第 42 卷 第 3 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 42 No. 3
2018 年 5 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) May 2018

文章编号:1000-5862(2018)03-0254-06

构造模糊蕴涵的新序和方法

杨 丽[1],覃 锋[2*]
(1. 南昌工学院基础教育学院,江西 南昌 330108;2. 江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:借助半群序和理论,从一族给定的模糊蕴涵出发,定义了一种新的序和,给出了这种序和成为模糊蕴涵的充要条件,研究表明这种新的序和推广并统一了当前 2 种模糊蕴涵序和的构造方法,最后讨论了这种新序和的若干性质.

关键词:模糊连接词;模糊蕴涵;序和
中图分类号:O 159 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.03.07

0 引言

鉴于智能系统可以用类似于人类思考的方式得出合情结论,模糊系统在智能系统中扮演着重要角色,因此模糊蕴涵在诸多领域中有着广泛应用,如近似推理、模糊关系方程、模糊形态学、图像处理. 事实上,模糊条件语句"若 p,则 q"的处理是模糊推理中的重要问题之一,这里 p 和 q 都是模糊命题. 刻画模糊条件语句最常用的方法就是利用模糊蕴涵进行描述. M. Baczynski 等[1]已经总结了模糊蕴涵的重要性. 文献[2-4]提出了许多关于模糊蕴涵有意义的性质.

由于实际应用的多样性,构造不同的模糊蕴涵是非常有必要的. 而由一族给定的模糊蕴涵出发,借助半群序和理论构造新的模糊蕴涵是当前构造模糊蕴涵的主要方法之一. 文献[5]给出了连续三角模所诱导剩余蕴涵的序和结构. 苏勇等[3]借助 I_{GD} 作为分支的补,在单位区间互不相交的闭集族上定义了一种模糊蕴涵序和,并给出了该序和是模糊蕴涵的充要条件. M. Baczynski 等[6-7]对分支的补和单位区间互不相交的子集族进行推广,提出了各种不同的模糊蕴涵序和. 特别地,P. Drygas 等[8]分别借助 I_{GD} 和 I_{RS} 作为分支的补,在单位区间互不相交的开(闭、半开)子集族上定义了 2 种模糊蕴涵序和,并建立了该序和是模糊蕴涵的充要条件. 本文将继续借助半群序和理论,从一族给定的模糊蕴涵出发,定义一种新的序和,刻画这种序和成为模糊蕴涵的充要条件,推广并统一文献[8]中提出的 2 种模糊蕴涵序和的构造方法,最后讨论这种新模糊蕴涵序和的若干性质.

1 预备知识

首先回顾模糊蕴涵的定义[1-2,9-15]. 本文引入的模糊蕴涵的定义等价于文献[1]中的定义 1.15.

定义 1 称 2 元函数 $I:[0,1]^2\to[0,1]$ 为模糊蕴涵,若满足如下条件:

(I_1) I 在第 1 变元上单调递减;

(I_2) I 在第 2 变元上单调递增;

(I_3) $I(0,0)=1$;

(I_4) $I(1,1)=1$;

(I_5) $I(1,0)=0$.

由模糊蕴涵的定义知,$\forall x\in[0,1]$,每个模糊蕴涵都满足 $I(0,x)=I(x,1)=1$,因此每个模糊蕴涵满足正规条件 $I(0,1)=1$.

定义 2 设 I 是一个模糊蕴涵,

(i) 若 $\forall y\in[0,1]$ 有 $I(1,y)=y$,则称 I 满足左单位性质,简记为(NP);

(ii) 若 $\forall x\in[0,1]$ 有 $I(x,x)=1$,则称 I 满足

收稿日期:2018-01-10
基金项目:国家自然科学基金(61563020),江西省自然科学重点基金(20171ACB20010)和南昌工学院科研(NGKJ-17-18)资助项目.
通信作者:覃 锋(1976-),男,湖北鹤峰人,教授,博士,主要从事模糊逻辑与模糊控制研究. E-mail:qinfeng923@163.com

同一性,简记为(IP);

(iii) 若 $\forall x,y\in[0,1]$ 有 $I(x,y)=1\Leftrightarrow x\leqslant y$,则称 I 满足序原则,简记为(OP);

(iv) 若 $\forall x,y\in[0,1]$ 有 $x\leqslant y\Rightarrow I(x,y)=1$,则称 I 满足左序原则,简记为(LOP);

(v) 若 $\forall x,y\in[0,1]$ 有 $I(x,y)=1\Rightarrow x\leqslant y$,则称 I 满足右序原则,简记为(ROP);

(vi) 若 $\forall x,y\in[0,1]$ 有 $I(x,y)\geqslant y$,则称 I 满足后件边界条件,简记为(CB);

(vii) 若 $\forall x,y\in[0,1]$ 有 $x\neq 0\Rightarrow I(x,0)=0$,则称 I 满足强边界条件,简记为(SCB);

(viii) 若 $\forall x,y\in[0,1]$ 有 $I(x,y)=0\Rightarrow x=1\wedge y=0$,则称 I 满足关于 0 的强顶点条件,简记为(SCC0);

(ix) 若 $\forall x,y\in[0,1]$ 有 $I(x,y)=1\Rightarrow x=0\vee y=1$,则称 I 满足关于 1 的强顶点条件,简记为(SCC1).

例 1[10] 常见的模糊蕴涵有:

$$I_0'(x,y)=\begin{cases}1, x=0\text{ 或者 } y=1,\\ 0,\text{其它},\end{cases}$$

$$I_1'(x,y)=\begin{cases}1, x=0\text{ 或者 } y=1,\\ 0,\text{其它},\end{cases}$$

$$I_{LK}(x,y)=\min(1-x+y,1),$$

$$I_{GD}(x,y)=\begin{cases}1, x\leqslant y,\\ y,\text{其它},\end{cases}$$

$$I_{DN}(x,y)=\max(1-x,y),$$

$$I_{GG}(x,y)=\begin{cases}1, & x\leqslant y,\\ y/x,&\text{其它},\end{cases}$$

$$I_{RS}(x,y)=\begin{cases}1, x\leqslant y,\\ 0,\text{其它},\end{cases}$$

$$I_{YG}(x,y)=\begin{cases}1, x\leqslant y,\\ y^x,\text{其它},\end{cases}$$

$$I_{WG}(x,y)=\begin{cases}1, & x\leqslant y,\\ \max(1-x,y),&\text{其它},\end{cases}$$

$$I_{WB}(x,y)=\begin{cases}1, x\leqslant 1,\\ y,\text{其它},\end{cases}$$

$$I_{DP}(x,y)=\begin{cases}y, & x=1,\\ 1-x, & y=0,\\ 1, & \text{其它}.\end{cases}$$

注 1 I_0' 和 I_1' 分别是最小和最大模糊蕴涵,I_{LK}、I_{GD}、I_{GG} 和 I_{WG} 可以分别看成由三角模 T_{LK}、T_M、T_P 和 T^{nm} 所诱导的剩余蕴涵[10]. 除 I_0' 和 I_{RS} 之外,所有模糊蕴涵都满足(CB). 这些模糊蕴涵可作为模糊蕴涵序和的加数,生成若干新的模糊蕴涵.

例 2 令 $\alpha\in[0,1]$,定义 2 元函数 I^α: $[0,1]^2\to[0,1]$ 为

$$I^\alpha(x,y)=\begin{cases}1, x\leqslant y,\\ \alpha y,\text{其它}.\end{cases}$$

容易验证:I^α 是模糊蕴涵. 当 $\alpha\in[0,1)$ 时,不满足性质(CB). 当 $\alpha=0$ 时,$I^0=I_{RS}$;当 $\alpha=1$ 时,$I^1=I_{GD}$.

2 主要结论

从一族给定的模糊蕴涵出发,定义并研究一种新的模糊蕴涵序和. 为此需要引入记号 $|a_k,b_k|$,它表示区间 (a_k,b_k)、$(a_k,b_k]$、$[a_k,b_k)$ 和 $[a_k,b_k]$ 中的任一情形.

定义 3 令 I_0 是 $[0,1]$ 上任一模糊蕴涵,$(I_k)_{k\in A}$ 是一族模糊蕴涵,$\{|a_k,b_k|\}$ 是 $[0,1]$ 的一个子区间族并使得 (a_k,b_k) 互不相交,这里 $a_k<b_k$,$k\in A$,A 是有限或可数指标集. 定义 2 元函数 I: $[0,1]^2\to[0,1]$ 为

$$I(x,y)=\begin{cases}1, x\leqslant y,\\ a_k+(b_k-a_k)I_k\left(\dfrac{x-a_k}{b_k-a_k},\dfrac{y-a_k}{b_k-a_k}\right),\\ (x,y)\in|a_k,b_k|^2, x>y,\\ \min(I_0(x,y),y),\text{其它}.\end{cases}\quad(1)$$

称 $|a_k,b_k|$ 为 I 的生成区间,对应生成区间 $|a_k,b_k|$ 的模糊蕴涵 I_k 被称为 I 的一个加数.

引理 1 由方程(1)所定义的 2 元算子 I 满足 $(I_2)\sim(I_5)$.

证 先证 (I_2). 设 $x,y_1,y_2\in[0,1]$ 且 $y_1<y_2$. 若 $x\leqslant y_2$,根据方程(1)可知 $I(x,y_2)=1$,因此总有 $I(x,y_1)\leqslant I(x,y_2)$. 若 $x>y_2$,则需要考虑如下 2 种情形:

(A) 若 $x\notin\bigcup_{k\in A}|a_k,b_k|$,则根据方程(1)和 I_0 是模糊蕴涵可知

$I(x,y_1)=I_0(x,y_1)\wedge y_1\leqslant I_0(x,y_2)\wedge y_1\leqslant I_0(x,y_2)\wedge y_2=I(x,y_2)$;

(B) 若 $\exists k_0$ 使得 $x\in|a_{k_0},b_{k_0}|$,则需要考虑 3 种情况:

(i) 当 $y_2 \notin [a_{k_0}, b_{k_0}]$ 时,根据前面的假设 $x > y_2$ 可知 $y_2 \leqslant a_{k_0}$,进一步可知 $y_1 < a_{k_0}$,即 $y_1 \notin [a_{k_0}, b_{k_0}]$,根据方程(1)和 I_0 是模糊蕴涵可知

$I(x,y_1) = I_0(x,y_1) \wedge y_1 \leqslant I_0(x,y_2) \wedge y_1 \leqslant I_0(x,y_2) \wedge y_2 = I(x,y_2)$;

(ii) 当 $y_1, y_2 \in [a_{k_0}, b_{k_0}]$ 时,根据方程(1)和 I_{k_0} 是模糊蕴涵可知

$$I(x,y_1) = a_{k_0} + (b_{k_0} - a_{k_0}) I_{k_0}\left(\frac{x - a_{k_0}}{b_{k_0} - a_{k_0}}, \frac{y_1 - a_{k_0}}{b_{k_0} - a_{k_0}}\right) \leqslant a_{k_0} + (b_{k_0} - a_{k_0}) I_{k_0}\left(\frac{x - a_{k_0}}{b_{k_0} - a_{k_0}}, \frac{y_2 - a_{k_0}}{b_{k_0} - a_{k_0}}\right) = I(x,y_2);$$

(iii) 当 $y_1 \notin [a_{k_0}, b_{k_0}]$, $y_2 \in [a_{k_0}, b_{k_0}]$ 时,根据方程(1),I_{k_0} 是模糊蕴涵和 $y_1 \leqslant a_{k_0}$ 可知

$$I(x,y_2) = a_{k_0} + (b_{k_0} - a_{k_0}) I_{k_0}\left(\frac{x - a_{k_0}}{b_{k_0} - a_{k_0}}, \frac{y_2 - a_{k_0}}{b_{k_0} - a_{k_0}}\right) \geqslant a_{k_0} \geqslant y_1 \geqslant y_1 \wedge I_0(x,y_1) = I(x,y_1),$$

这样就证明了(I_2).

根据定义显然有 $I(0,0) = 1$ 和 $I(1,1) = 1$,即(I_3)和(I_4)成立. 下证(I_5). 若 $\exists k_0$ 使得 $0,1 \in [a_{k_0}, b_{k_0}]$,即 $a_{k_0} = 0, b_{k_0} = 1$,由 I_{k_0} 是模糊蕴涵知 $I(1,0) = I_{k_0}(1,0) = 0$;若 $0,1$ 不在同一生成区间内,即 $\forall k, 0 \notin [a_{k_0}, b_{k_0}]$,或者 $1 \notin [a_{k_0}, b_{k_0}]$,则 $I(1,0) = I_0(1,0) \wedge 0 = 0$,即($\mathrm{I}_5$)成立.

例 3[8] 若方程(1)中仅有生成区间 $[0,0.5]$ 且其对应的加数为 I_{RS}, $I_0 = I_{GD}$,即

$$I(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ 0.5 I_{RS}(2x,2y), & (x,y) \in [0,0.5]^2, x > y \\ y, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 1, x \leqslant y, \\ 0, (x,y) \in [0,0.5]^2, x > y, \\ y, \text{其它}. \end{cases}$$

下面说明 I 不满足(I_1). 事实上,取 $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.7$, $y = 0.2$,显然有 $x_1 < x_2$,但 $I(x_1,y) = I(0.3,0.2) = 0 < 0.2 = I(0.7,0.2) = I(x_2,y)$.

接下来,给出方程(1)定义的 2 元函数 I 是模糊蕴涵的充要条件.

定理 1 方程(1)定义的 2 元算子 I 是模糊蕴涵当且仅当 $\forall x,y,z \in [0,1]$, $x,y \in [a_k,b_k]$, $z \geqslant b_k$, $z \notin [a_k,b_k]$,有 $I_k(\varphi_k(x),\varphi_k(y)) \geqslant \varphi_k((I_0(z,y) \wedge y))$,这里 $\varphi_k(x) = (x - a_k)/(b_k - a_k)$.

证 根据引理 1,为证 I 是模糊蕴涵,只需证明(I_1)成立即可. 设 $x_1, x_2, y \in [0,1]$ 且 $x_1 < x_2$,若 $x_1 \leqslant y$,根据方程(1)可知 $I(x_1,y) = 1$,因此总有 $I(x_1,y) \geqslant I(x_2,y)$. 若 $x_1 > y$,则需要考虑如下 2 种情形:

(A) 若 $y \notin \bigcup\limits_{k \in A} [a_k,b_k]$,则根据方程(1)和 I_{k_0} 是模糊蕴涵可知

$I(x_1,y) = I_0(x_1,y) \wedge y \geqslant I_0(x_2,y) \wedge y = I(x_2,y)$.

(B) 若 $\exists k_0$ 使得 $y \in [a_{k_0}, b_{k_0}]$,则需要考虑 3 种情况:

(i) 当 $x_1 \notin [a_{k_0}, b_{k_0}]$ 时,根据前面的假设 $x_1 > y$ 可知 $x_1 \geqslant b_{k_0}$,进一步地,$x_2 > b_{k_0}$,即 $x_2 \notin [a_{k_0}, b_{k_0}]$,再根据方程(1)和 I_{k_0} 是模糊蕴涵可知

$I(x_1,y) = I_0(x_1,y) \wedge y \geqslant I_0(x_2,y) \wedge y = I(x_2,y)$;

(ii) 当 $x_1, x_2 \in [a_{k_0}, b_{k_0}]$ 时,根据方程(1)和 I_{k_0} 是模糊蕴涵可知

$$I(x_1,y) = a_{k_0} + (b_{k_0} - a_{k_0}) I_{k_0}\left(\frac{x_1 - a_{k_0}}{b_{k_0} - a_{k_0}}, \frac{y - a_{k_0}}{b_{k_0} - a_{k_0}}\right) \geqslant a_{k_0} + (b_{k_0} - a_{k_0}) I_{k_0}\left(\frac{x_2 - a_{k_0}}{b_{k_0} - a_{k_0}}, \frac{y - a_{k_0}}{b_{k_0} - a_{k_0}}\right) = I(x_2,y);$$

(iii) 当 $x_1 \in [a_{k_0}, b_{k_0}]$, $x_2 \notin [a_{k_0}, b_{k_0}]$ 时,根据假设可知

$$I(x_1,y) = a_k + (b_k - a_k) I_k\left(\frac{x_1 - a_k}{b_k - a_k}, \frac{y - a_k}{b_k - a_k}\right) = a_k + (b_k - a_k) I_k(\varphi_k(x_1), \varphi_k(y)) = a_k + (b_k - a_k)\varphi_k(y \wedge I_0(x_2,y)) \geqslant a_k + (b_k - a_k)(y \wedge I_0(x_2,y) - a_k)/(b_k - a_k) = y \wedge I_0(x_2,y) = I(x_2,y).$$

这样就证明了(I_1).

反之,若 I 满足(I_1),则 $\forall x,y,z \in [0,1]$,当 $x, y \in [a_k,b_k]$, $z \geqslant b_k$, $z \notin [a_k,b_k]$ 时,有

$$a_k + (b_k - a_k) I_k\left(\frac{x - a_k}{b_k - a_k}, \frac{y - a_k}{b_k - a_k}\right) = I(x,y) \geqslant I(z,y) = I_0(z,y) \wedge y.$$

令 $\varphi_k(x) = (x - a_k)/(b_k - a_k)$,即可得 $I_k(\varphi_k(x), \varphi_k(y)) \geqslant \varphi_k(I_0(z,y) \wedge y)$.

注2　显然,若 $k \in A, 1 \notin | a_k, b_k |$,且 I_k 满足(CB),则可推出满足定理1的条件,即 $\forall x, y, z \in [0,1]$,当 $x, y \in | a_k, b_k |, z \geqslant b_k, z \notin | a_k, b_k |$ 时,有 $I_k(\varphi_k(x), \varphi_k(y)) \geqslant \varphi_k(I_0(z,y) \wedge y)$,这里 $\varphi_k(x) = (x - a_k)/(b_k - a_k)$. 这是因为 $I_k(\varphi(x), \varphi(y)) \geqslant \varphi(y) \geqslant \varphi(I_0(z,y) \wedge y)$,但逆命题不真,即当 $k \in A, 1 \notin | a_k, b_k |, I_k$ 不满足(CB)时,方程(1)的2元函数仍然是模糊蕴涵. 进一步,可得如下推论.

推论1　当 $k \in A, 1 \notin | a_k, b_k |$,且 I_k 满足(CB)时,方程(1)定义的2元算子 I 是模糊蕴涵.

特别地,在方程(1)中,令 $I_0 = I^\alpha$,这里 I^α 为例2所定义,则可获得如下命题.

命题1　令 $(I_k)_{k \in A}$ 是一族模糊蕴涵,当 $1 \notin | a_k, b_k |$ 时,I_k 满足(CB),$\{| a_k, b_k |\}$ 是 $[0,1]$ 的一个子区间族并使得 (a_k, b_k) 互不相交,这里 $a_k < b_k$,$k \in A$,A 是有限或可数指标集,则2元函数

$$I(x,y) = \begin{cases} 1, x \leqslant y \\ a_k + (b_k - a_k) I_k\left(\dfrac{x - a_k}{b_k - a_k}, \dfrac{y - a_k}{b_k - a_k}\right), \\ (x,y) \in | a_k, b_k |^2, x > y \\ \alpha y, \text{其它} \end{cases}$$

是模糊蕴涵.

注3　在方程(1)中令 $I_0 = I_{GD}$,若 $k \in A, 1 \notin | a_k, b_k |$,且 I_k 满足(CB),则与定理1的条件等价. 这样可获得下面命题,即文献[8]中的定理3.

命题2[8]　令 $(I_k)_{k \in A}$ 是一族模糊蕴涵,$\{| a_k, b_k |\}$ 是 $[0,1]$ 的一个子区间族,并使得 (a_k, b_k) 互不相交,这里 $a_k < b_k, k \in A$,A 是有限或可数指标集,则2元函数

$$I(x,y) = \begin{cases} 1, x \leqslant y \\ a_k + (b_k - a_k) I_k\left(\dfrac{x - a_k}{b_k - a_k}, \dfrac{y - a_k}{b_k - a_k}\right), \\ (x,y) \in | a_k, b_k |^2, x > y \\ y, \text{其它} \end{cases}$$

是模糊蕴涵的充要条件是:当 $1 \notin | a_k, b_k |$ 时,I_k 满足(CB).

从一定意义上讲,命题2可看成命题1中 $\alpha = 1$ 的情形.

注4　在方程(1)中令 $I_0 = I_{RS}$,则定理1的条件自然成立. 这样可获得下面命题,即文献[8]中的定理5.

命题3[8]　令 $(I_k)_{k \in A}$ 是一族模糊蕴涵,$\{| a_k, b_k |\}$ 是 $[0,1]$ 的一个子区间族,并使得 (a_k, b_k) 互不相交,这里 $a_k < b_k, k \in A$,A 是有限或可数指标集,则2元函数

$$I(x,y) = \begin{cases} 1, x \leqslant y \\ a_k + (b_k - a_k) I_k\left(\dfrac{x - a_k}{b_k - a_k}, \dfrac{y - a_k}{b_k - a_k}\right), \\ (x,y) \in | a_k, b_k |^2, x > y \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

是模糊蕴涵.

从一定意义上讲,命题3可看成命题1中 $\alpha = 0$ 的情形. 下面的例子说明注4的逆命题不成立.

例4　在方程(1)中,令 $I_0 = I_{RS}$,$[0,0.5]$ 和 $[0.5,1]$ 是2个生成区间,它们对应的模糊蕴涵分别是 I_{RS} 和 I_{LK},即

$$I(x,y) = \begin{cases} 1, x \leqslant y, \\ 0.5 + \min(0.5 - x + y, 0.5), \\ (x,y) \in [0.5,1]^2, x > y, \\ 0, \text{其它}. \end{cases} \tag{2}$$

根据命题3知,方程(2)所定义2元运算 I 是模糊蕴涵,但生成区间 $[0,0.5]$ 对应的加数 I_{RS} 显然不满足(CB).

最后讨论定理1中模糊蕴涵的性质.

定理2　令 I_0 是任意模糊蕴涵,$(I_k)_{k \in A}$ 是一族模糊蕴涵,$\{| a_k, b_k |\}$ 是 $[0,1]$ 的一个子区间族并使得 (a_k, b_k) 互不相交,$\forall x, y, z \in [0,1]$,当 $x, y \in | a_k, b_k |, z \geqslant b_k, z \notin | a_k, b_k |$ 时,有 $I_k(\varphi_k(x), \varphi_k(y)) \geqslant \varphi_k(I_0(z,y) \wedge y)$,$I$ 由方程(1)所定义,这里 $a_k < b_k$,$k \in A$,A 是有限或可数指标集,$\varphi_k(x) = (x - a_k)/(b_k - a_k)$,则

(i) I 满足(IP);

(ii) I 满足(LOP);

(iii) 若 $\forall k \in A$ 满足 $b_k < 1$,则 I 满足(ROP);若 $\exists k_0 \in A$ 使得 $b_{k_0} = 1$,则 I 满足(ROP)当且仅当 $\forall y < x$ 有 $I_{k_0}(x,y) < 1$;

(iv) 若 $1 \notin \bigcup_{k \in A} | a_k, b_k |$,则 I 满足(NP)当且仅当

I_0 满足(CB);若 $1\in\bigcup_{k\in A}|a_k,b_k|$(即 $\exists k_0\in A$ 使得 $b_{k_0}=1$),则 I 满足(NP)当且仅当 I_{k_0} 满足(CB);当 $y\notin|a_{k_0},1|$ 时,有 $I_0(1,y)\geqslant y$;

(v) 若 $1\notin\bigcup_{k\in A}|a_k,b_k|$,则 I 满足(CB)当且仅当 I_0 和 I_k 满足(CB),这里 $k\in A$;

(vi) 若 $0\notin\bigcup_{k\in A}|a_k,b_k|$,则 I 满足(SCB);若 $0\in\bigcup_{k\in A}|a_k,b_k|$(即 $\exists k_0\in A$ 使得 $a_{k_0}=0$),则 I 满足(SCB)当且仅当 I_{k_0} 满足(SCB);

(vii) I 满足(SCC0)当且仅当 $\exists k_0\in A$ 使得 $|a_{k_0},b_{k_0}|=[0,1]$,并且若 $|a_{k_0},b_{k_0}|=[0,1)$,则 $\forall x\in(0,1)$ 有 $I_{k_0}(x,0)\neq0$;若 $|a_{k_0},b_{k_0}|=[0,1]$,则 I_{k_0} 满足(SCC0);

(viii) I 不满足(SCC1).

证 由方程(1)知,(i)和(ii)显然成立.

现证(iii),即只需证明当 $x>y$ 时,有 $I(x,y)<1$. 为此,需要考虑 2 种情形:

(A) $\forall k\in A$ 满足 $b_k<1$,当 x,y 不在同一生成区间内时,由方程(1)可知 $I(x,y)=I_0(x,y)\wedge y\leqslant y<1$;当 x,y 在同一生成区间内时,不妨设在 $|a_k,b_k|$ 中,由方程(1)和假设可知

$$I(x,y)=a_k+(b_k-a_k)I_k\left(\frac{x-a_k}{b_k-a_k},\frac{y-a_k}{b_k-a_k}\right)\leqslant b_k<1,$$

则 I 满足(ROP).

(B) 若 $\exists k_0\in A$ 使得 $b_{k_0}=1$. 由(A)的证明过程知,只需考虑 x,y 在生成区间 $|a_{k_0},1|$ 内的情形即可,由方程(1)可知 $I(x,y)=a_{k_0}+(1-a_{k_0})I_{k_0}((x-a_{k_0})/(1-a_{k_0}),(y-a_{k_0})/(1-a_{k_0}))<1$ 等价于 $I_{k_0}(u,v)<1,u>v$,这里 $u=(x-a_{k_0})/(1-a_{k_0})$,$v=(y-a_{k_0})/(1-a_{k_0})$. 故 I 满足(ROP)当且仅当 $\forall y<x$ 有 $I_{k_0}(x,y)<1$.

下证(iv),考虑 2 种情形:

(A) 若 $1\notin\bigcup_{k\in A}|a_k,b_k|$,则

I 满足(NP)$\Leftrightarrow I(1,y)=y\Leftrightarrow I_0(1,y)\wedge y=y\Leftrightarrow I_0(1,y)\geqslant y\Leftrightarrow I_0$ 满足(CB).

(B) 若 $1\in\bigcup_{k\in A}|a_k,b_k|$(即 $\exists k_0\in A$ 使得 $b_{k_0}=1$),则 I 满足(NP)当且仅当如下 2 种情况同时成立:

当 $y\notin|a_{k_0},1|$ 时,I 满足(NP)$\Leftrightarrow I(1,y)=y\Leftrightarrow I_0(1,y)\wedge y=y\Leftrightarrow I_0(1,y)\geqslant y$;

当 $y\in|a_{k_0},1|$ 时,I 满足(NP)$\Leftrightarrow I(1,y)=y\Leftrightarrow a_{k_0}+(1-a_{k_0})I_{k_0}\left(\frac{1-a_{k_0}}{1-a_{k_0}},\frac{y-a_{k_0}}{1-a_{k_0}}\right)=y\Leftrightarrow I_{k_0}(1,u)=u,u\in[0,1]\Leftrightarrow I_{k_0}$ 满足(NP).

现在证明(v). 若 I 满足(CB),即 $\forall x,y$ 有 $I(x,y)\geqslant y$. $\forall k\in A$,总存在 $x,y\in|a_k,b_k|$,$I(x,y)\geqslant y\Leftrightarrow a_k+(b_k-a_k)I_k((x-a_k)/(b_k-a_k),(y-a_k)/(b_k-a_k))\geqslant y\Leftrightarrow I_k(u,v)\geqslant v\Leftrightarrow I_k$ 满足(CB). 注意到 $1\notin\bigcup_{k\in A}|a_k,b_k|$,因此当 $y\in[0,1]$ 时,$I(1,y)\geqslant y\Leftrightarrow I_0(1,y)\wedge y\geqslant y\Leftrightarrow I_0(1,y)\geqslant y\Leftrightarrow I_0$ 满足(CB). 反之,直接验证.

下证(vi). 若 $0\notin\bigcup_{k\in A}|a_k,b_k|$,当 $x\neq0$ 时,$I(x,0)=I_0(x,0)\wedge0=0$,所以 I 满足(SCB). 若 $0\in\bigcup_{k\in A}|a_k,b_k|$(即 $\exists k_0\in A$ 使得 $a_{k_0}=0$),则由 I 满足(SCB)可知,当 $x\in|0,b_{k_0}|$ 时,有 $I(x,0)=0\Leftrightarrow b_{k_0}I_{k_0}(x/b_{k_0},0/b_{k_0})=0\Leftrightarrow I_{k_0}(u,0)=0,u\in(0,1]\Leftrightarrow I_{k_0}$ 满足(SCB).

(vii)和(viii)直接由定义可证.

3 总结与未来的工作

本文从一族给定的模糊蕴涵出发,定义并研究了一种新的模糊蕴涵序和,推广并统一了当前几种模糊蕴涵序和的构造方法. 在未来的工作中,将致力于探究这种蕴涵在模糊推理中的应用.

4 参考文献

[1] Baczynski M,Jayaram B. Fuzzy implications,studies in fuzziness and soft computing [M]. Berlin:Springer,2008.

[2] Mas M,Monserrat M,Torrens J,et al. A survey on fuzzy implication functions [J]. IEEE Trans Fuzzy Syst,2007,15(6):1107-1121.

[3] Su Yong,Xie Aifang,Liu Huawen. On ordinal sum implications [J]. Inform Sciences,2015,293:251-262.

[4] Yager R R. On some new classes of implication operators and their role in approximate reasoning [J]. Inform Sci-

ences,2004,167(1/2/3/4):193-216.

[5] Mesiar R,Mesiarová A. Residual implications and left-continuous t-norms which are ordinal sums of semigroups [J]. Fuzzy Sets Syst,2004,143(1):47-57.

[6] Baczynski M,Drygas P,Krol A,et al. New types of ordinal sum of fuzzy implications [C]// 2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems,Naples,2017:1-6.

[7] Baczynski M,Drygas P,Mesiar R. Monotonicity in the construction of ordinal sums of fuzzy implications [M]// Torra V,Mesiar R,De Baets B. Aggregation functions in theory and in practice,series:advances in intelligent systems and computing,Switzerland:Springer International Publishing,2018.

[8] Drygas P,Krol A. On some constructions of ordinal sums of fuzzy implications [C]// Joint 17th World Congress of International Fuzzy Systems Association and 9th International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems,Otsu,2017.

[9] Fodor J,Roubens M. Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers,1994.

[10] Klement E P,Mesiar R,Pap E. Triangular norms [M]. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,2000.

[11] Drygas P,Krol A. Generating fuzzy implications by ordinal sums [J]. Tatra Mt Math Publ,2017,66(1):39-50.

[12] Drygas P,Krol A. Ordinal sum of fuzzy implications fulfilling left ordering property [C]// Kacprzyk J,Szmidt E. Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017,Warsaw:Springer International Publishing,2018:658-669.

[13] Drygas P,Krol A. Two constructions of ordinal sums of fuzzy implications [C]// Atanassov T,Cross-Fertilization J. New Models and Applications Series:Advances in Intelligent Systems and Computing,Switzerland:Springer International Publishing,2018.

[14] 李芳,裴道武. 多重模糊蕴涵与生成模糊蕴涵的新方法 [J]. 高校应用数学学报,2016,31(4):467-475.

[15] 张文文. 模糊蕴涵构造方法的研究 [D]. 杭州:浙江理工大学,2017.

The Novel Method of Constructing Fuzzy Implications by Ordinal Sum

YANG Li[1],QIN Feng[2*]

(1. College of Fundamental Teaching,Nanchang Institute of Science and Technology,Nanchang Jiangxi 330108,China;
2. College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: With the aid of the ordinal theory of semigroups,starting from the family of fuzzy implications,a novel ordinal sum of fuzzy implications is defined,and the necessary and sufficient conditions of this ordinal sum becoming a fuzzy implication are given,then the current two methods of constructing fuzzy implications using the ordinal theory are generalized and unified. Finally,some properties of the ordinal sum of fuzzy implications are discussed.

Key words: fuzzy connectives;fuzzy implications;ordinal sum implications

(责任编辑:曾剑锋)