第 42 卷 第 3 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 42 No. 3
2018 年 5 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　May 2018

文章编号:1000-5862(2018)03-0242-06

一类特殊 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式的简单证明

刘　敏[1,2],钟学秀[3*]

(1. 辽宁石油化工大学科学学院,辽宁 抚顺　113001;2. 北京师范大学数学科学学院,北京　100084;3. 中山大学数学学院,广东 广州　510275)

摘要:简单回顾一些有关 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式相关方面的成果,并利用 Emden-Fowler 变换对特殊的 CKN 不等式

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^p}{|x|^{p(1+t)}}\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{N-p-pt}\right)^p\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|\nabla u|^p}{|x|^{pt}}\mathrm{d}x,\forall u\in\mathbf{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N\backslash\{0\})$$

给出一个简单的证明,其中 $2\leqslant p<\infty$,$p(1+t)<N$,$(p/(N-p-pt))^p$ 为最佳常数.

关键词:Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式;最佳常数;Emden-Fowler 变换

中图分类号:O 177.91;O 175.29　　文献标志码:A　　DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.03.05

0　引言

1984 年 L. Caffarelli 等[1] 建立了下面一族插值不等式,如今被称为 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式或者简称为 CKN 不等式.

定理 A[1]　假设 $p,q,r,\alpha,\beta,\sigma$ 和 a 为固定的实数(称为参数),满足

$$p\geqslant1,q\geqslant1,r>0,0\leqslant a\leqslant1;\tag{1}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{N}>0,\frac{1}{q}+\frac{\beta}{N}>0,\frac{1}{r}+\frac{\gamma}{N}>0,\tag{2}$$

其中 $\gamma=a\sigma+(1-a)\beta$,则存在 1 个正的常数 C 使得不等式

$$\left|\,|x|^\gamma u\right|_{L^r}\leqslant C\left|\,|x|^\alpha|Du|\right|_{L^p}^a\left|\,|x|^\beta u\right|_{L^q}^{1-a},\forall u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)\tag{3}$$

成立当且仅当关系

$$1/r+\gamma/N=a(1/p+(\alpha-1)/N)+(1-a)(1/q+\beta/N)\tag{4}$$

(这是维数平衡条件)成立,$0\leqslant\alpha-\sigma$,如果 $a>0$;$\alpha-\sigma\leqslant1$,如果 $a>0$ 且 $1/p+(\alpha-1)/N=1/r+\gamma/N$.

特别地,由(1),(2),(4)式和 $0\leqslant\alpha-\sigma\leqslant1$ 所决定的参数空间的任意紧集上,常数 C 是有界的.

一些高阶版本的 CKN 不等式由 Lin Changshou 在文献[2]中给出. CKN 不等式以及它的高阶版本包含了众多经典的著名不等式,如 Hardy-Sobolev 不等式(见下面(5)式)、Gagliardo-Nirenberg 不等式等. 它们在泛函分析、椭圆偏微分方程中扮演着重要角色. 因此自 CKN 不等式被提出以来,关于等号是否可以取到、最佳常数为多少、达到函数又是什么样子或者满足什么样的一些性质等问题一直是数学家们关注的焦点. 特别地,在最近十几年来,与这个不等式相关的一些非线性椭圆偏微分方程的研究成为本专业研究的热点[2-11]. 值得一提的是变分法在这些泛函不等式的研究方面是一个非常强大的工具. 比如在最近的综述性文献[12]中,邹文明对变分法的发展历史和将来的发展趋势做了简单的介绍,并综述了变分法在非线性偏微分方程应用方面的基本思想和众多最新成果.

在(3)式中考虑 $a=1$,则可得到下面的 Hardy-Sobolev 不等式(无插值):

$$\|\,|x|^\gamma u\|_{L^r}\leqslant C\|\,|x|^\alpha|Du|\,\|_{L^p},\forall u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N),\tag{5}$$

其中 $p\geqslant1$,$1/r+\gamma/N>0$,

$$r\begin{cases}\leqslant p^*:=Np/(N-p),&N>p\\<\infty,&N\leqslant p\end{cases}$$

且满足维数平衡条件

收稿日期:2018-01-30

基金项目:国家自然科学基金(11701248)资助项目.

通信作者:钟学秀(1989-),女,广东徐闻人,副研究员,主要从事非线性泛函分析、变分法和偏微分方程的研究. E-mail:zhongxuexiu1989@163.com

$$1/r+\gamma/N=1/p+(\alpha-1)/N.$$

特别地,考虑 $\alpha=0,p=2$,可得一个特例: $\exists C>0$ 使得

$$C\left(\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|}\mathrm{d}x\right)^{2/(2^*(s))}\leqslant\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$$

对所有的 $u\in D_0^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ 都成立,其中 $s=\gamma r\in[0,2]$. 也称(5)式为一般的 Hardy-Sobolev 不等式,这是由于当 $\gamma=\alpha=0$ 时,(5)式即为经典的 Sobolev 不等式:

$$|u|_r\leqslant C|\nabla u|_p,\text{其中 } r=p^*,N>p,\tag{6}$$

同时当 $\alpha=-t,\gamma=-t-1$ 时,(5)式变成了

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^p}{|x|^{p(1+t)}}\mathrm{d}x\leqslant C(N,p,t)\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|\nabla u|^p}{|x|^p}\mathrm{d}x\tag{7}$$

$(\forall u\in\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^N\backslash\{0\}))$ 成立,其中 $p(1+t)<N$. 称不等式(7)为一般的带位势 Hardy 不等式.

在 Hardy-Sobolev 不等式(5)中的极值函数为下面 Euler 方程的解:

$$-\mathrm{div}(|x|^{p\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=|x|^{r\gamma}u^{r-1},u\geqslant 0,\text{in }\mathbf{R}^N.\tag{8}$$

这类方程可以看做来自物理现象中更一般的退化椭圆方程的原型[13-14].

在哪些参数指标范围内,方程(8)只有唯一的正解?这个也是大家所关心的一个研究热点问题. 当唯一性成立时可直接导出它是 Euler 方程(8)的基态解,并且它是一个径向对称递减的函数. 因此常用的基本方法为移动平面法,往证它的正解一定是径向递减的,从而把问题转化成一个常微分方程来得到解的唯一性. 这种对正解的分类性结果是非常重要的,它对先验估计、爆破分析、解的渐近行为刻画等方面都是基础性的定理结论. 退而求其次,如果仅仅考虑基态解(或极值函数),则它是否存在(最佳常数可达),如果可达,则达到函数是否具有对称性等也是大家非常感兴趣的问题. 此时常用的一个理论工具就是重排不等式,在某些适当的指标范围下可通过重排不等式证明基态解是径向对称的,进而可转化成一个常微分方程来研究. 另外当最佳常数可达时,对应极值函数表达式的寻找也是大家非常关心的,还有最佳常数的计算也是一个非常难的数学问题. 总体来看,在数学处理上 $p=2$ 比 $p\neq 2$ 相对容易,不带位势的情形比带位势相对容易. 因此在 $p=2$ 时已经涌现出了更多的成果.

比如 T. Aubin[15] 和 G. Talenti[16] 利用 Schwarz 对称和 Bliss 不等式[17],给出了 Sobolev 不等式(6)的达到函数的具体表达式以及最佳常数的数值. 对于 $p=2$,利用移动平面法可以证明 $-\Delta u=u^{2^*}$ in $\mathbf{R}^N$, $2^*=2N/(N-2)$ 的正解的唯一性,从而完整得到了正解的分类结论,这个结论在对往后几十年的相关问题研究中起到了基础性作用. 而对于 $p\neq 2$,在运用移动平面法的数学处理上会碰到很大的困难,直到 2014 年,L. Damascelli 等[18] 解决了当 $1<p<2$ 且 $p^*:=Np/(N-p)\geqslant 2$ 时的情形,即

$$-\Delta^p u=u^{p^*}\ \text{in }\mathbf{R}^N,p^*=pN/(N-p).$$

这个问题,它们也是基于移动平面法证明了正解的唯一性以及径向对称性,不过在数学处理上显然复杂了很多,而其他的情形至今仍然是完全公开的问题,亟待更多的学者进一步研究. E. H. Lieb[10] 应用类似的对称技巧研究了(5)式中参数 $\alpha=0$, $p=2,-1<\gamma<0$ 的情形. 这个结果之后被 K. S. Chou[7] 推广到了 $\alpha-1<\gamma\leqslant\alpha\leqslant 0,p=2$ 的情形. 他们的基本方法仍旧是移动平面法,不过此时带位势使得在数学处理上变得复杂了很多,而且他们的方法对 $\alpha>0$ 不适用. 之后王志强等[19] 对 $p=2$ 的情形做了更进一步的推广. 特别地,文献[5]不同于以往相关文献依赖于移动平面法,F. Catrina 等[5] 引入 Emden-Fowler 变换对 $p=2$ 且 $\alpha>0$ 的情形转换到柱体 $C=\mathbf{R}\times\mathbf{S}^{N-1}$ 上展开了深刻地研究讨论. 当 $p\neq 2$ 但是 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 为各种各样的几何体时,相关研究可以参见文献[3];更多这方面的研究进展可参见文献[11,20-23].

在文献[24]中,È. Mitidieri 证明了在不等式(7)中的最佳常数为 $C(N,p,t)=(p/(N-p-pt))^p$. 他的方法是在一些特殊选择的向量场中利用散度定理,即 È. Mitidieri 引入一个向量场 $\boldsymbol{h}=x/|x|^\theta$,其中 θ 是一个待定的常数. 考虑 $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N\backslash\{0\})$,对向量场 $\boldsymbol{h}|u|^p$ 运用散度定理,并结合 Hölder 不等式可得不等式(7). 特别地,这个最佳常数可以选取适当的 u 满足 $(1/|x|^\theta)^{(p-1)/p}u^{p-1}$ 和 $(1/|x|^{\theta-p})^{1/p}|\nabla u|$ 在平行的意义下逼近,这个方法关键依赖于向量场的选取. 值得一提的是对于 Hardy 型的不等式,最佳常数不可达. 另涉及一些带有余项的一类相关问题,也是学者们感兴趣的问题,比如文献[20]等.

下面将利用 Emden-Fowler 变换技巧,对某些指标范围内的不等式(7)给出一个相对简单的新证明. 遗憾的是,此方法仅仅对 $p\geqslant 2$ 有效,貌似当 $1<p<2$ 时此文的证明技巧并不适用. 准确来说,对定理 1 给出了一个新的证明.

定理 1　令 $2\leqslant p<\infty$, $p(1+t)<N$,则存在

一个最佳常数 $C(N,p,t)$ 使得

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^p}{|x|^{p(1+t)}}\mathrm{d}x\leqslant C(N,p,t)\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|\nabla u|^p}{|x|^{pt}}\mathrm{d}x,\forall u\in D_t^{1,p}(\mathbf{R}^N),$$

其中 $D_t^{1,p}(\mathbf{R}^N):=\left\{u:\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^p/|x|^{pt}\mathrm{d}x<\infty\right\}$, $C(N,p,t)=(p/(N-p-pt))^p$.

1 最佳常数的计算

1.1 径向情形

下面先给出 1 维的 Hardy 不等式[25-26].

引理 1 令 $p\geqslant 1,\beta>-1$,则

$$\int_0^\infty|u|^pr^\beta\mathrm{d}r\leqslant\left(\frac{p}{\beta+1}\right)^p\int_0^\infty|u'|^pr^{\beta+p}\mathrm{d}r,\forall u\in\mathscr{D}(\mathbf{R}_+),\tag{9}$$

其中 $(p/(\beta+1))^p$ 是最佳的.

证 由于 $\beta>-1$,有 $|u|^pr^{\beta+1}|_{r=0}=0$. 注意到 $u\in\mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$,有 $|u|^pr^{\beta+1}|_{r=\infty}=0$. 于是,利用分部积分并结合 Hölder 不等式可得

$$\int_0^\infty|u|^pr^\beta\mathrm{d}r=-\int_0^\infty\frac{p}{\beta+1}|u|^{p-2}uu'r^{\beta+1}\mathrm{d}r\leqslant$$

$$\int_0^\infty\frac{p}{\beta+1}|u|^{p-1}|u'|r^{\beta+1}\mathrm{d}r\leqslant$$

$$\frac{p}{\beta+1}\left(\int_0^\infty|u|^pr^\beta\mathrm{d}r\right)^{(p-1)/p}\left(\int_0^\infty|u'|^pr^{\beta+p}\mathrm{d}r\right)^{1/p}.$$

进而可得不等式(9). 记 $C_{\beta,p}$ 为最佳常数,则 $C_{\beta,p}\leqslant(p/(\beta+1))^p$. 另一方面,当 $r\leqslant 1$ 时,取 $u_\varepsilon(r)=0$;当 $r\geqslant 1$ 时,取 $u_\varepsilon(r)=-pr^{-(\beta+1+\varepsilon)/p}/(\beta+1+\varepsilon)$,则 $u_\varepsilon(r)\in\mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$ 并且

$$\int_0^\infty|u'_\varepsilon|^pr^{\beta+p}\mathrm{d}r=\int_1^\infty r^{-1-\varepsilon}\mathrm{d}r;$$

$$\int_0^\infty|u_\varepsilon|^pr^\beta\mathrm{d}r=\left|\frac{p}{\beta+1+\varepsilon}\right|^p\int_1^\infty r^{-1-\varepsilon}\mathrm{d}r.$$

为保证上面的积分有意义,只需 $\varepsilon>0$. 于是得到

$$\int_0^\infty|u_\varepsilon|^pr^\beta\mathrm{d}r=\left(\frac{p}{\beta+1+\varepsilon}\right)^p\int_0^\infty|u'_\varepsilon|^pr^{\beta+p}\mathrm{d}r.$$

从而可得 $C_{\beta,p}\geqslant(p/(\beta+1+\varepsilon))^p$. 最后根据 $\varepsilon>0$ 的任意性,令 $\varepsilon\to 0^+$ 可得 $C_{\beta,p}\geqslant(p/(\beta+1))^p$. 因此 $(p/(\beta+1))^p$ 是最佳常数.

当 $1\leqslant p<\infty$, $p(1+t)<N$ 且 u 为一个径向函数时,不等式(7)为引理 1 的一个直接推论.

定理 2 令 $1\leqslant p<\infty$, $p(1+t)<N$,则存在一个最佳常数 $C^*(N,p,t)$ 使得

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^p}{|x|^{p(1+t)}}\mathrm{d}x\leqslant C^*(N,p,t)\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|\nabla u|^p}{|x|^{pt}}\mathrm{d}x,\forall u\in D_{t,r}^{1,p}(\mathbf{R}^N),$$

其中 $D_{t,r}^{1,p}(\mathbf{R}^N)\subset D_t^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ 为 $D_t^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ 的径向子空间. 特别地,最佳常数

$$C^*(N,p,t)=(p/(N-p-pt))^p.$$

证 当 $u(x)=u(|x|)\in D_{t,r}^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ 时,利用极坐标变换有

$$\frac{\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^p}{|x|^{p(1+t)}}\mathrm{d}x}{\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|\nabla u|^p}{|x|^{pt}}\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^\infty|u|^pr^{N-p-pt-1}\mathrm{d}r}{\int_0^\infty|u'|^pr^{N-1-pt}\mathrm{d}r}.$$

由于 $N-p-pt>0$,根据稠密性定理只需考虑 $u(|x|)\in\mathbf{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N\backslash\{0\})$. 令 $\beta=N-p-pt-1$,则 $\beta>-1$. 因此由引理 1 有

$$\sup_{u\in D_{t,r}^{1,p}(\mathbf{R}^N\backslash\{0\})}\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^p}{|x|^{p(1+t)}}\mathrm{d}x\Big/\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|\nabla u|^p}{|x|^{pt}}\mathrm{d}x=$$

$$(p/(\beta+1))^p=(p/(N-p-pt))^p.$$

注 1 由 $D_{t,r}^{1,p}(\mathbf{R}^N)\subset D_t^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ 可得当 $N-p-pt>0$ 时,有

$$C(N,p,t)\geqslant C^*(N,p,t)=(p/(N-p-pt))^p.$$

1.2 一般 u 的情形: $p=2$

采用记号 $C=\mathbf{R}\times\mathbf{S}^{N-1}$. 对每个光滑函数 u 满足其支集落在 $\mathbf{R}^N\backslash\{0\}$,利用 Emden-Fowler 变换,可假设

$$u(x)=|x|^{-(N-2-2t)/2}v(y),$$

$$y=(r,\theta):=(-\log|x|,x/|x|)\in C.$$

于是有

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^2}{|x|^{2(1+t)}}\mathrm{d}x=\int|v|\mathrm{d}y,\frac{\partial\theta_j}{\partial x_i}=\frac{\delta_{ij}}{|x|}=\frac{x_ix_j}{|x|^3}.$$

注意到 $0=\nabla_\theta v\cdot x=\sum_{j=1}^N\frac{x_j}{|x|}\frac{\partial v}{\partial\theta_j}$,通过直接计算可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{N-2-2t}{2}|x|^{-(N-2t)/2}\frac{x_i}{|x|}v-$$

$$|x|^{-(N-2-2t)/2}\frac{1}{|x|}\frac{x_i}{|x|}v_r+$$

$$|x|^{-(N-2-2t)/2}\sum_{j=1}^N\frac{\partial v}{\partial\theta_j}\left(\frac{\delta_{ij}}{|x|}-\frac{x_ix_j}{|x|^3}\right)=$$

$$|x|^{-(N-2t)/2}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta_i}-\theta_iv_r-\frac{N-2-2t}{2}v\theta_i\right).$$

进而可得

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2t}}\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^N}\sum_{i=1}^N\left(|x|^{-t}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right)^2\mathrm{d}x=$$

$$\int_{\mathbf{R}^N}\sum_{i=1}^N|x|^{-N}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta_i}-\theta_iv_r-\frac{N-2-2t}{2}v\theta_i\right)^2\mathrm{d}x=$$

$$\int_C\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial v}{\partial\theta_i}-\theta_iv_r-\frac{N-2-2t}{2}v\theta_i\right)^2\mathrm{d}y=\int_C\sum_{i=1}^N\left(\left(\frac{\partial v}{\partial\theta_i}\right)^2+\right.$$

$$\theta_i^2 v_r^2 + \left(\frac{N-2-2t}{2}\right)^2 v^2\theta_i^2 - 2\theta_i\frac{\partial v}{\partial\theta_i}v_r - 2\left(\frac{N-2-2t}{2}\right)v\theta_i\frac{\partial v}{\partial\theta_i} + 2\left(\frac{N-2-2t}{2}\right)vv_r\theta_i^2\Big)\mathrm{d}y = \int_C\left\{\left(\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial v}{\partial\theta_i}\right)^2\right) + v_r^2 + \left(\frac{N-2-2t}{2}\right)^2 v^2 + (N-2-2t)vv_r\right\}\mathrm{d}y \geqslant \int_C\left(\frac{N-2-2t}{2}\right)^2 v^2\mathrm{d}y.$$

其中上面用到了事实

$$\sum_{i=1}^N\theta_i^2 = 1, \int_C vv_r\mathrm{d}y = \int_C\mathrm{d}\theta\int_C vv_r\mathrm{d}r = \int_C\mathrm{d}\theta\int_C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{v^2}{2}\mathrm{d}r = 0.$$

于是 $\forall u \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N\backslash\{0\})\backslash\{0\}$，都有

$$\frac{\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^2}{|x|^{2(1+t)}}\mathrm{d}x}{\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2t}}\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_C|v|^2\mathrm{d}y}{\int_C\left(\frac{N-2-2t}{2}\right)^2 v^2\mathrm{d}y} = \left(\frac{2}{N-2-2t}\right)^2.$$

利用稠密性讨论，易见 $C(N,2,t) \leqslant (2/(N-2-2t))^2$. 结合引理 1，可得最佳常数 $C(N,2,t) = (2/(N-2-2t))^2$，这样就对 $p = 2$ 的情形完成了证明.

1.3　$p > 2$ 的情形

记 $\Omega := \mathbf{R}^N\backslash\{0\}$，对所有的 $u \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega)$ 以及 $\forall\varepsilon > 0$，有 $0 \leqslant u_\varepsilon := (|u|^2 + \varepsilon^2)^{p/4} - \varepsilon^{p/2} \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega)$ 并且 u_ε 与 u 有相同的支集. 通过直接计算

$$u_\varepsilon^2 = (u^2+\varepsilon^2)^{p/2} + \varepsilon^p - 2\varepsilon^{p/2}(|u|^2+\varepsilon^2)^{p/4},$$

$$\nabla u_\varepsilon = p(|u|^2+\varepsilon^2)^{(p-4)/4}u\nabla u/2.$$

于是 $|\nabla u_\varepsilon|^2 = p^2u^2(|u|^2+\varepsilon^2)^{(p-4)/2}|\nabla u|^2/4$，易见当 $0 < \varepsilon < 1$ 时有一致的控制函数 $p^2(|u|^2+1)^{p/2}|\nabla u|^2/4$. 由于 u 具有紧支集，运用 Lebesgue 控制收敛定理，可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_\varepsilon|^2/|x|^{p+pt-2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^N}p^2|x|^{-p-pt+2}|u|^{p-2}|\nabla u|^2/4\mathrm{d}x. \tag{10}$$

另一方面 u_ε^2 被函数 $(u^2+1)^{p/2}+1$ 所控制，同样有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u_\varepsilon|^2}{|x|^{p(1+t)}}\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^p}{|x|^{p(1+t)}}\mathrm{d}x. \tag{11}$$

取 $\tilde{t} = (p+pt-2)/2$，则 $N-p-pt > 0$ 当且仅当 $N-2-2\tilde{t} > 0$. 于是采取 1.2 节中 $p = 2$ 时的讨论，有

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u_\varepsilon|^2}{|x|^{p(1+t)}}\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u_\varepsilon|^2}{|x|^{2(1+\tilde{t})}}\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{2}{N-2-2\tilde{t}}\right)^2\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{|x|^{2\tilde{t}}}\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{N-p-pt}\right)^2\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{|x|^{p+pt-2}}\mathrm{d}x. \tag{12}$$

由(10～(12)式，令 $\varepsilon\to 0^+$ 可得

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^p}{|x|^{p(1+t)}}\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{2}{N-p-pt}\right)^2\cdot\int_{\mathbf{R}^N}\frac{p^2}{4}|x|^{-p-pt+2}|u|^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x = \left(\frac{p}{N-p-pt}\right)^2\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^{p-2}|\nabla u|^2}{|x|^{p+pt-2}}\mathrm{d}x.$$

利用 Hölder´s 不等式，有

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^p}{|x|^{p(1+t)}}\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{N-p-pt}\right)^2\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^{p-2}|\nabla u|^2}{|x|^{p+pt-2}}\mathrm{d}x = \left(\frac{p}{N-p-pt}\right)^2\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^{p-2}}{|x|^{(p-2)(1+t)}}\frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2t}}\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{N-p-pt}\right)^2\left(\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^p}{|x|^{p(1+t)}}\mathrm{d}x\right)^{(p-2)/p}\left(\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|\nabla u|^p}{|x|^{pt}}\mathrm{d}x\right)^{2/p}.$$

进而得到

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^p}{|x|^{p(1+t)}}\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{N-p-pt}\right)^p\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|\nabla u|^p}{|x|^{pt}}\mathrm{d}x,$$

$\forall u \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N\backslash\{0\})$.

最后利用稠密性讨论并结合引理 1，可得最佳常数 $C(N,p,t) = (p/(N-p-pt))^p$.

定理 1 的证明　结合 1.2～1.3 这 2 节可得最佳常数的数值，并且最佳常数是不可达的.

注 2　事实上，对于 $1 < p < 2$ 的情形，最佳常数 $C(N,p,t) = (p/(N-p-pt))^p$ 仍然成立[23]. 不过很遗憾，此证明方法貌似对 $1 < p < 2$ 并不适用.

2　Pohozaev 恒等式及其运用

定理 3　令 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$，假设 $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ 为下面方程的解

$$\begin{cases}-\mathrm{div}(|x|^{p\alpha}|\nabla u|^{-2}\nabla u) = C|x|^{r\gamma}|u|^{-2}u \text{ in } \Omega,\\ \Omega|_{\partial\Omega} = 0,\end{cases} \tag{13}$$

则下面 Pohozaev 恒等式成立.

$$\frac{p-1}{p}\int_{\partial\Omega}|x|^{p\alpha}|\nabla u|\langle x,\boldsymbol{n}\rangle\mathrm{d}\sigma + \frac{N-p+p\alpha}{p}\int_\Omega|x|^{p\alpha}\cdot|\nabla u|\mathrm{d}x = C\frac{N+r\gamma}{r}\int_\Omega|x|^{r\gamma}|u|\mathrm{d}x. \tag{14}$$

证　记 $\boldsymbol{H}_u$ 为 u 的 Hessian 矩阵，则有

$$\langle|x|^{p\alpha}|\nabla u|^{-2}\nabla u,\nabla(\langle\nabla u,x\rangle)\rangle = |x|^{p\alpha}|\nabla u|^{-2}\nabla u\boldsymbol{H}_u x + |x|^{p\alpha}|\nabla u|^{-2}\nabla u\boldsymbol{H}_x\nabla u = |x|^{p\alpha}|\nabla u|^{-2}\nabla u\boldsymbol{H}_u x + |x|^{p\alpha}|\nabla u|^p, \tag{15}$$

$$\langle\nabla(|x|^{p\alpha}|\nabla u|^p),x\rangle = |x|^{p\alpha}\langle\nabla(|\nabla u|^p),x\rangle +$$

$$|\nabla u|^p\langle\nabla(|x|^{p\alpha}),x\rangle = p|x|^{p\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u H_u x + p\alpha|x|^{p\alpha}|\nabla u|^p, \tag{16}$$

$$\operatorname{div}(|x|^{p\alpha}|\nabla u|^p x) = \langle\nabla(|x|^{p\alpha}|\nabla u|^p),x\rangle + N|x|^{p\alpha}|\nabla u|^p; \tag{17}$$

$$\operatorname{div}(|x|^{p\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\langle\nabla u,x\rangle) = \operatorname{div}(|x|^{p\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\langle\nabla u,x\rangle + \langle|x|^{p\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u,\nabla(\langle\nabla u,x\rangle)\rangle, \tag{18}$$

由(15)~(18)式,可得

$$\operatorname{div}(|x|^{p\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\langle\nabla u,x\rangle = \operatorname{div}(|x|^{p\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\langle\nabla u,x\rangle) - \frac{1}{p}\operatorname{div}(|x|^{p\alpha}|\nabla u|^p x) + \frac{N-p+p\alpha}{p}|x|^{p\alpha}|\nabla u|^p,$$

进而利用散度定理可得

$$\int_\Omega \operatorname{div}(|x|^{p\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\langle\nabla u,x\rangle\mathrm{d}x = (p-1)\int_{\partial\Omega}|x|^{p\alpha}|\nabla u|^p\langle x,\boldsymbol{n}\rangle/p\mathrm{d}\sigma + (N-p+p\alpha)\int_\Omega|x|^{p\alpha}|\nabla u|^p/p\mathrm{d}x. \tag{19}$$

另一方面有

$$\operatorname{div}(|x|^{r\gamma}|u|^r x/r) = |x|^{r\gamma}|u|^{r-2}u\langle\nabla u,x\rangle + (N+r\gamma)|x|^{r\gamma}|u|^r/r,$$

于是利用散度定理结合$u|_{\partial\Omega}=0$可得

$$\int_\Omega|x|^{r\gamma}|u|^{r-2}u\langle\nabla u,x\rangle\mathrm{d}x = \int_\Omega\left(\operatorname{div}\left(\frac{1}{r}|x|^{r\gamma}|u|^r x\right) - \frac{N+r\gamma}{r}|x|^{r\gamma}|u|^r\right)\mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega}\frac{1}{r}|x|^{r\gamma}|u|^r\langle x,\boldsymbol{n}\rangle\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega\frac{N+r\gamma}{r}|x|^{r\gamma}|u|^r\mathrm{d}x = -\int_\Omega\frac{N+r\gamma}{r}|x|^{r\gamma}|u|^r\mathrm{d}x. \tag{20}$$

因此当 u 为方程(13)的解时,结合(19)~(20)式可得恒等式(14)式.

推论 1 假设$(N-p+p\alpha)/p=(N+r\gamma)/r$,则当$\Omega\neq\mathbf{R}^N$为一个星形区域时,问题(13)非负解只有平凡解.

证 采取反证法,假设$0\leqslant u\not\equiv 0$为解,则恒等式(14)式成立. 同时在方程(13)同乘试验函数u并积分可得

$$\int_\Omega|x|^{p\alpha}|\nabla u|^p\mathrm{d}x = C\int_\Omega|x|^{r\gamma}|u|^r\mathrm{d}x. \tag{21}$$

所以当$(N-p+p\alpha)/p=(N+r\gamma)/r$时,由(14)式和(21)式可得

$$\int_{\partial\Omega}|x|^{p\alpha}|\nabla u|^p\langle x,\boldsymbol{n}\rangle\mathrm{d}\sigma = 0.$$

由于Ω为星形区域,在边界$x\in\partial\Omega$上有$\langle x,\boldsymbol{n}\rangle>0$,所以可得在边界$\partial\Omega$上成立着$\nabla u=0$. 于是由散度定理有

$$0 = \int_\Omega -\operatorname{div}(|x|^{p\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\mathrm{d}x = C\int_\Omega|x|^{r\gamma}|u|^{r-2}u\mathrm{d}x,$$

与$u\not\equiv 0$矛盾.

推论 2 若$(N-p+p\alpha)/p\neq(N+r\gamma)/r$,则方程

$$-\operatorname{div}(|x|^{p\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = C|x|^{r\gamma}|u|^{r-2}u \text{ in } \mathbf{R}^N, u\in D_\alpha^{1,p}(\mathbf{R}^N) \tag{22}$$

只有零解.

证 假设$u\in D_\alpha^{1,p}(\mathbf{R}^N)$为方程(22)的解,则由 Pohozaev 恒等式有

$$\frac{N-p+p\alpha}{p}\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{p\alpha}|\nabla u|^p\mathrm{d}x = C\frac{N+r\gamma}{r}\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{r\gamma}|u|^r\mathrm{d}x. \tag{23}$$

另一方面,在方程(22)两边同乘u并积分可得

$$\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{p\alpha}|\nabla u|^p\mathrm{d}x = C\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{r\gamma}|u|^r\mathrm{d}x. \tag{24}$$

所以当$(N-p+p\alpha)/p\neq(N+r\gamma)/r$时,由(23)~(24)式可得$u\equiv 0$.

3 参考文献

[1] Caffarelli L,Kohn R,Nirenberg L. First order interpolation inequalities with weights [J]. Compositio Mathematica,1984,53(3):259-275.

[2] Lin Changshou. Interpolation inequalities with weights [J]. Comm Partial Differential Equations,1986,11(14):1515-1538.

[3] Bartsch T,Peng Shuangjie,Zhang Zhitao. Existence and non-existence of solutions to elliptic equations related to the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations,2007,30(1):113-136.

[4] Cao Daomin,Han Pigong. Solutions to critical elliptic equations with multi-singular inverse square potentials [J]. J Differential Equations,2006,224(2):332-372.

[5] Catrina F,Wang Zhiqiang. On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities:sharp constants,existence(and nonexistence),and symmetry of extremal functions [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics,2001,54(2):229-258.

[6] Chen Jianlong,Lin Changshou. Minimizers of Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities with the singularity on the boundary [J]. Archive for Rational Mechanics and Analy-

sis,2010,197(2):401-432.
[7] Chou K S,Chu C W. On the best constant for a weighted Sobolev-Hardy inequality [J]. Journal of the London Mathematical Society,1993,48(1):137-151.
[8] Dolbeault J,Esteban M J,Tarantello G,et al. The role of Onofri type inequalities in the symmetry properties of extremals for Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities,in two space dimensions [J]. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa,2008,7(2):313-341.
[9] Li Yanyan. Prescribing scalar curvature on S^n and related problems [J]. J Differential Equations,1995,120(2):319-410.
[10] Lieb E H. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities [J]. Ann of Math,1983,118(2):349-374.
[11] Lin Changshou,Wang Zhiqiang. Symmetry of extremal functions for the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities [J]. Proceedings of the American Mathematical Society,2004,132(6):1685-1691.
[12] 邹文明. 变分方法及其在非线性偏微分方程应用方面的进展和未决问题 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2018,42(2):111-129.
[13] Berestycki H,Esteban M. Existence and bifurcation of solutions for an elliptic degenerate problem [J]. J Differential Equations,1997,134(1):1-25.
[14] Dautray R,Lions J L. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology:Physical origins and classical methods [M]. Berlin:Spinger,2000.
[15] Aubin T. Problemes isoperimetriques et espaces de Sobolev [J]. J Differential Geometry,1976,11(4):573-598.
[16] Talenti G. Best constant in Sobolev inequality [J]. Ann Mat Pura Appl,1976,110(4):353-372.
[17] Bliss G A. An integral inequality [J]. Journal of the London Mathematical Society,1930,1(1):40-46.
[18] Damascelli L,Merchan S,Montoro L,et al. Radial symmetry and applications for a problem involving the $-\Delta_p(\cdot)$ operator and critical nonlinearity in $\mathbf{R}^N$ [J]. Adv Math,2014,265:313-335.
[19] Wang Zhiqiang,Willem M. Singular minimization problems [J]. J Differential Equations,2000,161(2):307-320.
[20] Wang Zhiqiang,Willem M. Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities with remainder terms [J]. Journal of Functional Analysis,2003,203(2):550-568.
[21] Dolbeault J,Esteban M J. A scenario for symmetry breaking in Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities [J]. J Numer Math,2012,20(3/4):233-249.
[22] Dolbeault J,Esteban M J,Loss M,et al. On the symmetry of extremals for the Caffarelli-Kohnnirenberg inequalities [J]. Advanced Nonlinear Studies,2009,9(4):713-727.
[23] Dolbeault J,Esteban M J. Extremal functions in some interpolation inequalities:symmetry,symmetry breaking and estimates of the best constants [M]//Exner P. Mathematical results in quantum physics,Hackensack:World Sci Publ,NJ,2011:178-182.
[24] Mitidieri E. A simple approach to Hardy inequalities [J]. Mat Zametki,2000,67(4):563-572.
[25] Hardy G H. Notes on some points in the integral calculus [J]. Messenger Math,1928,57:12-16.
[26] Hardy G H,Littlewood J E,Polya G. Inequalities [M]. Cambridge:Cambridge University Press,1952.

The Simple Proof of a Special Class of Caffarelli-Kohn-Nirenberg Inequality

LIU Min[1,2],ZHONG Xuexiu[3*]

(1. School of Sciences,Liaoning Shihua University,Fushun Liaoning 113001,China;
2. School of Mathematical Sciences,Beijing Normal University,Beijing 100084,China;
3. Department of Mathematics,Sun Yat-sen University,Guangzhou Guangdong 510275,China)

Abstract: Some results about the well known Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality are reviewed. And a simple proof of the following special CKN inequality

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^p}{|x|^{p(1+t)}}\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{N-p-pt}\right)^p\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|\nabla u|^p}{|x|^{pt}}\mathrm{d}x,\ \forall u \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N\backslash\{0\})$$

is given by using the Emden-Fowler transformation,where $2 \leqslant p < \infty$,$p(1+t) < N$,and $(p/(N-p-pt))^p$ is the best constant.

Key words: Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality;best constant;Emden-Fowler transformation

(责任编辑: 王金莲)