263(1): 709-731.

[13] He Qihan, Peng Shuangjie. Synchronized vector solutions to an elliptic system [J]. Proc Amer Math Soc, 2016, 144(9): 4055-4063.

[14] Yang Jianfu, Yu Xiaohui. Existence of a cooperative elliptic system involving Pucci operator [J]. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2010, 30(1): 137-147.

[15] Berestycki H, Caffarelli L, Nirenberg L. Symmetry for elliptic equations in a half space [M] // Lions J L, Baiocchi C. Boundary value problems for partial differential equations and applications. Paris: Masson, 1993: 27-42.

[16] Berestycki H, Caffarelli L, Nirenberg L. Inequalities for second order elliptic equations with applications to unbounded domains(I) [J]. Duke Math J, 1996, 81(2): 467-494.

[17] Berestycki H, Caffarelli L, Nirenberg L. Monotonicity for elliptic equations in an unbounded Lipschitz domain [J]. Comm Pure Appl Math, 1997, 50(11): 1089-1112.

[18] Berestycki H, Caffarelli L, Nirenberg L. Further qualitative properties for elliptic equations in unbounded domains [J]. Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci, 1997, 25(1): 69-94.

[19] Farina A, Valdinoci E. Flattening results for elliptic PDEs in unbounded domains with applications to overdetermined problems [J]. Arch Ration Mech Anal, 2010, 195(3): 1025-1058.

[20] Cowan C. Liouville theorems for stable Lane-Emden systems and biharmonic problems [J]. Nonlinearity, 2013, 26(8): 2357-2371.

[21] Quittner P, Souplet Ph. Superlinear parabolic problems: blow-up, global existence and steady states [M]. Berlin: Springer, 2007.

[22] Gidas B, Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations [J]. Comm Pure Appl Math, 1981, 34(4): 525-598.

[23] Mitidieri E. A Rellich type identity and applications [J]. Comm Partial Differential Equations, 1993, 18(1/2): 125-151.

[24] Mitidieri E. Nonexistence of positive solutions of semilinear elliptic systems in $\mathbf{R}^N$ [J]. Differential Integral Equations, 1996, 9(3): 465-479.

[25] Birindelli I, Mitidieri E. Liouville theorems for elliptic inequalities and applications [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 1998, 128(6): 1217-1247.

[26] Busca J, Manasevich R. A Liouville-type theorem for Lane-Emden system [J]. Indiana Univ Math J, 2002, 51(1): 37-51.

[27] Clement Ph, de Figueiredo D G, Mitidieri E. Positive solutions of semilinear elliptic systems [J]. Comm Partial Differential Equations, 1992, 17(5/6): 923-940.

[28] de Figueiredo D G. Semilinear elliptic systems [M] // Ambrosetti A, Chang K C, Ekeland I. Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations. Nanjing: World Sci Publishing, 1998: 122-152.

[29] de Figueiredo D G, Felmer P. A Liouville-type theorem for elliptic systems [J]. Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci, 1994, 21(4): 387-397.

[30] Polacik P, Quittner P, Souplet Ph. Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems Part I: Elliptic equations and systems [J]. Duke Math J, 2007, 139(3): 555-579.

[131] Reichel W, Zou Henghui. Non-existence results for semilinear cooperative elliptic systems via moving spheres [J]. J Differential Equations, 2000, 161(1): 219-243.

[32] Serrin J, Zou Henghui. Non-existence of positive solutions of Lane-Emden systems [J]. Differential Integral Equations, 1996, 9(4): 635-653.

[33] Serrin J, Zou Henghui. Existence of positive solutions of the Lane-Emden system [J]. Atti Semin Mat Fis Univ Modena, 1998, 46(suppl): 369-380.

[34] Serrin J, Zou Henghui. Non-existence of positive solutions of semilinear elliptic systems [J]. Discourses Math Appl, 1994, 3: 55-68.

[35] de Figueiredo D G, Yang Jianfu. A priori bounds for positive solutions of a non-variational elliptic system [J]. Comm Partial Differential Equations, 2001, 26(11/12): 2305-2321.

[36] Souto M A S. A priori estimates and existence of positive solutions of non-linear cooperative elliptic systems [J]. Differential Integral Equations, 1995, 8(4): 1245-1258.

[37] Souplet P. The proof of the Lane-Emden conjecture in four space dimensions [J]. Adv Math, 2009, 221(5): 1409-1427.

[38] Lin Changshou. A classification of solutions of a conformally invariant fourth order equation in $\mathbf{R}^n$ [J]. Comment Math Helv, 1998, 73(2): 206-231.

(下转第 207 页)

经济激励机制研究［J］. 企业经济，2012(2)：38-42.

［13］浦徐进，诸葛瑞杰. 考虑供应商过度自信和公平关切的供应链双边努力行为研究［J］. 计算机集成制造系统，2014，20(6)：1462-1470.

［14］浦徐进，诸葛瑞杰. 过度自信和公平关切对装备制造业供应链联合研发绩效的影响［J］. 管理工程学报，2017，31(1)：10-15.

［15］曾剑锋，柳键. 碳减排背景下闭环供应链生产与回收策略研究［J］. 江西师范大学学报：自然科学版，2015，39(5)：536-544.

The Supply Chain Coordination Based on Carbon Reduction of Overconfident Manufacturer

LIU Jian[1*]，JIANG Weifan[1,2*]，TANG Yiping[2]

(1. School of Information Technology，Jiangxi University of Finance and Economics，Nanchang Jiangxi　330013，China；
2. School of Business Administration，Nanchang Institute of Technology，Nanchang Jiangxi　330099，China)

Abstract: Based on the background of low carbon economy，according to the different mode of supply chain decisions，the supply chain coordination under the influence of the low carbon consciousness is studied. The overconfidence is introduced into a supply chain decision model which is made up of one manufacturer and one retailer. The studies show that the ratio of carbon reduction and total profit of the supply chain of centralized decision-making is higher than decentralized decision-making. Overconfidence can increase the ratio of carbon emissions，wholesale price，retail price，and manufacturers expect profits，but the real profit of the supply chain decreases continuously with the increase of overconfidence level.

Key words: ratio of carbon reduction；overconfidence；supply chain coordination

(责任编辑：曾剑锋)

(上接第 129 页)

Results and Open Problems of the Variational Method with Applications to Nonlinear Partial Differential Equations

ZOU Wenming

(Department of Mathematical Sciences，Tsinghua University，Beijing 100084，China)

Abstract: The brief history and the development trend of the variational method are introduced. Then the fundamental ideas and the latest achievements of the variational method with applications to nonlinear partial differential equations are summarized. The critical point theory and its applications are briefly reviewed，including the perturbed equation from symmetry，Rabinowitz′s open problem，Brezis-Nirenberg′s critical exponent equation，Li-Lin′s open problem，Bose-Einstein condensation，Berestycki-Caffarelli-Nirenberg′s conjecture and Lane-Emden′s equation and conjecture.

Key words: variational method；nonlinear partial differential equations；linking theory；critical exponent；critical point theory；Schrödinger equations

(责任编辑：王金莲)