

文章编号: 1000-5862(2018)04-0354-03

关于 f -图及其补图的顶点可分解性质的研究

吴进平, 郭 锦*

(海南大学信息科学技术学院 海南 海口 570228)

摘要: 从纯图论的角度对一类新型的代数图类—— f -图展开研究, 证明了所有 f -图都是顶点可分解的, 并给出了 f -图的补图是顶点可分解的一个等价刻画.

关键词: 顶点可分解; f -图; 2 部图; Cohen-Macaulay 性质

中图分类号: O 153.3 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.04.05

0 引言

设 $S = F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 为域 F 上的多项式环, S 上由若干单项式生成的理想被称为单项式理想. 单项式理想与单纯复形之间存在 2 种常见的对应: Stanley-Reisner 对应和极大面对应. 这 2 种对应吸引了许多学者的浓厚兴趣^[1-5]. G. Q. Abbasi 等^[6] 定义了一类特殊的单项式理想, 称为 f -理想, 该理想由 squarefree 单项式生成, 且其极大面复形和其 Stanley-Reisner 复形有着相同的 f -向量. 文献[6]使用代数方法给出了齐 2 次 f -理想的等价刻画. I. Anwar 等^[7] 给出了任意齐 d 次 unmixed f -理想的一个等价描述. 郭锦等^[8] 给出了任意齐 d 次 f -理想的一个组合描述, 并给出了齐 2 次 f -理想的分类刻画.

如果一个简单图的边理想是一个 f -理想, 则该图被称为 f -图. f -图的概念是由 H. Mahmood 等^[9] 提出的. 文献[9]给出了几种满足 Cohen-Macaulay 的 f -图的构造方法. Cohen-Macaulay 性质是一类重要的代数性质. 文献[8]通过研究 f -图的独立复形, 从纯 shellable 的角度证明了所有 f -图都是 Cohen-Macaulay 的.

本文从纯图论的角度来证明 f -图具有顶点可分解性质. 这一结果可看作文献[8]中相应结果的一个推广, 因为在纯复形中有下列推导关系:

顶点可分解 \Rightarrow shellable \Rightarrow Cohen-Macaulay.

1 预备知识

单纯复形 Δ 是 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 的一个满足遗传性的子集族, 其元素称为面(face). 按照包含关系, 面中的极大者称为极大面(facet), 极大面的全体记作 $F(\Delta)$. 设 $x \in [n]$, 记 $\Delta \setminus x = \{F \in \Delta \mid x \notin F\}$, $l_{\Delta}(x) = \{F \in \Delta \mid x \notin F, F \cup \{x\} \in \Delta\}$.

定义 1 设 Δ 是一个单纯复形, 如果它满足下列条件之一, 则 Δ 被称为顶点可分解的.

(i) Δ 是单形;

(ii) 存在一个顶点 x , 满足: $\Delta \setminus x$ 和 $l_{\Delta}(x)$ 都是顶点可分解的; $l_{\Delta}(x)$ 的极大面都不是 $\Delta \setminus x$ 的极大面, 即 $\Delta \setminus x = \{F \mid x \notin F \in F(\Delta)\}$.

设 G 是一个简单图, 其顶点集记作 $V(G)$, 顶点数记作 $v(G)$. G 的独立点集(independent set) A 是 $V(G)$ 的不同同时包含任一条边的两端点的子集, 以独立点集作为面的复形称为图 G 的独立复形(independence complex)^[10-14]. 图 G 的边理想 $I(G)$ 为其独立复形的 Stanley-Reisner 理想. 若图 G 的独立复形是顶点可分解的, 则称图 G 是顶点可分解的. 对于一个图 G 的顶点 x , 所有与 x 相邻的点的集合记作 $N_G(x)$, 且记 $N_G[x] = N_G(x) \cup \{x\}$. 复形的顶点可分解性质可以用如下的图论语言来等价描述.

引理 1^[15] 图 G 是顶点可分解的, 当且仅当下列条件之一成立:

收稿日期: 2018-05-27

基金项目: 国家自然科学基金(11601108, 11526065), 海南省自然科学基金(20161002, 20151001)和海南大学博士科研启动基金(kyqd1511)资助项目.

通信作者: 郭 锦(1983-) 男, 湖南湘潭人, 讲师, 博士, 主要从事组合交换代数研究. E-mail: guojinecho@163.com

(i) G 由孤立点构成;

(ii) G 中存在顶点 x 满足: $G \setminus N_G[x]$ 和 $G \setminus x$ 均是顶点可分解的; 对于 $G \setminus N_G[x]$ 中的任一独立点集 A , 均存在顶点 $y \in N_G(x)$ 使得 $A \cup \{y\}$ 为 $G \setminus x$ 中的独立点集.

满足上述第 (ii) 条性质的点 x 被称为一个 shedding 点.

2 f -图的顶点可分解性质

引理 2^[15] 一个图是顶点可分解的当且仅当它的每一个连通分支都是顶点可分解的.

文献 [8] 对 f -图进行了分类刻画, 即除了 5 点圈图 (记做 C_5) 以外所有的顶点数为 n 的 f -图都是一个二部图的补图, 其边数等于 $n(n-1)/4$. 设 V_1, V_2 为 $V(G)$ 的 2 个互不相交的子集. 若一条边的一个顶点属于 V_1 , 另一顶点属于 V_2 , 则称该边连接 V_1 与 V_2 . 在图 G 中连接 V_1 与 V_2 的边数记作 $e_G(V_1, V_2)$. 在本文中, 若对于二部图 H , 存在顶点集 $V(H)$ 的子集 V_1, V_2 , 使得 $V(H) = V_1 \cup V_2$, 且 H 的边数为 $e_H(V_1, V_2)$, 则称 $V(H) = V_1 \cup V_2$ 为二部图 H 顶点集的一个划分.

引理 3^[8] 设 G 为一个 f -图, 且其补图 \bar{G} 为一个二部图. 若 \bar{G} 的顶点集划分为 V_1 与 V_2 2 部分, 则有 $e_G(V_1, V_2) < \min(v(V_1), v(V_2))$.

命题 1 完全图都是顶点可分解的.

证 记 K_n 为顶点数为 n 的完全图, 下面对顶点数 n 作归纳. 显然 K_1 是顶点可分解的. 假设 K_{n-1} 是顶点可分解的, 下证 K_n 也是顶点可分解的. 任取 $v_1 \in K_n$, 因为 $K_n \setminus N_{K_n}[v_1]$ 为空集, 所以任取 $v \in N_{K_n}(v_1)$, 均有 $\{v\} \cup \emptyset$ 构成一个独立点集. 显然 $K_n \setminus N_{K_n}[v_1]$ 是顶点可分解的, 而 $K_n \setminus v_1$ 即为 K_{n-1} , 由归纳假设可知其为顶点可分解的. 由引理 1 可知 K_n 是顶点可分解的.

若图 G 的顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 而边集 $E(G) = \{v_i v_{i+1} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}$, 这样的图称为线性图 (linear graph).

命题 2 线性图都是顶点可分解的.

证 将含 n 个顶点的线性图记为 P_n , 下面对顶点数 n 作归纳. 由命题 1 可知 P_1, P_2 都是顶点可分解的. 假设 $\forall k < n$, 有 P_k 是顶点可分解的, 下证 P_n 也是顶点可分解的. 设 $v_1 \in P_n$ 为一侧端点. 与 v_1 相邻的顶点记为 v_2 , 显然有 $v_1 \in N_{P_n}(v_2)$. 对于

$P_n \setminus N_{P_n}[v_2]$ 中任意的独立点集 S , $S \cup \{v_1\}$ 也是 P_n 的一个独立点集. 注意到 $P_n \setminus N_{P_n}[v_2]$ 即为 P_{n-3} , 而 $P_n \setminus v_2$ 的 2 个连通分支为 $\{v_1\}$ 和 P_{n-2} , 由归纳假设可知它们是顶点可分解的. 因此由引理 1 和引理 2 可知 P_n 是顶点可分解的.

当 G 的补图 \bar{G} 为一个二部图时, 设 \bar{G} 的顶点集划分为 V_1 与 V_2 2 部分. 记 $A_{V_1} = \{v \in V_1 \mid \exists u \in V_2, \text{使得 } uv \in E(G)\}$, 称为 V_1 在 G 中与 V_2 的相邻点集, 其所含顶点数 $v(A_{V_1})$ 称为 V_1 在 G 中与 V_2 的相邻点数.

命题 3 设 G 的补图 \bar{G} 为一个二部图, 且设 \bar{G} 的顶点集划分为 V_1 与 V_2 2 部分. 若 $v(A_{V_1}) < v(V_1)$, 则 G 是顶点可分解的.

证 对 $v(A_{V_1})$ 作归纳. 当 $v(A_{V_1}) = 0$ 时, G 的 2 个连通分支都为完全图, 由引理 2 和命题 1 可知, G 是顶点可分解的. 假设当 $v(A_{V_1}) = m-1$ 时 G 是顶点可分解的, 下证当 $v(A_{V_1}) = m$ 时 G 也是顶点可分解的. 由于 $v(A_{V_1}) < v(V_1)$, 可取 $v_1 \in V_1 \setminus A_{V_1}$. $\forall v_2 \in A_{V_1}$, $G \setminus N_G[v_2]$ 为 V_2 的一个完全子图, 由命题 1 知其是顶点可分解的. 对 $G \setminus N_G[v_2]$ 中任意独立点集 B , $B \cup \{v_1\}$ 仍然是 G 的独立点集. 易见 $G \setminus v_2$ 的补图也为二部图, 顶点集划分的 2 部分分别为 $V_1 \setminus \{v_2\}$ 和 V_2 , 且 $v(A_{V_1 \setminus \{v_2\}}) < v(V_1 \setminus \{v_2\})$. 由于 $V_1 \setminus \{v_2\}$ 在 $G \setminus v_2$ 中与 V_2 的相邻点数 $v(A_{V_1 \setminus \{v_2\}}) = m-1 < v(V_1 \setminus \{v_2\})$, 由归纳假设知 $G \setminus v_2$ 是顶点可分解的. 由引理 1 知 G 是顶点可分解的.

定理 1 所有 f -图都是顶点可分解的.

证 设 G 为一个顶点数为 n 的 f -图. 由文献 [3] 中的分类定理可知, G 为一个 5 点圈图, 或者其补图 \bar{G} 为一个二部图. 下面分别考虑这 2 种情形.

情形 1 当 G 是一个 5 点圈图 C_5 时, 任取 $v \in G$ (记为 v_1) 并以顺时针将其它顶点编号. $G \setminus N_G[v_1]$ 的独立点集为 $\{v_3\}$ 和 $\{v_4\}$, 而 $\{v_2, v_4\}$ 与 $\{v_3, v_5\}$ 都是独立点集, 其中 $v_2, v_5 \in N_G(v_1)$. 注意到 $G \setminus N_G[v_1]$ 和 $G \setminus v_1$ 分别为 $n=2$ 和 $n=4$ 的线性图, 由命题 2 和引理 1 知 G 是顶点可分解的.

情形 2 当 G 的补图 \bar{G} 为一个二部图时, 设 \bar{G} 的顶点集划分为 V_1 与 V_2 2 部分. 由引理 3 可知 $e_G(V_1, V_2) < \min(v(V_1), v(V_2))$. 因此 $v(A_{V_1}) < v(V_1)$. 由命题 3 可知 G 是顶点可分解的.

显然 f -图的独立复形 (即其补图的团复形) 是一个 1 维的纯复形, 所以由定理 1 得到

推论 1 所有的 f -图都是纯 shellable 的, 因而是 Cohen-Macaulay 的.

3 f -图的补图的顶点可分解性质

定义 2 设 G 为一个二部图, 顶点集可划分为 V_1 与 V_2 部分. 若 $v \in V_1$, 且 v 与 V_2 中的所有顶点都相邻, 则称 v 为二部图 G 相对于该划分的一个团点.

命题 4 设 G 为一个二部图, 顶点集可划分为 V_1 与 V_2 部分. 若 V_1, V_2 中的团点数量均不小于 2, 则该图不是顶点可分解的.

证 只需证明 V_1 中不含任何 shedding 点. 实际上, $\forall v_1 \in V_1$, 至少存在 V_1 中的一个团点 v_2 , 满足 $v_2 \in G \setminus N_G[v_1]$. 易见 $N_G(v_1) \subset V_2$, 且 $V_1 \setminus \{v_1\}$ 是 $G \setminus N_G[v_1]$ 的一个独立点集. 由于 V_1 中的一个团点 $v_2 \in V_1 \setminus \{v_1\}$, 因而 $V_1 \setminus \{v_1\}$ 再添加上 $N_G(v_1)$ 中的任意点都不再是 G 中独立点集. 因此 v_1 不是 V_1 中的 shedding 点. 由引理 1 可知 G 不是顶点可分解的.

命题 5 设 G 为一个顶点数大于 5 的 f -图, 则 \bar{G} 为一个二部图, 且 \bar{G} 的顶点集划分的 2 个部分的团点数量均不小于 2.

证 设 G 的顶点数量为 $n (n > 5)$. 由文献 [8] 中分类定理可知 \bar{G} 为一个二部图, 可设其顶点集划分的 2 个部分分别为 V_1 与 V_2 , 其中 $v(V_1) = r \leq n/2$, 则有

$$e_G(V_1, V_2) = \frac{1}{2} \binom{n}{2} - \binom{r}{2} - \binom{n-r}{2} = -r^2 +$$

$$rn - n^2/4 + n/4.$$

因而有 $v(V_1) - e_G(V_1, V_2) = (r - (n-1)/2)^2 + (n-1)/4$.

易见, 当 $n > 5$ 时 $v(V_2) - e_G(V_1, V_2) \geq v(V_1) - e_G(V_1, V_2) \geq 2$. 因此, 在 \bar{G} 中, V_1 与 V_2 中的团点数量均不小于 2.

定理 2 若 G 为一个 f -图, 则下列条件等价:

- (i) G 的补图 \bar{G} 是顶点可分解的;
- (ii) G 的顶点数为 4 或 5;
- (iii) G 同构于图 1(a) ~ (c) 中的一个.

证 注意到 f -图的顶点数不小于 4. 由命题 4 和命题 5 可知, 若 G 为一个顶点数大于 5 的 f -图, 则 \bar{G} 不是顶点可分解的. 由文献 [8] 中的分类定理可知, 顶点数为 4 和 5 的 f -图如图 1(a) ~ (c) 所示. 图 1(d) ~ (f) 分别为与之对应的补图. 下面只需证明图 1(d) ~ (f) 都是顶点可分解的.

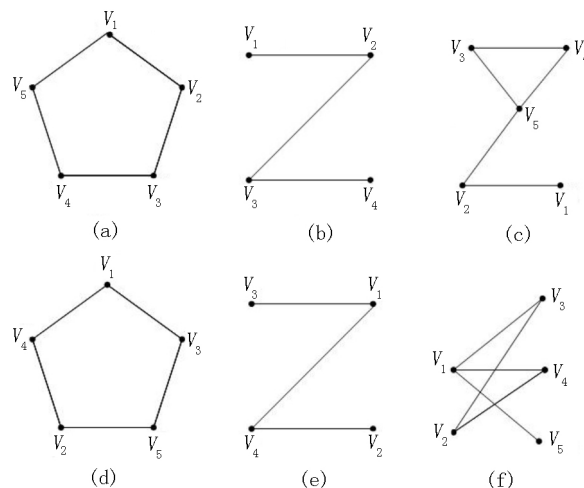


图 1 顶点数为 4 和 5 的 f -图及其补图

图 1(d) 为一个 5 点圈图, 由定理 2 可知其为顶点可分解的. 图 1(e) 为一个线性图, 由命题 3 可知其为顶点可分解的. 设图 1(c) 为 G , 则图 1(f) 为 \bar{G} . $\bar{G} \setminus N_{\bar{G}}[v_1]$ 为孤立点 v_2 , 因而是顶点可分解的. 取 $v_5 \in N_{\bar{G}}(v_1)$, $\{v_2\} \cup \{v_5\}$ 为 \bar{G} 中的独立点集, 且 $\bar{G} \setminus v_1$ 的 2 个连通分支分别为一个线性图和一个孤立点, 由命题 3 和引理 2 可知 $\bar{G} \setminus v_1$ 也是顶点可分解的. 由引理 1 可知 \bar{G} 是顶点可分解的.

4 参考文献

- [1] Connon E, Faridi S. Chorded complexes and a necessary condition for a monomial ideal to have a linear resolution [J]. Journal of Combinatorial Theory: Series A, 2013, 120 (7): 1714-1731.
- [2] Faridi S. The facet ideal of a simplicial complex [J]. Manuscripta Mathematica, 2002, 109 (2): 159-174.
- [3] Herzog J, Hibi T. Monomial ideals, GTM260 [M]. London: Springer-Verlag London Limited, 2011.
- [4] Minh N C, Trung N V. Cohen-Macaulayness of monomial ideals and symbolic powers of Stanley-Reisner ideals [J]. Advances in Mathematics, 2011, 226 (2): 1285-1306.
- [5] Villarreal R H. Monomial algebras [M]. New York: Marcel Dekker, 2001.
- [6] Abbasi G Q, Ahmad S, Anwar I, et al. f -ideals of degree 2 [J]. Algebr Colloq, 2012, 19: 921-926.
- [7] Anwar I, Mahmood H, Binyamin M A, et al. On the Characterization of f -ideals [J]. Communications in Algebra, 2014, 42 (9): 3736-3741.
- [8] Guo Jin, Wu Tongsoo, Liu Qiong. f -ideals and f -graphs [J]. Communications in Algebra, 2017, 45 (8): 3207-3220.

(下转第 373 页)

- [11] Ma Wenchao ,Jaconangelo C ,de la Torre J. Model similarity ,model selection ,and attribute classification [J]. Applied Psychological Measurement ,2016 ,40(3) :200-207.
- [12] de la Torre J ,van der Ark L A ,Rossi G. Analysis of clinical data from a cognitive diagnosis modeling framework [J]. Measurement and Evaluation in Counseling and Development ,2017 ,9(3) :210-213.
- [13] Tu Dongbo ,Gao Xuliang ,Wang Daxun ,et al. A new measurement of internet addiction using diagnostic classification models [J]. Frontiers in Psychology ,2017 ,8:1768.
- [14] Kaplan M ,de la Torre J ,Barrada J R. New item selection methods for cognitive diagnosis computerized adaptive testing [J]. Applied Psychological Measurement ,2015 ,39(3) :167-188.
- [15] 张龙 ,涂冬波. 多级计分题项目功能差异常用检测方法 & 比较 [J]. 江西师范大学大学学报:自然科学版 , 2015 ,39(5) :441-448.

The Study on the CD-CAT Item Bank Based on the Perspective of Different CDMs

TU Dongbo ,GAO Xuliang ,WANG Daxun ,CAI Yan

(College of Psychology ,Jiangxi Normal University ,Nanchang Jiangxi 330022 ,China)

Abstract: The item bank is a very critical part of the cognitive diagnostic computerized adaptive testing (CD-CAT). In regular CD-CAT, an item bank uses the same cognitive diagnostic model to calibrate the item parameters, however, all the items in item bank can't be fully fitted with the same CDM. In the study, the advantage of the method proposed by de la Torre to select an appropriate CDM for each item of item bank within a G-DINA framework has been taken for convenience, this method is referred to as a Mixed CDMs, and use a complex simulation study to compare the performance of Mixed CDMs and five special models (G-DINA, DINA, DINO, A-CDM and RRUM) in CD-CAT. The results show that across all conditions, the Mixed CDMs provided the ideal classification accuracy and utilization rate of the item bank.

Key words: CD-CAT; CDM; Mixed CDMs; item bank

(责任编辑: 冉小晓)

(上接第 356 页)

- [9] Mahmood H ,Anwar I ,Zafar M K. A construction of Cohen-Macaulay f -graphs [J]. Journal of Algebra and Its Applications ,2014 ,13(6) :1450012.
- [10] Aharoni R ,Berger E ,Meshulam R. Eigenvalues and homology of flag complexes and vector representations of graphs [J]. Geom Funct Anal ,2005 ,15(3) :555-566.
- [11] Caroline J Klivans. Threshold graphs ,shifted complexes , and graphical complexes [J]. Discrete Math ,2007 ,307(21) :2591-2597.
- [12] Roy Meshulam. Domination numbers and homology [J]. J Combin Theory: Ser A ,2003 ,102(2) :321-330.
- [13] Berger E. Relation between the maximal degree of a graph and the topological connectivity of its independence complex [J]. Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery ,2013.
- [14] Earl J ,Vander Meulen K N ,Van Tuyl A. Independence complexes of well-covered circulant graphs [J]. Experimental Mathematics ,2016 ,25(4) :441-451.
- [15] Woodroffe R. Vertex decomposable graphs and obstructions to shellability [J]. Proceedings of the American Mathematical Society ,2009 ,137(10) :3235-3246.

The Study about the Vertex Decomposability of f -Graph and Its Complement

WU Jinping ,GUO Jin*

(College of Information Science and Technology ,Hainan University ,Haikou Hainan 570228 ,China)

Abstract: A class of algebraic graph f -graph is characterized in this paper. It is proved that all f -graphs are vertex decomposable, and the vertex decomposability of the complement of f -graph is also characterized.

Key words: vertex decomposable; f -graph; bipartite graph; Cohen-Macaulayness

(责任编辑: 曾剑锋)